

APPLICAZIONE DI MODELLI DI TURBOLENZA AVANZATI
A FLUSSI IN CONVENZIONE NATURALE E FORZATA

Diego Lentini
Dipartimento di Meccanica e Aeronautica
Università degli Studi di Roma “La Sapienza”

Relazione della Convenzione tra
Università degli Studi di Roma “La Sapienza” ed ENEA

GIUGNO 1998

Capitolo 1

Natura della turbolenza

1.1 Problemi associati alla risoluzione di flussi turbolenti.

Consideriamo le equazioni di conservazione per un flusso a proprietà costanti, intendendo con questo a densità costante, ed a viscosità cinematica ν e dinamica $\mu = \rho\nu$ costanti. Vedremo oltre come trattare gli effetti dovuti al galleggiamento.

Per quanto concerne la notazione, adottiamo notazione tensoriale cartesiana (le direzioni coordinate e le componenti di velocità sono indicate rispettivamente come x_1, x_2, x_3 e u_1, u_2, u_3), con la convenzione che gli indici k ed l sono riservati per indicare sommatoria sulle tre direzioni coordinate quando appaiono in forma ripetuta in un termine (occasionalmente tuttavia potremo usare una semplice notazione cartesiana, più esplicita, in alcuni esempi). Le equazioni di continuità e della quantità di moto assumono quindi la forma seguente ¹:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + g_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

dove τ_{ik} indica lo sforzo in direzione i sulla superficie infinitesima di normale k , dovuto alla viscosità molecolare μ (sottolineiamo che questa è una proprietà del fluido):

$$\tau_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

g_i denota la componente dell'accelerazione di gravità nella direzione i .

Notiamo che l'eq. (1.1) esprime il vincolo cinematico di incompressibilità sulle componenti di velocità.

Le equazioni (1.1, 1.2) rappresentano un sistema di 4 equazioni nelle 4 variabili u_i ($i = 1, 2, 3$) e p . Il sistema è perciò *chiuso*, e quindi fornisce una descrizione completa dei flussi considerati. E' importante qui sottolineare che esso descrive l'evoluzione dei valori *istantanei* delle varie grandezze.

Quando si cerca di risolvere le equazioni riportate sopra mediante un codice di CFD (Computational Fluid Dynamics - fluidodinamica computazionale), i passi di discretizzazione (sia spaziali che temporali) devono essere scelti in modo tale da essere rappresentativi della scala dei fenomeni che avvengono nel flusso considerato. Come primo esempio riportiamo in Fig. 1.1 il caso di un flusso intorno ad un gradino; è chiaro che adottando una griglia di calcolo del tipo di quella schematizzata

¹Con la convenzione sulla sommatoria, l'eq. (1.1) sta per $\partial u_1/\partial x_1 + \partial u_2/\partial x_2 + \partial u_3/\partial x_3$; il termine convettivo spaziale dell'eq. (1.2) per $\partial(u_1 u_i)/\partial x_1 + \partial(u_2 u_i)/\partial x_2 + \partial(u_3 u_i)/\partial x_3$, e similmente per quello viscoso.

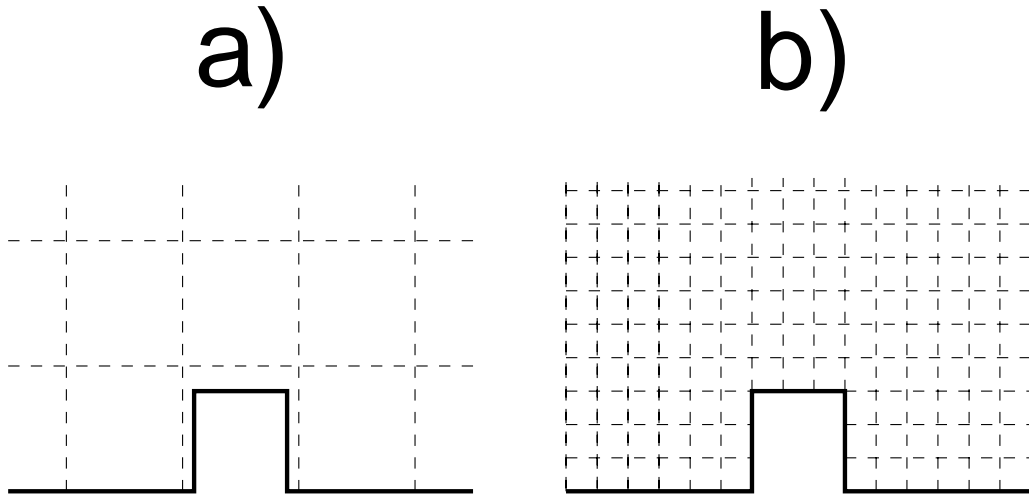


Figure 1.1: Flusso intorno ad un gradino: a) griglia di calcolo eccessivamente larga, b) griglia di calcolo in grado di risolvere adeguatamente il flusso.

a linea tratteggiata in Fig. 1.1a, le cui maglie hanno dimensioni superiori a quelle che caratterizzano il gradino, si ottiene sì una soluzione, ma essa non sarà in grado di dare informazioni di alcuna utilità sulla configurazione di flusso indotta dalla presenza del gradino. Occorrerà quindi usare una griglia di calcolo del tipo indicato in Fig. 1.1b, con dimensione delle maglie inferiori alle dimensioni del gradino, ed in grado quindi di descriverlo compiutamente.

Come secondo esempio (Fig. 1.2) consideriamo il caso di flusso in un canale; se il flusso è laminare, il profilo di velocità ha il tipico andamento parabolico indicato in a). Adottando, come caso limite, una griglia di calcolo con appena 5 nodi, è evidente che non si potrà avere una rappresentazione del flusso migliore di quella schematizzata in b). Da questi esempi si evince che è necessario quindi adottare una spaziatura tra i punti di calcolo adeguata alla scala spaziale dei fenomeni che avvengono nel flusso; altrimenti si otterrà una soluzione che non dà alcuna informazione utile. Questa osservazione è di particolare importanza nel caso considerato in queste note, quello cioè di flusso turbolento. In questo caso la velocità sarà caratterizzata da fluttuazioni casuali sia spaziali che temporali; il profilo *istantaneo* di velocità in un flusso turbolento potrà allora avere l'andamento illustrato qualitativamente in c). Tale andamento indica la presenza di strutture di flusso caratterizzate da scale molto piccole rispetto alle dimensioni del canale. La griglia di calcolo, per poter rappresentare adeguatamente questi flussi, dovrà perciò avere maglie la cui dimensione sia inferiore (o al più uguale) a quella della più piccola scala spaziale della turbolenza.

Nasce quindi il problema di individuare la più piccola scala spaziale della turbolenza. A questo scopo, è necessario addentrarsi un poco nei meccanismi della turbolenza. Abbiamo detto che in flussi turbolenti si verificano fluttuazioni delle componenti di velocità, nonché della pressione; possiamo allora decomporre il valore istantaneo di ciascuna componente di velocità, e della pressione, in un valor medio ed una fluttuazione (decomposizione di Reynolds), indicando la prima con una barra e

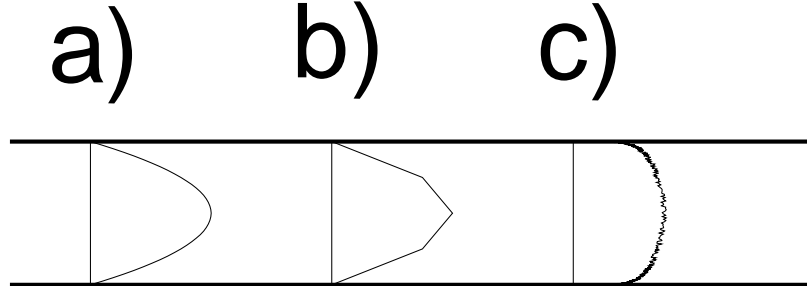


Figure 1.2: Profili trasversali di velocità in un canale: a) flusso laminare, b) rappresentazione ottenibile con 5 punti, c) flusso turbolento (valori istantanei).

la seconda con un'apice. Adottando notazione cartesiana possiamo scrivere:

$$u = \bar{u} + u' \quad (1.4)$$

$$v = \bar{v} + v' \quad (1.5)$$

$$w = \bar{w} + w' \quad (1.6)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (1.7)$$

Ovviamente ciascuna variabile dipende dalle coordinate spaziali e dal tempo, anche se tale dipendenza non è qui indicata esplicitamente per concisione. Consideriamo inoltre per semplicità solo il caso in cui il valore medio sia indipendente dal tempo (per quanto la situazione in cui esso varia con scale temporali molto più lunghe di quelle che caratterizzano le fluttuazioni possa essere trattato con relativa facilità).

Consideriamo un volumetto di fluido di lati dx , dy , dz , la cui traccia nel piano $x - y$ è riportata in Fig. 1.3 a linea tratteggiata. Le fluttuazioni delle componenti di velocità ovviamente esercitano il loro effetto tanto sui moti traslazionali che rotazionali di tale elementino, ed inoltre ne causano la deformazione. Poichè ovviamente le fluttuazioni dipendono dalle coordinate spaziali, si genera una rotazione con velocità angolare mediata (vedi Fig. 1.3a)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) \quad (1.8)$$

poi una deformazione, che può essere distinta in una componente di taglio, con tasso di deformazione (vedi Fig. 1.3b)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \quad (1.9)$$

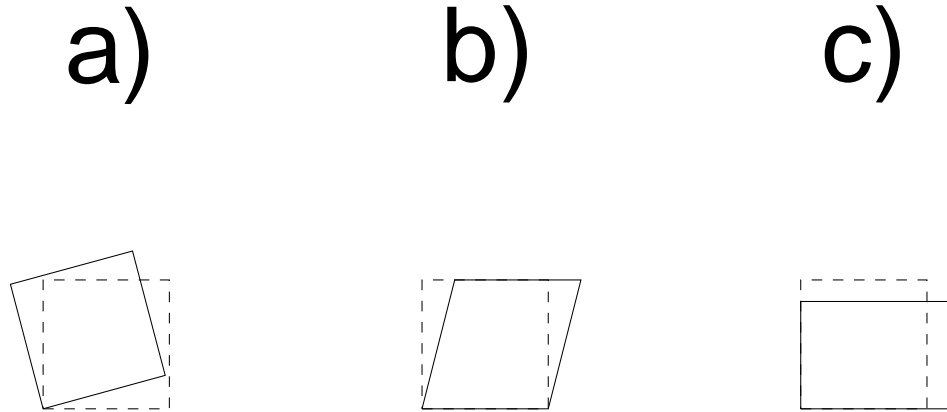


Figure 1.3: Effetti della turbolenza: a) rotazione pura, b) deformazione di taglio pura, c) deformazione lineare pura. La linea tratteggiata indica la configurazione iniziale del volumetto di fluido.

ed una lineare, con tasso (vedi Fig. 1.3c)

$$\frac{\partial u'}{\partial x} \quad (1.10)$$

Si noti che, per conservare il suo volume, l'elementino di fluido allungato lungo la direzione x dovrà contrarsi nelle direzioni ortogonali.

Oltre a queste componenti visualizzabili nel piano $x - y$, ci saranno ovviamente componenti negli altri piani coordinati, per esempio una deformazione (lineare) $\partial w'/\partial z$.

Consideriamo allora un elemento di fluido di sezione circolare (cioè un cilindro, che per comodità supponiamo che abbia asse parallelo all'asse z , vedi Fig. 1.4) sottoposto, per effetto delle fluttuazioni, a: 1) rotazione con velocità angolare ω , 2) sforzo normale causato dal gradiente della fluttuazione della componente z di velocità ($\partial w'/\partial z$). Possiamo pensare a tale elemento come ad un vortice sottoposto a *stretching* (allungamento). Sappiamo che il momento d'inerzia I di un cilindro di raggio r , una volta fissata la massa, risulta

$$I \propto r^2 \quad (1.11)$$

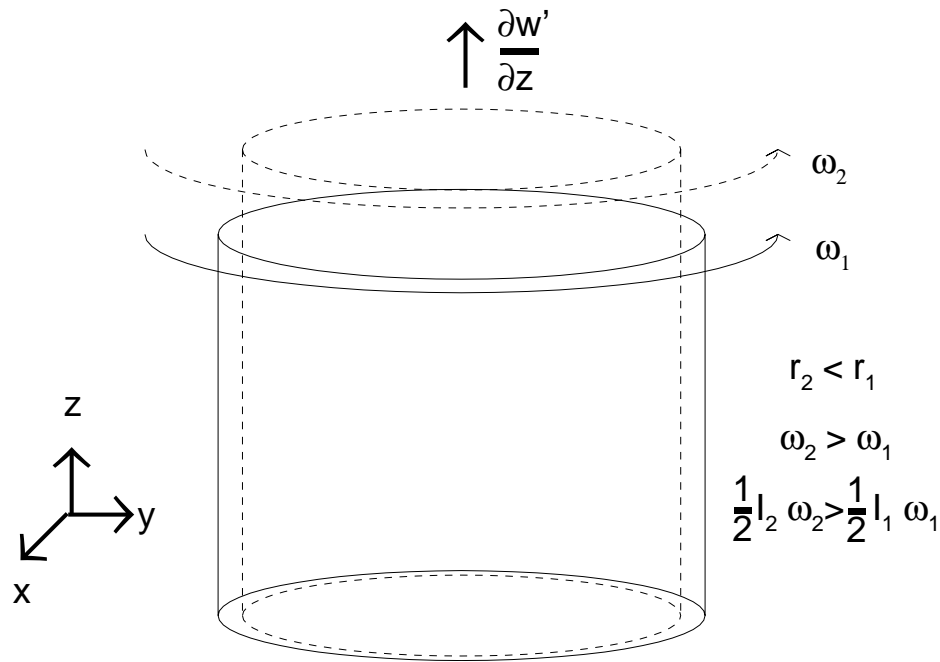
Trascurando l'effetto della viscosità molecolare (e vedremo più oltre perchè ciò è giustificato) possiamo scrivere, chiamato M il momento delle forze agenti sul cilindro rispetto al suo asse:

$$M = \frac{d}{dt}(I\omega) = 0 \quad (1.12)$$

Questa espressione implica che

$$I\omega = \text{cost} \quad (1.13)$$

quindi, in virtù dell'eq. (1.11)

Figure 1.4: Schematizzazione del processo di *vortex stretching*.

$$\omega r^2 = \text{cost} \quad (1.14)$$

Se, come in generale accadrà per effetto delle fluttuazioni, l'elemento di fluido è anche sottoposto ad una trazione in direzione z che ne provoca l'allungamento, la sua sezione deve ridursi, quindi r diminuisce. Allora, dall'eq. (1.14) si vede che la sua velocità angolare aumenta, ed in particolare l'energia cinetica

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \propto \omega^2 r^2 = (\omega r^2)\omega \quad (1.15)$$

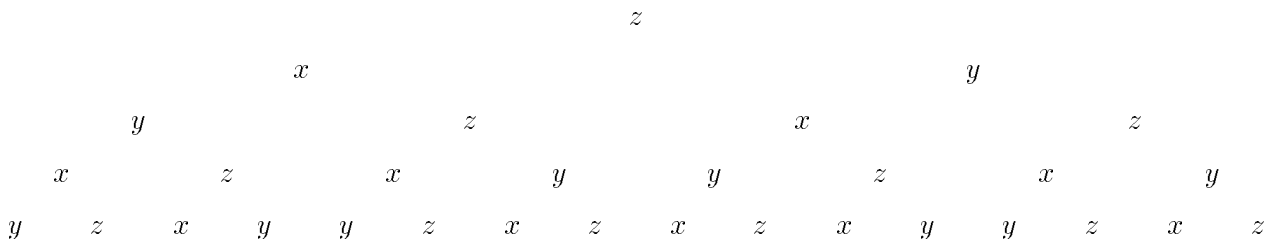
dove sono state utilizzate l'eq. (1.11, 1.14), aumenta. Quindi, lo *stretching* del vortice fa:

1. diminuire la scala del moto;
2. aumentare ω e, di conseguenza, l'intensità delle fluttuazioni u' e v' nel piano ortogonale all'asse del vortice;
3. aumentare l'energia cinetica turbolenta per unità di massa del fluido k .

Le fluttuazioni u' e v' a loro volta causeranno un processo di stretching dei vortici con componenti di vorticità in x ed y , e così via. Quanto detto finora ha quindi due importantissime implicazioni:

- la turbolenza è *sempre* un fenomeno tridimensionale, anche quando il moto *medio* ha una dimensionalità minore;

- man mano che le dimensioni dei vortici si riducono (vedi punto 1 sopra) la turbolenza diviene sempre più isotropa. Questo può essere compreso considerando una sorta di albero genealogico delle direzioni dei vortici generati da un vortice iniziale con asse z :



e così via. Come si vede spostandosi verso il basso (il che vuol dire verso dimensioni dei vortici progressivamente più piccole) la frequenza con cui i simboli x, y, z si ripetono tende ad eguagliarsi: quindi spostandosi verso scale più piccole, la turbolenza sarà sempre più isotropa.

Il processo di stretching dei vortici, con conseguente formazione di vortici sempre più piccoli, potrebbe continuare fino a giungere a dimensioni dell'ordine dei cammini liberi medi delle molecole, se non fosse per l'effetto smorzante della viscosità che, al disotto di una certa dimensione dei vortici, dissipa l'energia cinetica turbolenta in calore. E' questa dimensione minima dei vortici che deve essere considerata come scala rappresentativa per le dimensioni delle celle di calcolo. Chiaramente, possiamo solo ricavarne un ordine di grandezza, data la natura delle considerazioni che andiamo esponendo.

Quindi, attraverso il processo di stretching dei vortici, energia cinetica viene estratta dal moto *medio* e va ad alimentare le fluttuazioni turbolente della velocità; essa viene trasferita dai vortici più grandi a quelli più piccoli attraverso un processo di 'cascata'.

La quantità di energia che va ad alimentare i moti turbolenti non dipende dalla viscosità ma solo dalle caratteristiche su larga scala del moto. La viscosità fissa solo la scala dei più piccoli vortici che possono aversi prima che la dissipazione viscosa diventi dominante. Aumentando il numero di Reynolds Re quest'ultima scala diminuisce.

Cerchiamo ora di quantificare la scala dei vortici più piccoli. Introduciamo a questo fine il tasso di dissipazione viscosa dell'energia cinetica turbolenta (o dissipazione, in breve) ϵ , con il significato di un tasso di decadimento dell'energia cinetica turbolenta k con il tempo (più avanti riportiamo definizioni più rigorose); esso avrà quindi le dimensioni di un'energia cinetica diviso un tempo. I vortici sono iniziati dai moti su larga scala del fluido, che determinano quindi il tasso con cui l'energia cinetica viene trasferita alla turbolenza su scale via via inferiori, finché non si raggiunge una dimensione in corrispondenza alla quale l'energia cinetica turbolenta è dissipata in calore per effetto della viscosità, con un tasso ϵ . Possiamo quindi cercare di stimare l'ordine di grandezza delle dimensioni dei vortici più piccoli imponendo l'eguaglianza tra il tasso con cui l'energia cinetica viene fornita (a scale grandi) ai moti turbolenti, ed il tasso con cui essa viene dissipata nei vortici più piccoli.

Per i moti su grande scala, possiamo identificare una scala delle lunghezze l_I ed una scala delle fluttuazioni di velocità u' dei vortici più grandi, che sono rappresentativi per valutare ϵ come ² (sulla base di considerazioni di puro ordine dimensionale)

$$\epsilon = \left[\frac{k}{t} \right] = \left[\frac{u'^2}{l_I/u'} \right] = \left[\frac{u'^3}{l_I} \right] \quad (1.16)$$

²Le parentesi quadre stanno qui ad indicare le *dimensioni* delle grandezze.

essendo naturale assegnare l'ordine di grandezza dell'energia cinetica turbolenta k come il quadrato dell'intensità delle fluttuazioni di velocità, e il tempo caratteristico t del vortice di dimensioni l_I come l_I/u' . La scala corrispondente ai vortici più grandi viene detta scala integrale.

Per quanto riguarda la dimensione caratteristica l_K dei vortici in corrispondenza ai quali avviene il processo dissipativo, consideriamo che tali dimensioni potranno solo dipendere dal tasso di dissipazione viscosa ϵ e dalla viscosità cinematica ν . Infatti, solo queste due grandezze potranno essere avvertite dai vortici piccoli, che non risentono direttamente invece degli effetti su grande scala. Quindi, in base all'analisi dimensionale deve risultare (avendo ϵ le dimensioni di una lunghezza al quadrato diviso un tempo al cubo, e la viscosità cinematica quelle di una lunghezza al quadrato diviso un tempo)

$$l_K = l_K(\epsilon, \nu) = [\epsilon^\alpha \nu^\beta] = \left[\frac{L^2}{T^3} \right]^\alpha \left[\frac{L^2}{T} \right]^\beta \quad (1.17)$$

dove α e β indicano simbolicamente degli esponenti da determinare affinché il prodotto indicato dia appunto le dimensioni di una lunghezza. Si trova facilmente $\alpha = -1/4$ e $\beta = 3/4$, quindi

$$l_K = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (1.18)$$

che definisce la scala dei vortici più piccoli, detta lunghezza di Kolmogorov. Eguagliando quindi la dissipazione viscosa nell'eq. (1.16) con quella che si può estrarre dall'eq. (1.18), si trova

$$\frac{u'^3}{l_I} = \frac{\nu^3}{l_K^4} \quad (1.19)$$

per cui per il rapporto tra le scale spaziali più piccole e più grandi della turbolenza si ottiene

$$\frac{l_K}{l_I} = \left(\frac{\nu^3}{u'^3 l_I^3} \right)^{1/4} = Re_T^{-3/4} \quad (1.20)$$

dove Re_T indica un numero di Reynolds *della turbolenza*. Quest'ultimo può essere grossolanamente legato al numero di Reynolds Re effettivo (basato cioè su una velocità media ed una dimensione caratteristica del flusso); per esempio nel caso di flusso in un condotto tipicamente l'intensità delle fluttuazioni della velocità è circa il 10% della velocità media, e le dimensioni dei vortici più grossi sono dell'ordine delle dimensioni del condotto stesso. Possiamo quindi dire, come ordine di grandezza, che il numero dei punti necessario a risolvere adeguatamente il campo in direzione x (dato quindi dal rapporto tra una dimensione caratteristica in x e la lunghezza di Kolmogorov, quindi l'inverso dell'eq. 1.20) è dato da

$$N_x = \mathcal{O}(Re^{3/4}) = \mathcal{O}(Re^{0.75}) \quad (1.21)$$

e poichè la turbolenza è un fenomeno tridimensionale, il numero totale di punti di calcolo richiesti nelle tre direzioni coordinate sarà dell'ordine dato dalla

$$N_{xyz} = N_x N_y N_z = \mathcal{O}(Re^{2.25}) \quad (1.22)$$

Un discorso analogo può essere fatto per le scale dei tempi: il tempo caratteristico dei vortici più piccoli è il tempo di Kolmogorov t_K , che per considerazioni di ordine dimensionale analoghe a quelle che hanno portato all'eq. (1.18) risulta

$$t_K = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} \quad (1.23)$$

Il rapporto di t_K al tempo integrale (cioè relativo ai moti su grande scala) è quindi (esprimendo l'ordine di grandezza di ϵ attraverso l'eq. 1.16)

$$\frac{t_K}{l_I/u'} = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} \frac{u'}{l_I} = \left[\sqrt{\frac{\nu}{u' l_I}} \right] = Re_T^{-1/2} \quad (1.24)$$

e quindi, facendo uso delle approssimazioni già introdotte, il numero di passi temporali necessario a risolvere adeguatamente la turbolenza nel tempo risulta essere

$$N_t = \mathcal{O}(Re^{0.5}) \quad (1.25)$$

Quindi complessivamente il numero dei passi temporali e spaziali richiesto cresce con Re come

$$N_{xyzt} = N_{xyz} N_t = \mathcal{O}(Re^{2.75}) \quad (1.26)$$

Il tempo di calcolo necessario può crescere ancora più rapidamente con Re per effetto della struttura dell'algoritmo di soluzione.

Quando si considera che il valore tipico di Re in alcune applicazioni raggiunge valori dell'ordine dei milioni, risulta chiaro che l'integrazione numerica diretta delle equazioni di Navier-Stokes (denominata DNS, Direct Numerical Simulation) nella forma riportata sopra non è una strada percorribile per flussi turbolenti di interesse pratico. Per completare il quadro, si deve notare che al fine di ottenere informazioni statistiche utili dalla DNS l'integrazione numerica deve essere ripetuta un significativo numero di volte (diciamo qualche decina) con condizioni al contorno lievemente cambiate (i flussi ad alto numero di Reynolds sono estremamente sensibili a variazioni anche minime delle condizioni al contorno).

Le considerazioni riportate sopra escludono l'uso della DNS come mezzo per ricavare previsioni di flussi turbolenti ad alto Re con i calcolatori di oggi, come pure con quelli che potranno essere sviluppati nel prevedibile futuro. Occorre quindi abbandonare ogni tentativo di risolvere le equazioni di Navier-Stokes per i valori istantanei delle grandezze; possiamo ottenere tuttavia informazioni statistiche sul campo di moto mediando e risolvendo tali equazioni. Ciò condurrà ad equazioni per il valore *medio* delle varie grandezze e per l'*intensità* delle loro fluttuazioni. Ovviamente, questa informazione è molto inferiore a quella che può essere ottenuta con la DNS, ma questo approccio consente un'enorme riduzione del tempo di calcolo e della memoria richiesti, poichè le scale del moto *medio* sono molto più grandi di quelle delle fluttuazioni turbolente.

1.1.1 Osservazioni sulla notazione.

La notazione che abbiamo usato per designare la decomposizioni di Reynolds non è universalmente accettata. Molti autori designano il valore istantaneo delle grandezze con la tilde, il valore medio con la lettera maiuscola, e la fluttuazione con la minuscola, per cui per esempio la (1.4) diventa

$$\tilde{u} = U + u \quad (1.27)$$

Tale ultima convenzione tuttavia presenta qualche inconveniente per la pressione p e la temperatura T ; per evitare confusione con il termine di produzione (vedi oltre) e con il tempo è allora necessario introdurre le seguenti eccezioni notazionali:

$$\tilde{p} = p + p' \quad (1.28)$$

$$\tilde{T} = T + \theta \quad (1.29)$$

Si noti che la tilde è anche usata, quando si trattano flussi a densità variabile, per denotare la cosiddetta media di Favre [1], che è una media pesata con la densità; in tal caso la fluttuazione è indicata con il doppio apice.

In un'altra notazione (anch'essa prevalentemente, anche se non unicamente, adottata per flussi a densità variabile) la media è indicata tra virgolette, p. es.

$$u = \langle u \rangle + u' \quad (1.30)$$

Da ultimo osserviamo che la convenzione, qui adottata, di restringere gli indici per la sommatoria tensoriale alle sole lettere k ed l non è universalmente osservata; si assume infatti in generale che, qualora in un termine un indice compare in forma ripetuta, sia comunque implicita una sommatoria. Le scale delle lunghezze e dei tempi di Kolmogorov, che abbiamo qui designato come l_K e t_K , sono spesso indicate come η e τ , rispettivamente.

1.2 Approccio statistico.

Al fine di derivare informazioni sulla statistica delle variabili che descrivono il flusso, adottiamo l'approccio usuale di decomporre il valore istantaneo di ogni grandezza dipendente in una componente media ed una fluttuante, sostituirle nelle equazioni di Navier–Stokes e quindi mediare. Per ogni grandezza generica ϕ possiamo quindi scrivere

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (1.31)$$

dove $\bar{\phi}$ è il valore medio, che può essere definito (al tempo t , essendo ΔT un opportuno intervallo, grande rispetto alla scala temporale delle fluttuazioni, sul quale valutare la media) come

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t/2}^{\Delta t/2} \phi(x, t + \tau) d\tau \quad (1.32)$$

e ϕ' la componente fluttuante

$$\phi' = \phi - \bar{\phi} \quad (1.33)$$

Non è stata in generale indicata esplicitamente la dipendenza di ϕ dalle coordinate spaziali e temporali per concisione; inoltre, assumeremo che il valore medio sia indipendente dal tempo (flusso *statisticamente stazionario*) per semplicità, per quanto come detto la situazione in cui il moto medio vari con scale temporali molto più grandi delle scale della turbolenza possa anch'essa essere facilmente trattata.

Se allora introduciamo la decomposizione delle velocità nell'eq. (1.1) di continuità otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k + u'_k) = 0 \quad (1.34)$$

e mediando, tenendo conto che ovviamente il valor medio della fluttuazione è nullo

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.35)$$

Si vede quindi che l'equazione di continuità mediata ha una forma analoga a quella valida per i valori istantanei. Questo risultato è dovuto al fatto che i termini dell'eq. (1.1) sono lineari nelle componenti di velocità. Incidentalmente, osserviamo che sottraendo la (1.35) dalla (1.34) si trova che le componenti fluttuanti della velocità soddisfano anch'esse un'equazione di forma analoga alla (1.1):

$$\frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.36)$$

Vediamo invece quello che succede per l'equazione della quantità di moto, i cui termini convettivi sono nonlineari nelle componenti della velocità. Introducendo in essi la decomposizione di Reynolds si ha:

$$u_k u_i = (\bar{u}_k + u'_k)(\bar{u}_i + u'_i) = \bar{u}_k \bar{u}_i + u'_k \bar{u}_i + \bar{u}_k u'_i + u'_k u'_i \quad (1.37)$$

e mediando

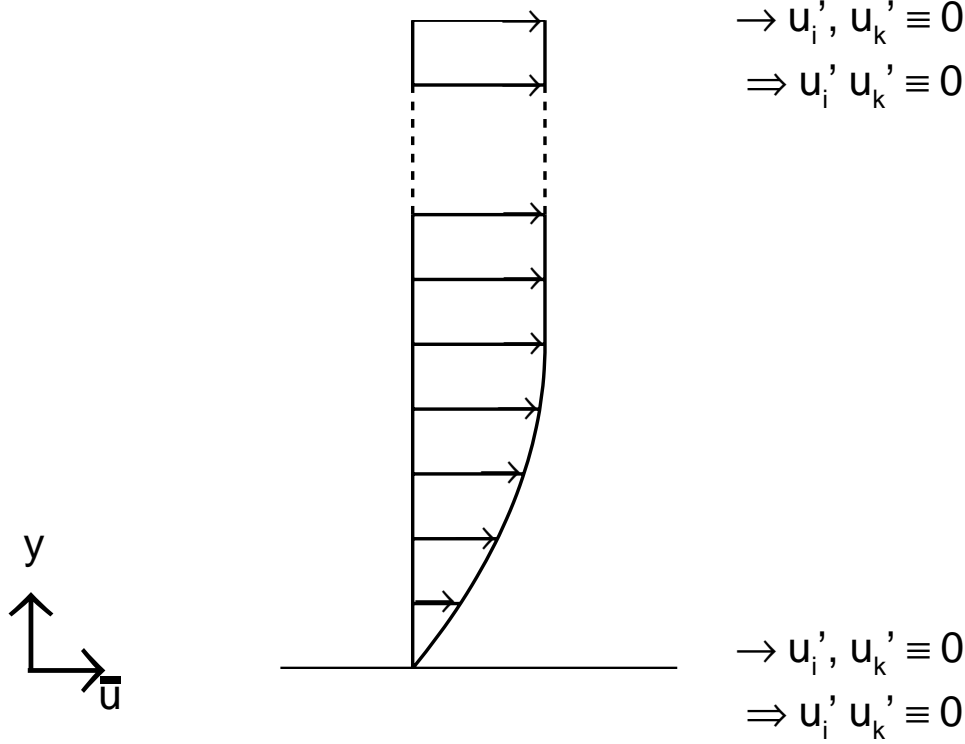
$$\overline{u_k u_i} = \bar{u}_k \bar{u}_i + \overline{u'_k u'_i} \quad (1.38)$$

Si vede quindi che la nonlinearietà dei termini convettivi comporta la nascita di termini aggiuntivi, del tipo $\overline{u'_k u'_i}$, che costituiscono ulteriori incognite del problema. Si osservi che, benché $\bar{u}'_k = 0$ e $\bar{u}'_i = 0$, sarà in generale $\overline{u'_k u'_i} \neq 0$, a meno che le due componenti u_k e u_i fluttuino in maniera completamente indipendente l'una dall'altra, siano cioè come si dice *statisticamente indipendenti o non correlate*, cosa che come vedremo oltre non si verifica.

I termini del tipo $\rho \overline{u'_k u'_i}$ esprimono un flusso della quantità di moto dovuto alle fluttuazioni turbolente, cioè un *trasporto turbolento* della quantità di moto. Questo si può capire facendo riferimento allo *shear layer* schematizzato in Fig. 1.5, che possiamo pensare come un flusso su una lastra piana. Il flusso medio risulta omogeneo nella direzione z , cioè non si hanno gradienti di velocità media in questa direzione (si avranno invece ovviamente gradienti della velocità istantanea in tutte le tre direzioni coordinate). Cerchiamo allora di valutare qual'è l'effetto *globale* dei termini del tipo $\rho \overline{u'_k u'_i}$ sulla quantità di moto che fluisce in direzione x attraverso una sezione normale alla parete. Supponiamo che tale sezione si estenda dalla parete fino ad una grande distanza y_∞ da essa; calcoliamo allora l'effetto globale come l'integrale

$$\int_0^{y_\infty} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} dy = [\overline{u'v'}]_0^{y_\infty} \quad (1.39)$$

Per $y = 0$, cioè alla parete, la velocità (sia media che fluttuante) è ovviamente nulla, per cui $\overline{u'v'} \equiv 0$. Per $y = y_\infty$, cioè a grande distanza dalla parete, la velocità media \bar{u} è certamente non nulla; tuttavia in tale posizione il flusso praticamente non risente più dell'effetto della parete, per cui il flusso è non-turbolento ed ancora $\overline{u'v'} \equiv 0$. L'integrale (1.39) è perciò nullo, per cui il flusso complessivo della quantità di moto nella sezione considerata non è alterato dai termini $\partial \overline{u'v'}/\partial y$. L'unico effetto che tale termine può avere è allora quello di promuovere una redistribuzione spaziale della quantità di moto, senza produrne o distruggerne; è perciò un termine di *trasporto turbolento*. Tale effetto è quindi qualitativamente analogo a quello della viscosità molecolare; si noti inoltre l'analogia formale dei termini $\rho \partial (\overline{u'_k u'_i})/\partial x_k$ con i termini $\partial \tau_{ik}/\partial x_k$ (entrambi derivate spaziali di un tensore). Per tali

Figure 1.5: Trasporto turbolento della quantità di moto in uno *shear layer*.

motivi, i termini in questione sono usualmente raggruppati a secondo membro della (1.40). Essi sono chiamati sforzi di Reynolds ³ (normali quando $i = k$, di taglio quando $i \neq k$).

Allora, l'eq. (1.2) della quantità di moto in forma mediata si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k u'_i}) + g_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.40)$$

dove lo sforzo viscoso (che è lineare nelle velocità, essendo μ costante) mediato è

$$\bar{\tau}_{ik} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.41)$$

Il sistema delle equazioni di Navier-Stokes (in questo caso di flusso a densità costante si riducono alle sole continuità e quantità di moto) in forma mediata comprende dunque 4 equazioni nelle seguenti 10 incognite: $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{p}, \overline{u_1^2}, \overline{u_2^2}, \overline{u_3^2}, \overline{u_1 u_2}, \overline{u_1 u_3}, \overline{u_2 u_3}$. Quindi, tale sistema non è più *chiuso*, cioè vi sono più incognite che equazioni. Il problema della chiusura del sistema delle equazioni di conservazione in forma mediata costituisce il problema fondamentale della turbolenza.

Osserviamo subito che gli sforzi di Reynolds sono molto più grandi (in valore assoluto) dei rispettivi termini (mediati) di diffusione molecolare per flussi ad alto Re . Per dimostrarlo, valutiamo gli ordini di grandezza degli sforzi molecolari mediati e degli sforzi di Reynolds. Per i primi, l'ordine di grandezza del gradiente di velocità media sarà dell'ordine di \bar{u}/D , essendo \bar{u} un valore rappresentativo della velocità media e D una dimensione caratteristica del flusso (per esempio il diametro, nel flusso in un condotto). Allora l'ordine di grandezza dello sforzo molecolare medio risulta

³I termini $\overline{u'_k u'_i}$ sono talvolta designati come sforzi di Reynolds *cinematici*.

$$\bar{\tau}_{ik} = \mathcal{O}\left(\frac{\mu \bar{u}}{D}\right) \quad (1.42)$$

Per lo sforzo di Reynolds, dobbiamo identificare un valore caratteristico dell'intensità delle fluttuazioni di velocità, che come abbiamo detto in un condotto possiamo prendere come circa un decimo di \bar{u} . Allora l'ordine di grandezza dello sforzo di Reynolds sarà qualcosa del genere ⁴

$$\rho \overline{u'_i u'_k} = \mathcal{O}\left(0.001 \rho \bar{u}^2\right) \quad (1.43)$$

Se quindi consideriamo il rapporto tra lo sforzo molecolare medio e quello di Reynolds, il suo ordine di grandezza vale

$$\frac{\bar{\tau}_{ik}}{\rho \overline{u'_i u'_k}} = \mathcal{O}\left(\frac{10^3 \mu}{\rho \bar{u} D}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{10^3}{Re}\right) \quad (1.44)$$

Quindi in flussi ad alto numero di Reynolds ⁵ i termini di sforzo molecolare mediato divengono trascurabili in confronto agli sforzi di Reynolds, e spesso sono del tutto trascurati nelle equazioni del moto mediate. In questa trattazione tuttavia li conserviamo per tener conto di effetti di prossimità alla parete e di condizioni di flusso a numero di Reynolds relativamente basso.

Facciamo notare esplicitamente come il fatto che $\bar{\tau}_{ik}$ sia trascurabile rispetto a $\rho \overline{u'_i u'_k}$ nell'eq. (1.40) non significhi che la viscosità molecolare non giochi alcun ruolo nella turbolenza. Come abbiamo visto infatti, essa è responsabile per la dissipazione dell'energia cinetica turbolenta in calore, che avviene su scale dell'ordine della lunghezza di Kolmogorov.

Torniamo al problema della chiusura del sistema delle equazioni di Navier-Stokes mediate, che richiede dunque un'espressione per gli sforzi di Reynolds. Possiamo tentare di ricavare una espressione per $\overline{u'_i u'_j}$ moltiplicando l'equazione della quantità di moto in i per u'_j e quella in j per u'_i . Per facilitare le successive derivazioni, riscriviamo dapprima la (1.2) esprimendo i termini convettivi spaziali come

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_i) = u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (1.45)$$

dove il secondo termine è identicamente nullo per l'equazione di continuità (1.1); riscriviamo inoltre il termine viscoso come

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (1.46)$$

dove il secondo termine tra parentesi è ancora identicamente nullo per la (1.1). Allora la (1.2) si può riscrivere come ⁶

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + g_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.47)$$

⁴Si noti che $\overline{u'_i u'_k} < \sqrt{\overline{u'^2_k}} \sqrt{\overline{u'^2_i}}$, a meno che u_k e u_i non siano perfettamente correlate (il che avviene comunque nel caso $i = k$); per questo abbiamo preso, a titolo indicativo, $\overline{u'_i u'_k}$ come un decimo del quadrato del valore tipico citato della fluttuazione di velocità.

⁵Si ricordi che in flussi turbolenti $Re > 3000$ ed in molte applicazioni pratiche si arriva a valori dell'ordine dei milioni.

⁶Si noti come la derivata seconda che compare nel termine viscoso sia stata scritta come $\partial^2 u_i / \partial x_k \partial x_k$ anzichè come $\partial^2 u_i / \partial x_k^2$; adottare l'ultima notazione *non* implicherebbe la sommatoria desiderata sulle tre direzioni coordinate, in quanto l'indice k non compare in forma ripetuta.

Moltiplichiamo quindi per u'_j la (1.47), scritta per l'indice i , e per u'_i la (1.47), scritta per l'indice j (dove i e j possono assumere i valori 1, 2, 3):

$$u'_j \frac{\partial u_i}{\partial t} + u'_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{u'_j}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu u'_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + g_i u'_j \quad (1.48)$$

$$u'_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + u'_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{u'_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu u'_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + g_j u'_i \quad (1.49)$$

e poi sommiamo e mediamo. Otteniamo a primo membro i seguenti termini

$$\overline{u'_j \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial u_j}{\partial t}} \quad (1.50)$$

$$\overline{u'_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \quad (1.51)$$

ed a secondo membro

$$-\frac{\overline{u'_j \frac{\partial p}{\partial x_i}}}{\rho} - \frac{\overline{u'_i \frac{\partial p}{\partial x_j}}}{\rho} \quad (1.52)$$

$$\nu \overline{u'_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \nu \overline{u'_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} \quad (1.53)$$

mentre il termine gravitazionale mediato risulta ovviamente nullo (perchè il valore medio della fluttuazione è nullo). Sotto l'ipotesi di flusso statisticamente stazionario, il termine di transiente (1.50) è anch'esso nullo. Cerchiamo di porre gli altri termini in una forma che ne renda più chiaro il significato fisico. Il termine convettivo (1.51) può essere scritto, operando la decomposizione di Reynolds (1.31) per i valori istantanei della velocità, come

$$\begin{aligned} \overline{u'_j u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} &= \overline{u'_j (\bar{u}_k + u'_k) \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_k}} + \overline{u'_i (\bar{u}_k + u'_k) \frac{\partial (\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_k}} \\ &= \overline{\bar{u}_k u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \\ &+ \overline{\bar{u}_k u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \\ &= \overline{\bar{u}_k \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_k \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k}} \end{aligned} \quad (1.54)$$

L'ultimo termine può essere riscritto

$$u'_k \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k} = \frac{\partial u'_i u'_j u'_k}{\partial x_k} - u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u'_i u'_j u'_k}{\partial x_k} \quad (1.55)$$

grazie alla (1.36), per cui complessivamente il termine convettivo dà luogo a

$$\overline{\bar{u}_k \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_k}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} \quad (1.56)$$

Il termine (1.52), a parte il fattore costante $1/\rho$, può essere riscritto come (vedremo più avanti il significato di questa manipolazione; incidentalmente, è anche possibile una differente trattamento [2])

$$\begin{aligned}
-\overline{u'_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \overline{u'_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} &= -\overline{u'_j \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i}} - \overline{u'_i \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_j}} \\
&= -\overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} - \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \\
&= -\overline{\frac{\partial p' u'_j}{\partial x_i}} - \overline{\frac{\partial p' u'_i}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Il termine viscoso si espande come

$$\begin{aligned}
\nu \overline{u'_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \nu \overline{u'_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} &= \nu \overline{u'_j \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_k \partial x_k}} + \nu \overline{u'_i \frac{\partial^2(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_k \partial x_k}} \\
&= \nu \overline{u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \nu \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k}}
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Notiamo che (tralasciamo l'operatore di media, inessenziale per questo sviluppo)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_k \partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \\
&= u'_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_k \partial x_k} + u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} + 2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{1.59}$$

per cui l'intero termine viscoso (1.58) risulta

$$\nu \frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_k \partial x_k} - 2 \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \tag{1.60}$$

La forma mediata della somma delle (1.48,1.49), cioè l'equazione di conservazione per lo sforzo di Reynolds, risulta perciò

$$\begin{aligned}
\overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} &= \\
&= -\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \frac{p'}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_i} + \frac{p'}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} - 2 \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' u'_j}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' u'_i}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k \partial x_k}
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Come si vede in questa equazione di conservazione dello sforzo di Reynolds (che è un momento secondo, o del second'ordine, cioè una media del prodotto di due componenti fluttuanti) appaiono momenti tripli (cioè medie del prodotto di tre componenti fluttuanti) quali $\overline{u'_i u'_j u'_k}$, nonché altri momenti incogniti dovuti all'interazione fra la componente fluttuante della pressione e la velocità (o la sua derivata spaziale, cioè il tensore delle deformazioni), e i termini del tipo $2 \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$. Quindi il tentativo di trovare un'equazione di conservazione per i momenti secondi che appaiono nell'equazione mediata (1.40) della quantità di moto ha prodotto momenti incogniti aggiuntivi del terzo ordine, più altri del second'ordine. Potremmo cercare di derivare un'equazione per i momenti del terz'ordine, ma in essa figurerebbero momenti del quart'ordine, e così via. Si noti in particolare la notevole proliferazione di termini: mentre nelle equazioni per i momenti primi (1.35,1.40) si hanno 6 termini 'non chiusi' (gli sforzi di Reynolds), nelle equazioni per i momenti secondi compaiono (tenendo conto delle simmetrie) 10 momenti tripli incogniti del tipo $\overline{u'_i u'_j u'_k}$, 6 termini pressione-velocità, e 6 termini del tipo $2 \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}$, per un totale quindi di 22 termini non chiusi.

Quindi la derivazione di equazioni di conservazione per i momenti di ordine superiore non porta ad una soluzione del problema della chiusura delle equazioni di Navier–Stokes mediate.

1.3 Equazione dell'energia cinetica turbolenta.

Riprendiamo l'equazione (1.61) per gli sforzi di Reynolds. Osserviamo che la prima parte dei termini che compaiono nello sviluppo (1.57) può essere espressa come

$$-\frac{\overline{\partial p' u'_j}}{\partial x_i} - \frac{\overline{\partial p' u'_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik} \right) \quad (1.62)$$

essendo δ_{mn} l'operatore di Kronocker ($= 0$ per $m \neq n$, $= 1$ per $m = n$). Possiamo allora conglobare il termine nei momenti tripli, il termine (1.62), ed il termine di diffusione molecolare in un'unico termine di *trasporto* che indichiamo globalmente come

$$d_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{\overline{p' u'_i}}{\rho} \delta_{jk} + \frac{\overline{p' u'_j}}{\rho} \delta_{ik} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right) \quad (1.63)$$

Questo rappresenta il trasporto dello sforzo di Reynolds per effetto della turbolenza (e della viscosità molecolare, vedi l'ultimo termine), in analogia a quanto avviene nell'equazione della quantità di moto mediata (1.40), dove lo sforzo di Reynolds rappresenta il trasporto turbolento della velocità media. Ci si può convincere di questo considerando ancora uno *shear layer*, e valutando l'integrale

$$\int_0^{y_\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\overline{u'_i u'_j u'_2} + \frac{\overline{p' u'_j}}{\rho} \delta_{i2} + \frac{\overline{p' u'_i}}{\rho} \delta_{j2} \right) dx_2 = \left[\overline{u'_i u'_j u'_2} + \frac{\overline{p' u'_j}}{\rho} \delta_{i2} + \frac{\overline{p' u'_i}}{\rho} \delta_{j2} \right]_0^{y_\infty} \quad (1.64)$$

che si riconosce facilmente essere nullo, vedi Fig. 1.6. La notazione d_{ij} intende richiamare il fatto che, nei modelli con chiusura sui momenti secondi, tale termine è modellato come un effetto diffusivo. Si noti che mentre i primi tre termini che compaiono nella parentesi della (1.63) sono non chiusi, l'ultimo termine risulta chiuso (in quanto in esso figurano solo la ν , che abbiamo assunto costante, e lo sforzo di Reynolds che è appunto la grandezza per la quale cerchiamo di ricavare un'equazione); esso è tuttavia molto piccolo rispetto agli altri, come si può facilmente intuire per analogia con quanto avviene per il termine di trasporto molecolare nelle equazioni per i momenti primi, vedi (1.44), per cui è molto spesso trascurato del tutto.

Si definisce poi un termine di *produzione*

$$P_{ij} = -\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \quad (1.65)$$

un termine *pressione–deformazione*

$$\phi_{ij} = \frac{\overline{p' \partial u'_j}}{\rho \partial x_i} + \frac{\overline{p' \partial u'_i}}{\rho \partial x_j} \quad (1.66)$$

ed un termine di *dissipazione*

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \quad (1.67)$$

Con queste posizioni, l'equazione per lo sforzo di Reynolds (1.61) si scrive sinteticamente come

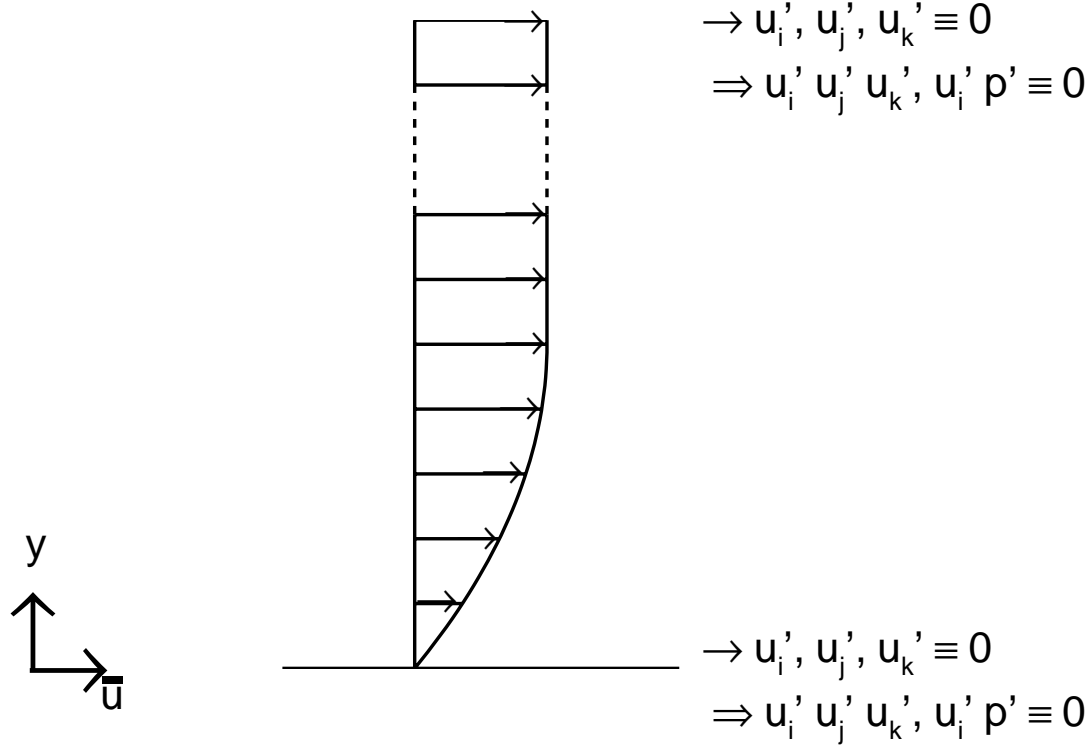


Figure 1.6: Trasporto turbolento dello sforzo di Reynolds in uno *shear layer*.

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = P_{ij} + \phi_{ij} - \epsilon_{ij} + d_{ij} \quad (1.68)$$

Ricaviamo ora da questa un'equazione per l'energia cinetica turbolenta, definita come

$$\bar{k} = \frac{1}{2} (\overline{u'_1 u'_1} + \overline{u'_2 u'_2} + \overline{u'_3 u'_3}) = \frac{\overline{u'_k u'_k}}{2} \quad (1.69)$$

in notazione tensoriale cartesiana. Basterà quindi considerare metà della somma delle tre equazioni che si ottengono dalla (1.68) per $i = j$. Si noti che dalla (1.66) risulta

$$\phi_{kk} = 2 \frac{p'}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_k} = 0 \quad (1.70)$$

per effetto della (1.36). La (1.70) chiarisce il significato dei due differenti contributi in cui abbiamo scisso l'interazione velocità–gradiente di pressione, vedi (1.57). Il termine pressione–deformazione (1.66) è di natura *redistributiva*, in quanto non contribuisce ad aumentare o diminuire l'energia cinetica turbolenta, ma semplicemente la redistribuisce secondo i tre sforzi di Reynolds normali, $\overline{u_1'^2}, \overline{u_2'^2}, \overline{u_3'^2}$; esso cioè influenza l'isotropia della turbolenza. La parte rimanente contribuisce invece al *trasporto turbolento* dello sforzo di Reynolds; esso influenza quindi l'omogeneità spaziale della turbolenza. Definiamo poi

$$P = \frac{P_{ll}}{2} = -\overline{u'_l u'_k} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \quad (1.71)$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon_{ll}}{2} = \nu \overline{\frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k}} \quad (1.72)$$

$$d = \frac{d_{ll}}{2} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{k u'_k} + \frac{\overline{p' u'_k}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{k}}{\partial x_k} \right) \quad (1.73)$$

dove abbiamo utilizzato l'indice l per la sommatoria, per distinguere dall'altro indice di sommatoria k già presente. L'equazione dell'energia cinetica turbolenta può dunque essere scritta sinteticamente

$$\overline{u_k} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x_k} = P - \epsilon + d \quad (1.74)$$

Si noti che, mentre la viscosità molecolare gioca un ruolo trascurabile rispetto al trasporto turbolento, il termine di dissipazione viscosa (1.72) è invece molto importante. Osserviamo infatti che l'ordine di grandezza della divergenza del gradiente dello sforzo di Reynolds (cioè di un valore *medio*, ancorché del prodotto di due componenti fluttuanti) che compare nel termine di trasporto molecolare mediato, vedi (1.41), può essere espresso come rapporto tra un valore rappresentativo dello sforzo, ad esempio un decimo (per tener conto della non perfetta correlazione tra le componenti di velocità fluttuante, vedi nota 4) del valore caratteristico u' al quadrato, diviso una scala integrale delle lunghezze, al quadrato:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = \mathcal{O} \left(\frac{0.1 u'^2}{l_I^2} \right) \quad (1.75)$$

Invece, l'ordine di grandezza del prodotto di gradienti di velocità *fluttuante* che compare nel termine di dissipazione viscosa dell'energia cinetica turbolenta è dato dal rapporto tra un valore tipico della componente fluttuante di velocità, al quadrato, ed una scala delle lunghezze tipica delle fluttuazioni di velocità, cioè la lunghezza di Kolmogorov, al quadrato:

$$\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} = \mathcal{O} \left(\frac{u'^2}{l_K^2} \right) \quad (1.76)$$

Per flussi ad alto numero di Reynolds risulta $l_K \ll l_I$ per cui l'ordine di grandezza della (1.76) è molto maggiore di quello della (1.75). La definizione (1.72) assicura poi che il termine sia sempre positivo (o al più nullo) ⁷.

La grandezza ϵ è chiamata tasso di dissipazione viscosa dell'energia cinetica turbolenta, o semplicemente dissipazione, per concisione; in flussi in cui è presente trasporto scalare viene a volte designata come dissipazione meccanica per distinguerla dalla dissipazione scalare (ad esempio $\frac{2\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k}$ per la temperatura).

Siamo ora in grado di capire il significato dei diversi termini che compaiono nell'equazione dell'energia cinetica turbolenta (1.74) e nell'equazione per lo sforzo di Reynolds (1.68). Il termine d della (1.74) promuove il *trasporto spaziale* dell'energia cinetica turbolenta; il termine in ϵ , sempre negativo, corrisponde nel bilancio di \overline{k} ad una distruzione delle fluttuazioni per effetto della viscosità, su scale dell'ordine di grandezza della lunghezza di Kolmogorov, rappresenta quindi come detto la *dissipazione viscosa* dell'energia cinetica turbolenta (che viene trasformata in calore); il rimanente termine P dovrà allora necessariamente rappresentare la *produzione* di \overline{k} , cioè il meccanismo che estrae energia dal

⁷Per esteso, esso è $\nu \left[\left(\frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u'_1}}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u'_2}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u'_2}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u'_2}}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u'_3}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u'_3}}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u'_3}}{\partial x_3} \right)^2 \right]$

moto medio per incanalarla nei moti turbolenti. Vedremo inoltre, una volta introdotta l'ipotesi di trasporto secondo gradiente, che P è tendenzialmente sempre positivo (può in effetti anche essere negativo, ma questo accadrà solo in regioni molto limitate del flusso), il che conferma la sua natura di termine di produzione.

Per quanto concerne il termine di *produzione* dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta, dalla definizione (1.71) osserviamo che esso si annulla in assenza di gradienti della velocità media. Quindi la turbolenza non può sostenersi in assenza di tali gradienti.

Il termine di *dissipazione* (1.72) ha una struttura particolare rispetto agli altri, in quanto in esso compaiono i quadrati delle derivate della velocità fluttuante, vedi nota 7. Esso quindi non racchiude semplicemente informazioni sul valore delle fluttuazioni in un punto, ma dà indicazioni su come tali componenti fluttuanti variano nell'intorno del punto considerato. Questa particolarità permette di intuire fin da ora che questo termine gioca un ruolo particolare nei modelli di turbolenza, e che risulta il più difficile da modellare.

Per quanto riguarda il termine di *trasporto turbolento* (1.74), osserviamo che esso tende ad una *redistribuzione spaziale* di \bar{k} .

Se passiamo ad analizzare i termini dell'equazione per lo sforzo di Reynolds (1.68), possiamo elaborare considerazioni analoghe sui termini P_{ij} , ϵ_{ij} , d_{ij} , riferite questa volta allo sforzo $\overline{u'_i u'_j}$. Il termine *pressione-deformazione* ϕ_{ij} come detto promuove una *redistribuzione direzionale* delle componenti fluttuanti, avendo traccia ϕ_{kk} nulla per la (1.70), e non potendo quindi influire sul bilancio dell'energia cinetica turbolenta. In parziale analogia con il termine di dissipazione viscosa, anche il termine *pressione-deformazione* contiene informazioni sulla variazione della componente fluttuante nell'intorno del punto considerato, e risulta anch'esso molto difficile da modellare.

1.3.1 Osservazioni sulla notazione.

La notazione che abbiamo adottato per scrivere l'equazione per lo sforzo di Reynolds nella forma sintetica (1.68) è quella comunemente adottata in Europa. Negli USA si preferisce invece indicare il termine d_{ij} come T_{ij} (per richiamare l'idea di *trasporto*). Spesso il termine viene poi scritto come $\partial d_{ijk}/\partial x_k$ (in Europa) oppure $\partial T_{ijk}/\partial x_k$ (negli USA), per renderne più esplicita la struttura. I ricercatori americani (ma anche alcuni europei) adottano poi in genere un differente trattamento [2] per l'interazione velocità-gradiente di pressione, indicando i conseguenti termini come Π_{ij} e π_{ij} , per richiamare il fatto che in questi termini compare la *pressione*.

1.4 Effetto dei termini di trasporto turbolento sul moto globale.

Abbiamo osservato che gli sforzi di Reynolds $\overline{u'_i u'_k}$ non hanno effetto globale sulla quantità di moto che fluisce attraverso una sezione normale alla direzione i , per cui rappresentano necessariamente un effetto di redistribuzione spaziale o, come si usa dire, di trasporto turbolento. Analogamente, il termine nei momenti tripli e nell'interazione pressione-velocità che compare nella (1.63) non contribuisce al flusso globale dello sforzo di Reynolds, ma ne promuove il trasporto turbolento.

Potrebbe allora sembrare, a prima vista, che la turbolenza non influenzi il moto globale. Se consideriamo per esempio il flusso entro un condotto circolare di raggio R , potremmo pensare che la *velocità di massa* del fluido

$$U_i = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r \bar{u}_i dr \quad (1.77)$$

non sia influenzata dai moti turbolenti, e così pure la caduta di pressione, espressa attraverso il gradiente di pressione media. In realtà si può vedere facilmente che non è così, cioè che c è un effetto sul moto globale dovuto però al termine di viscosità molecolare, che è indirettamente alterato dalla turbolenza.

Abbiamo infatti osservato, vedi per esempio la Fig. 1.2, relativa al flusso in un condotto (ancorché i valori di velocità considerati siano quelli istantanei), che in un flusso turbolento il profilo di velocità *media* è alquanto più piatto che in un flusso laminare, almeno nella zona lontana dalle pareti; ciò è appunto dovuto al forte effetto redistributivo spaziale dello sforzo di Reynolds. Vicino alle pareti tuttavia il gradiente di velocità risulta necessariamente estremamente più forte nel caso turbolento che in quello laminare; ci si può convincere di questo osservando che nella Fig. 1.2c lo strato limite risulta talmente sottile da avere spessore minore della linea usata nel disegno per tracciare le pareti. Ciò significa che lo sforzo molecolare mediato (1.41) alla parete è, in valore assoluto, molto più grande che in un flusso laminare, e porta quindi a perdite di pressione molto maggiori.

Per evidenziare il legame tra sforzo viscoso alla parete e caduta di pressione, consideriamo un flusso in un canale, completamente sviluppato, tale cioè che i valori medi di tutte le grandezze non variano lungo l'ascissa x del canale; fa eccezione ovviamente la pressione media, che decresce nella direzione del moto per effetto dell'attrito di parete. Tutte le linee di flusso del moto medio risultano parallele all'asse del canale, per cui la sola componente di velocità media non nulla è quella \bar{u} in direzione x . Inoltre, si può anche vedere che, per flussi a bassa velocità, tutti termini (eccetto quello nel gradiente di pressione, che valuteremo subito dopo) dell'equazione mediata della quantità di moto in direzione y (ortogonale alle pareti del canale) risultano o nulli, oppure di un ordine di grandezza inferiore ai corrispondenti termini dell'analoga equazione in direzione x ; da questo si evince che l'unico termine residuo dell'equazione in y è trascurabile, cioè $\partial \bar{p} / \partial y = 0$ e la pressione varia solo con l'ascissa x . Possiamo allora scrivere l'equazione mediata della quantità di moto in x come (supponiamo che la coordinata x del moto giaccia in un piano orizzontale, così da poter trascurare anche il contributo della forza di gravità)

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{\tau}_{12}}{dy} - \frac{d}{dy} (\overline{u'v'}) \quad (1.78)$$

Se chiamiamo h la larghezza del canale, ed integriamo la (1.78) in direzione y tra la parete ($y = 0$, dove le velocità sono nulle per cui $\overline{u'v'} = 0$), ed il centro del canale ($y = h/2$, dove $\overline{u'v'} = 0$ e $\bar{\tau}_{12} = 0$ per simmetria), si ha

$$0 = -\frac{h}{2} \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} - \frac{1}{\rho} \bar{\tau}_w \quad (1.79)$$

avendo indicato con $\bar{\tau}_w$ il valore di $\bar{\tau}_{12}$ alla parete (w sta per *wall*, parete):

$$\bar{\tau}_w = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (1.80)$$

Dalla (1.79) si ricava il legame tra sforzo viscoso alla parete e caduta di pressione:

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{2}{h} \bar{\tau}_w \quad (1.81)$$

Un'indicazione dell'entità delle perdite di pressione in un condotto circolare possiamo ottenerla dalla ben nota espressione della caduta di pressione in un condotto di lunghezza L e diametro equivalente D_e (definito come quattro volte il rapporto tra sezione di passaggio del fluido e perimetro bagnato; è evidentemente uguale al diametro per condotti circolari):

$$\Delta p = f' \frac{\rho U^2}{2} \frac{L}{D_e} \quad (1.82)$$

dove f' indica il fattore d'attrito di Darcy (incidentalmente, pari a quattro volte il fattore d'attrito di Fanning). Per flussi laminari, f' è legato al numero di Reynolds dalla relazione

$$f' = \frac{64}{Re} \quad (1.83)$$

Per flussi turbolenti, f' è funzione ancora del numero di Reynolds, nonché della rugosità relativa del condotto; per alti valori del numero di Reynolds dipende solo dalla rugosità. Per esempio, per i condotti utilizzati nelle turbomacchine generalmente f' ha valori intorno a 0.02. Possiamo allora valutare il rapporto tra la caduta di pressione che si ha in un flusso turbolento ad alto numero di Reynolds, e l'ipotetica caduta che si avrebbe se, diciamo, potessimo persuadere lo stesso flusso a rimanere laminare, come

$$\frac{f'_{urb}}{f'_{lam}} = \frac{0.02 Re}{64} \simeq 3 \cdot 10^{-4} Re \quad (1.84)$$

Tale rapporto diventa ovviamente molto grande per flussi ad alto numero di Reynolds.

Capitolo 2

Approcci per il trattamento della turbolenza

In questo capitolo diamo una succinta descrizione degli strumenti che possono essere usati per descrivere, dal punto di vista computazionale, i flussi turbolenti. Questi comprendono la DNS (*Direct Numerical Simulation*), la LES (*Large Eddy Simulation*), e la *chiusura sul punto singolo*; quest'ultima si articola in due filoni, l'approccio del trasporto della PDF (*Probability Density Function*), e l'approccio della chiusura sui momenti.

Mentre nella DNS si risolvono effettivamente le equazioni che 'governano' il flusso, in tutti gli altri approcci si ricorre in una certa misura ad ipotesi di modellizzazione. Questo significa che anche la più accurata soluzione numerica non risulterà necessariamente vicina al reale campo di flusso, ma darà invece solo un'approssimazione congetturale dello stesso, la cui validità è ovviamente legata alla bontà delle ipotesi di modellizzazione adottate.

2.1 Direct Numerical Simulation.

L'approccio della DNS ha visto la luce nella prima metà degli anni '80. Con esso si intende risolvere il flusso, nello spazio e nel tempo, fino alle scale più piccole della turbolenza, cioè le scale di Kolmogorov l_K e t_K . Abbiamo visto che il numero di punti spaziali necessari per risolvere la turbolenza è dell'ordine di $Re^{2.25}$; il corrispondente numero di intervalli temporali richiesti cresce invece come $Re^{0.5}$. Si comprende quindi come questo approccio sia attualmente limitato a valori di Re alquanto bassi. Pur con questa limitazione, i requisiti di memoria e di tempo di calcolo, pur utilizzando i più potenti supercalcolatori attualmente disponibili, risultano semplicemente enormi. Per esempio, la simulazione di un flusso entro un cubo ad un numero di Reynolds della turbolenza (basato sulla lunghezza di Taylor λ , che è una scala intermedia tra l_I e l_K) $Re_\lambda = u'\lambda/\nu$ pari a 170, con condizioni periodiche al contorno, ha richiesto [3] circa 134 milioni di nodi di calcolo. L'evoluzione del flusso è stata seguita per un tempo pari a solo un decimo della scala integrale dei tempi t_I ; utilizzando un calcolatore con 512 processori (Caltech Delta, da circa 4 Gflops), il tempo di calcolo necessario è risultato di circa 72 ore.

Nonostante l'enorme sforzo di calcolo richiesto, questo approccio sembrerebbe garantire una soluzione esente da assunzioni di modellizzazione. Mentre questo è vero per flussi idealizzati, come p. es. quello considerato sopra, lo è assai meno per flussi di interesse applicativo. E' possibile infatti vedere che, all'aumentare del numero di Reynolds, l'evoluzione del flusso diventa sempre più sensibile alle condizioni al contorno; una loro pur minima alterazione porta, in flussi ad alto Re , a campi di moto che, allo stesso istante temporale, risulteranno radicalmente differenti, pur con valori medi coincidenti per tutti i fini pratici. Ciò vuol dire che, se vogliamo trarre dalla DNS utili indicazioni su

un flusso di interesse applicativo, dovremo ripetere il calcolo numerose volte (indicativamente, qualche decina di volte), dovremo cioè effettuare numerose *realizzazioni* del nostro esperimento numerico, e considerarne una statistica.

Inoltre, la necessità di adottare schemi di discretizzazione che consentano di limitare al minimo gli errori di discretizzazione (che possono essere importanti a causa degli elevati gradienti dei valori istantanei delle grandezze, vedi p. es. la Fig. 1.2c) porta ad adottare metodi *spettrali*. Questi, mentre funzionano molto bene per flussi idealizzati, sono sfortunatamente poco adatti a trattare geometrie complesse, come quelle che inevitabilmente si verificano in casi di interesse applicativo. Questo è uno dei motivi che contribuisce, almeno per il momento, a limitare studi di questo tipo a flussi p. es. in cubi, con condizioni al contorno periodiche.

Nella Sez. 1.1 le più piccole scale (di Kolmogorov) spaziali e temporali delle fluttuazioni sono state individuate nelle (1.18,1.23). Non è detto tuttavia, in flussi in cui si presentano fenomeni di scambio termico, o reazioni chimiche, che queste siano effettivamente le più piccole scale presenti. Se è presente scambio termico per conduzione, occorrerà considerare le più piccole scale delle fluttuazioni di temperatura, che possono risultare inferiori alle scale di Kolmogorov; se è presente scambio termico per radiazione, è necessario tenere in conto anche i tempi caratteristici di questo meccanismo di scambio termico. Nel caso in cui si verificano reazioni chimiche, occorre prendere in considerazione anche il tempo caratteristico di tali reazioni; per reazioni energetiche, tale tempo è nella maggioranza dei casi abbondantemente inferiore al tempo di Kolmogorov. Quindi il numero di nodi spaziali e passi temporali, necessari per risolvere tutte le scale della turbolenza, può in questi casi essere ancora maggiore di quanto previsto dalle (1.22,1.25).

Da quanto detto si evince che l'applicazione della DNS a flussi di interesse pratico è al di là delle possibilità di qualsiasi calcolatore attualmente esistente, come pure di quelli che potranno essere sviluppati nel *prevedibile* futuro. Ma, anche ammesso che un giorno si possa arrivare ad effettuare tali simulazioni, è lecito domandarsi se l'ipotetico utilizzatore del codice di calcolo sarà in grado di trarre utili indicazioni dalla conseguente enorme massa di risultati, comprendente (indicativamente) bilioni di nodi di calcolo, milioni di passi temporali, e decine di realizzazioni. Verosimilmente egli dovrà limitarsi ad estrarre dai risultati alcuni modesti (in termini di numero di nodi di calcolo, passi temporali, realizzazioni) campioni, e basarsi su di essi per le sue valutazioni.

Abbiamo visto nella Sez. 1.1 che la turbolenza è sempre un fenomeno tridimensionale (anche se il moto *medio* può per esempio essere semplicemente bidimensionale). Talvolta la DNS è utilizzata per calcolare flussi bidimensionali (ipotizzando cioè che non solo il moto medio, ma anche le fluttuazioni avvengano solo su un piano) o assialsimmetrici. Mentre tali calcoli possono avere un qualche valore come studi per mettere a punto tecniche di calcolo, o per ricavare qualche indicazione, occorre osservare che le proprietà di questa ipotetica turbolenza bidimensionale sono sotto certi aspetti opposte a quelle della turbolenza reale (tridimensionale). Infatti, mentre in quest'ultima i vortici più grandi originano vortici sempre più piccoli, fino a raggiungere la scala di Kolmogorov, nella turbolenza bidimensionale i vortici piccoli coalescono per dare vita a vortici sempre più grandi.

Nonostante le sue limitazioni, la DNS rimane uno strumento unico per ricavare informazioni su grandezze non misurabili direttamente, come la dissipazione viscosa ϵ (per misurare la quale occorrerebbe effettuare misure simultanee di velocità istantanea su due punti posti ad una distanza dell'ordine della scala di Kolmogorov). Alcuni risultati della DNS hanno effettivamente contribuito a dare valide indicazioni sul comportamento di tale grandezza, che sono state poi utilizzate in modelli di turbolenza.

2.2 Large Eddy Simulation.

La LES (simulazione dei grandi vortici) è stata sviluppata sin dall'inizio degli anni '70, con l'intento di risolvere le scale dei moti turbolenti fino ad una scala di *cutoff*, abbondantemente più grande della scala di Kolmogorov; il contributo dei moti con scale più piccole della scala di cutoff è modellato. L'interesse dell'approccio risiede nel fatto che, mentre le scale più grandi del moto sono specifiche del particolare flusso considerato (dipendono cioè dalle condizioni al contorno), e devono perciò essere risolte, le scale più piccole presentano caratteristiche di universalità, e possono perciò essere modellate con ragionevoli possibilità di successo.

Il metodo è basato sulla definizione di un'operazione di *filtraggio*, applicata alla generica grandezza ϕ :

$$\tilde{\phi}(x, t) = \int \int \int_D \phi(x', t) G(|x - x'|) dx' \quad (2.1)$$

dove abbiamo indicato con la tilde la variabile filtrata; x rappresenta le tre coordinate cartesiane, ed x' una generica posizione del dominio di calcolo D . G è il filtro, che abbiamo assunto essere una funzione solo della distanza $|x - x'| = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}$. La forma di tale funzione può essere assegnata in diversi modi, più o meno soddisfacenti. Se indichiamo con Δ il lato della generica cella di calcolo (supposto uguale per le tre direzioni coordinate), il filtro può per esempio essere scelto di forma *tophat*:

$$\begin{aligned} G(|x - x'|) &= \frac{1}{\Delta} \quad \text{se } |x - x'| < \frac{\Delta}{2} \\ &= 0 \quad \text{in tutti gli altri casi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

oppure gaussiana:

$$G(|x - x'|) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} \exp\left(-\frac{6 |x - x'|}{\Delta^2}\right) \quad (2.3)$$

o altre ancora. La variabile filtrata racchiude quindi informazioni sulla variabile nell'intera cella di calcolo (filtro *tophat*), o nell'immediata vicinanza di essa (filtro gaussiano, ed altri). Δ è chiamata ampiezza del filtro.

In modo analogo a quanto abbiamo fatto quando abbiamo applicato l'operatore di media alle equazioni di Navier–Stokes, vedi Sez.1.2, è possibile applicare l'operazione di filtro alle stesse equazioni, ottenendo in tal modo le equazioni di Navier–Stokes filtrate. Anche in esse compaiono termini aggiuntivi; quello che corrisponde ad interazioni delle scale piccole (cioè minori di Δ , non risolte) deve essere modellato; si parla di *Sub-Grid Scale (SGS) modelling*.

Poichè l'ampiezza del filtro può essere, per esempio, un centinaio di volte la scala di Kolmogorov, il tempo di calcolo è più contenuto rispetto alla DNS; i tipici requisiti computazionali sono dell'ordine del 5 – 10% di quelli della DNS, quindi ancora molto rilevanti. L'applicabilità della DNS a flussi di interesse pratico è perciò alquanto dubbia. Si noti che è sempre richiesta una soluzione *time-dependent* e tridimensionale, al pari della DNS, anche per flussi statisticamente stazionari, o bidimensionali nella media.

Si noti che nel caso si voglia descrivere un flusso che coinvolge il trasporto di una grandezza scalare che influenzi la densità, l'ampiezza del filtro dovrà essere inferiore a quella della più piccola struttura in cui si abbia una significativa variazione della grandezza scalare stessa. Questa esigenza può risultare

in una notevole limitazione per flussi reagenti, dove spesso la struttura della fiamma risulta molto sottile.

2.3 Chiusura sul punto singolo.

Nella *chiusura sul punto singolo* si cerca di ricavare informazioni sulla statistica del flusso risolvendo le equazioni mediate ricavate nella Sez. 1.2, oppure risolvendo un'equazione per la funzione densità di probabilità; i termini non chiusi sono opportunamente modellati. Se indichiamo con ϕ e ψ due generiche grandezze, l'informazione ricercata viene ottenuta risolvendo equazioni, p. es. (sotto l'ipotesi di flusso statisticamente stazionario), per $\overline{\phi(x)}$, $\overline{\psi(x)}$, $\overline{\phi'^2(x)}$, $\overline{\psi'^2(x)}$, $\overline{\phi'\psi'(x)}$, e simili. In queste espressioni, i termini del tipo $\overline{\phi(x)}$ e $\overline{\psi(x)}$ sono designati come *momenti primi*, mentre i rimanenti come *momenti secondi*; si potrebbero poi considerare momenti tripli, p. es. $\overline{\phi'\psi'^2(x)}$, etc. Dalla conoscenza di queste informazioni statistiche un competente utilizzatore può ricostruire le caratteristiche salienti del flusso turbolento considerato.

Il termine *chiusura sul punto singolo* è utilizzato per distinguere dalla *chiusura su due punti*, in cui si tenta di derivare equazioni per grandezze come

$$\overline{\phi(x)\psi(x^*)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t/2}^{\Delta t/2} \phi(x, t + \tau) \psi(x^*, t + \tau) d\tau \quad (2.4)$$

e simili, da confrontare con la (1.32), dove per semplicità abbiamo adottato l'ipotesi di flusso statisticamente stazionario; x e x^* indicano due punti distinti. Questa seconda categoria di modelli sarebbe in teoria alquanto più potente della prima, in quanto permette di ottenere una massa di informazioni sul flusso molto maggiore (incidentalmente, se i punti x ed x^* sono scelti coincidenti si recuperano i momenti sul punto singolo). Tuttavia i modelli con chiusura su due punti sono attualmente ben lontani da un'applicabilità pratica.

Nei modelli con chiusura sul punto singolo ci si limita invece a derivare equazioni per i momenti sul punto singolo; vedremo tuttavia che sarà necessario fornire ai modelli un surrogato dell'informazione soppressa (nel passaggio da chiusura su due punti a chiusura sul punto singolo), cioè qualcosa che dia una misura di come le grandezze relative alla turbolenza varino nello spazio. Per quanto abbiamo detto nella Sez. 1.3, la dissipazione viscosa ϵ si presta a quest'uso, in quanto contiene informazioni sul valore della *derivata* della componente fluttuante di velocità. In tutti i modelli 'completi' (spiegheremo oltre il significato di questo termine) con chiusura sul punto singolo viene quindi introdotta un'equazione per ϵ (nonostante l'incertezza della sua modellizzazione); nei modelli più semplici invece questa informazione viene fornita specificando 'a sentimento' il valore di un'opportuna grandezza.

Sono stati sviluppati due differenti approcci generali per la chiusura sul punto singolo, basati sul *trasporto della PDF* e sulla *chiusura sui momenti*.

2.3.1 Trasporto della PDF.

E' possibile definire la *funzione densità di probabilità* $P(\phi; x)$, o PDF (*probability density function*), di una generica grandezza ϕ , assumendo che il prodotto $P(\phi; x) d\phi$ indichi la probabilità che, nel punto generico x , la grandezza assuma valori compresi tra $\phi - d\phi/2$ e $\phi + d\phi/2$. Risulterà naturalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\phi; x) d\phi = 1 \quad (2.5)$$

in quanto la probabilità che la grandezza assuma uno qualsiasi dei valori tra $-\infty$ e ∞ è uguale ad uno (cioè l'evento è certo). Se conoscessimo la forma di tale PDF, potremmo allora ricavare attraverso di essa tutti i momenti di qualsiasi ordine della ϕ , per esempio

$$\bar{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi P(\phi; x) d\phi \quad (2.6)$$

$$\overline{\phi^2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\phi - \bar{\phi}(x)]^2 P(\phi; x) d\phi \quad (2.7)$$

$$\overline{\phi^3}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\phi - \bar{\phi}(x)]^3 P(\phi; x) d\phi \quad (2.8)$$

e così via. Quella che abbiamo appena definito è una *PDF ordinaria*, cioè di una singola variabile. E' possibile definire una *PDF congiunta* di più variabili, per esempio per le tre componenti di velocità si può definire una $P(u, v, w; x)$ tale che $P(u, v, w; x) du dv dw$ rappresenti la probabilità che si verifichino simultaneamente, al punto x , le tre condizioni $u - du/2 < u(x, t) < u + du/2$, $v - dv/2 < v(x, t) < v + dv/2$, e $w - dw/2 < w(x, t) < w + dw/2$. Analogamente alla (2.5) risulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(u, v, w; x) du dv dw = 1 \quad (2.9)$$

Dalla conoscenza della PDF congiunta delle componenti di velocità si possono ricavare tutti i momenti di qualsiasi ordine, per esempio

$$\bar{u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) P(u, v, w; x) du dv dw \quad (2.10)$$

$$\overline{u'v'}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u - \bar{u}(x)][v - \bar{v}(x)] P(u, v, w; x) du dv dw \quad (2.11)$$

$$\overline{u'v'w'}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u - \bar{u}(x)][v - \bar{v}(x)][w - \bar{w}(x)] P(u, v, w; x) du dv dw \quad (2.12)$$

e così via. L'approccio si propone di risolvere un'equazione per la PDF congiunta delle variabili di moto, quindi nel caso di flusso inerte a proprietà costanti al quale per il momento limitiamo il nostro interesse, una $P(u, v, w; x)$; la pressione media è invece ottenuta risolvendo una specifica equazione (di Poisson). Naturalmente il problema è come derivare, e risolvere, una simile equazione per la PDF. Questo approccio è stato sviluppato a partire dalla fine degli anni '60 per flussi inerti, e dalla metà degli anni '70 per flussi reagenti (per i quali l'approccio riveste un'interesse particolare, in quanto consente di trattare regimi di combustione che non possono altrimenti essere descritti).

E' comunque possibile derivare un'equazione per la PDF congiunta, nella quale i termini turbolenti risultano essere trattati senza approssimazione (non richiedono cioè modellizzazione), mentre il termine che esprime il trasporto della PDF per effetto della viscosità molecolare deve essere modellato, come pure quello in cui compare la pressione fluttuante. La situazione è in un certo senso opposta a quella che si verifica nella chiusura sui momenti, in cui i termini di viscosità molecolare sono tenuti in conto esattamente, mentre quelli turbolenti devono essere modellati.

Osserviamo che è quindi necessario risolvere solo due equazioni, per la PDF congiunta e la pressione media (Poisson); a queste occorre aggiungere un'equazione per la dissipazione viscosa, per quanto detto nella Sez. 2.3. Un approccio sviluppato più recentemente risolve un'equazione per una PDF congiunta che include anche la dissipazione viscosa, $P(u, v, w, \epsilon; x)$, oltre all'equazione di Poisson.

Nell'equazione per la PDF congiunta, tuttavia, le componenti di velocità u , v , w (ed eventualmente ϵ) compaiono come variabili *indipendenti*, in aggiunta alle coordinate spaziali x , y , z . Infatti, l'equazione della PDF congiunta intende ricavare una probabilità per un punto assegnato (quindi x , y , z) ed inoltre per valori assegnati delle tre componenti di velocità (u , v , w). Quindi, mentre nella risoluzione delle equazioni del moto mediate si hanno (per flussi statisticamente stazionari, altrimenti occorre considerare anche il tempo t) tre variabili indipendenti (le tre coordinate spaziali), nella risoluzione dell'equazione per la PDF congiunta si hanno sei variabili indipendenti (le coordinate spaziali e le componenti di velocità); nel caso in cui si risolva una $P(u, v, w, \epsilon; x)$ si hanno poi sette variabili indipendenti. Nel caso in cui si considerino flussi con trasporto scalare o reagenti, occorre aggiungere le corrispondenti variabili (temperatura o entalpia, frazioni di massa) come ulteriori variabili indipendenti.

Questa elevata *dimensionalità* fa sì che, se la risoluzione dell'equazione della PDF congiunta viene affrontata con strumenti di discretizzazione classici, come p. es. la tecnica delle differenze finite, essa risulta in enormi requisiti di occupazione di memoria e di tempi di calcolo. Se p. es. consideriamo la $P(u, v, w; x, y, z)$, e ci accontentiamo di discretizzare ogni variabile su appena 10 valori, il numero dei nodi di calcolo sarà di 10^6 (contro i 10^3 richiesti nell'approccio ordinario); se discretizziamo ogni variabile indipendente su 100 valori, occorreranno 10^{12} nodi di calcolo (contro 10^6). Per contenere i requisiti di occupazione di memoria e tempo di calcolo sono allora comunemente utilizzati solutori di tipo Monte Carlo, in cui, anziché cercare di ricavare la $P(u, v, w; x, y, z)$ per valori fissati delle variabili indipendenti, attraverso un'evoluzione che conduce alla soluzione stazionaria, si immettono invece nello spazio (u, v, w, x, y, z) un gran numero di *particelle notazionali*, e se ne segue l'evoluzione. Il metodo ha il vantaggio di ridurre enormemente i requisiti computazionali, ma lo svantaggio di rendere assai più difficile il trattamento delle condizioni al contorno implicanti pareti solide. L'applicabilità dell'approccio a geometrie complesse non è pertanto ancora dimostrata, per quanto siano stati compiuti progressi negli ultimi anni.

2.3.2 Chiusura sui momenti.

L'approccio seguito per risolvere flussi di interesse applicativo è quello della *chiusura sui momenti*, in cui si considerano le equazioni mediate ricavate nella Sez. 1.2. I termini non *chiusi* vengono opportunamente modellati, cioè espressi in funzione di grandezze calcolate o loro gradienti, e le conseguenti equazioni modellate sono risolte mediante tecniche numeriche analoghe a quelle standard applicate per le equazioni di Navier–Stokes. Si distinguono *modelli con chiusura sui momenti primi* e *modelli con chiusura sui momenti secondi*.

Nei *modelli con chiusura sui momenti primi* (detti anche *modelli con chiusura al prim'ordine*) si risolvono le equazioni per i momenti primi, cioè l'equazione di continuità mediata (1.35) e le equazioni della quantità di moto mediate (1.40) (per flussi inerti a proprietà costanti). In queste ultime compaiono come termini non chiusi gli sforzi di Reynolds, per i quali occorre quindi sviluppare un modello. Tale modello si servirà di alcune informazioni che possono essere desunte sulla statistica della turbolenza (anch'esse naturalmente sulla base di modelli). Tranne che nei modelli più semplici, tale informazioni sono ricavate risolvendo p. es. un'equazione per l'energia cinetica turbolenta (1.74) (con opportune ipotesi di modellizzazione per esprimere i termini non chiusi), che fornisce quindi informazioni sull'intensità delle fluttuazioni turbolente della velocità, ed eventualmente una seconda equazione (anch'essa, ovviamente, modellata) per ricavare informazioni spaziali sulla turbolenza, per esempio un'equazione per la dissipazione viscosa, vedi Sez. 2.3. Questi modelli in cui sono risolte le equazioni per i momenti primi, ed in aggiunta anche equazioni per \bar{k} e altre quantità, sono occasionalmente designati come *modelli con chiusura sui momenti di ordine uno e mezzo*.

Nei modelli con chiusura sui momenti secondi (detti anche *modelli con chiusura al second'ordine*) si risolvono le equazioni per i momenti primi e secondi, cioè ancora l'equazione di continuità mediata (1.35) e le equazioni della quantità di moto mediate (1.40), ed in più le equazioni per gli sforzi di Reynolds (1.68). In quest'ultime compaiono termini non chiusi, rappresentanti l'interazione pressione–deformazione, il trasporto spaziale dello sforzo stesso, e la dissipazione viscosa, per i quali occorre sviluppare modelli; il termine di produzione non necessita invece in questo contesto di modellizzazione. Lo sforzo computazionale è chiaramente accresciuto, poichè si passa dalla risoluzione di 4 equazioni, più eventualmente altre 2 (come \bar{k} e ϵ), per la chiusura sui momenti primi), a quella di ben 11 equazioni (oltre a quelle per i momenti primi, le equazioni per gli sforzi di Reynolds e la dissipazione viscosa, in generale). Le equazioni, modellate, per i momenti primi hanno in questo caso proprietà differenti da quelle di Navier–Stokes, mentre quelle per i momenti secondi comprendono un gran numero di termini.

Nonostante queste difficoltà, la chiusura sui momenti secondi dà in generale una descrizione significativamente migliore del flusso turbolento. Infatti mentre nella chiusura sui momenti primi sono risolte equazioni ‘esatte’ per i momenti primi stessi, ed i momenti secondi sono modellati, nei modelli con chiusura sui momenti secondi sono invece risolte equazioni ‘esatte’ per i momenti primi e secondi, e sono i momenti tripli (più altri termini come l'interazione pressione–deformazione, e la dissipazione viscosa) a richiedere modellizzazione. Si può enunciare un *principio di influenza recessiva*, che stabilisce che le ipotesi di modellizzazione introdotte sui momenti di ordine superiore risultano influenzare il flusso in maniera molto minore di quanto non facciano quelle introdotte per momenti di ordine più basso.

La stragrande maggioranza dei codici di calcolo per flussi turbolenti contempla solo modelli con chiusura sui momenti primi, sui quali concentreremo inizialmente la nostra attenzione.

Capitolo 3

Modelli lineari con chiusura sui momenti primi

Abbiamo visto nella Sez. 1.2, vedi (1.44), che la turbolenza porta ad un notevolissimo aumento del trasporto della quantità di moto. Per tener conto di questo fenomeno, Boussinesq propose nel 1877 di aggiungere, nell'equazione della quantità di moto, alla viscosità molecolare ν una 'viscosità turbolenta' ν_t . Tuttavia, a differenza della prima, la viscosità turbolenta non è una proprietà del fluido, ma dipende dalle condizioni di flusso considerate. Il ruolo dei modelli con chiusura sui momenti primi si riduce a fornire un'espressione per ν_t . Tali modelli sono anche designati come *modelli con chiusura al prim'ordine*, oppure *eddy viscosity models (EVM)*, o talvolta *Boussinesq viscosity models (BVM)*.

3.1 L'ipotesi di trasporto secondo gradiente.

In questa Sezione cerchiamo di legare gli sforzi di Reynolds a grandezze calcolate (quest'ultime sono ovviamente le tre componenti della velocità media, e la pressione media), o meglio ai loro gradienti spaziali. Questo è l'approccio più semplice per la chiusura fluidodinamica, basato sull'*ipotesi di trasporto secondo gradiente*. Per fornire una giustificazione di questo approccio, consideriamo dapprima lo sforzo di Reynolds di taglio $\overline{u'v'}$ in un canale in flusso (statisticamente) stazionario, essendo u la velocità assiale e v la velocità trasversale. Analizziamo dapprima l'effetto delle fluttuazioni di v . Consideriamo per primo il caso in cui il gradiente trasversale del valore *medio* di u sia negativo (Fig. 3.1a), cioè $(\partial\bar{u}/\partial y) < 0$. Consideriamo una generica ordinata y , alla quale il valor medio di u sia $\bar{u}(y)$. Se una particella fluida posta in y è spostata verso l'alto per effetto di una fluttuazione turbolenta della velocità $v' > 0$, essa si troverà circondata da particelle fluide aventi, *in media*, valori di u minori di $\bar{u}(y)$, perciò essa sarà caratterizzata da una fluttuazione $u' > 0$; di conseguenza risulta un contributo allo sforzo di Reynolds $\overline{u'v'} > 0$. Se invece la particella fluida è spostata verso il basso per effetto di una fluttuazione $v' < 0$, essa sarà circondata da particelle fluide con $u > \bar{u}(y)$, perciò essa darà luogo ad una fluttuazione $u' < 0$, con il risultato che ancora $\overline{u'v'} > 0$. Consideriamo poi il caso di un gradiente trasversale positivo, $(\partial\bar{u}/\partial y) > 0$ (Fig. 3.1b). Ragionamenti secondo le stesse linee mostrano che in questo caso $\overline{u'v'} < 0$, in entrambe le situazioni $v' > 0$ e $v' < 0$.

Dobbiamo poi considerare l'effetto delle fluttuazioni di u , che in modo del tutto analogo si può facilmente vedere (Fig. 3.2) che producono un contributo $\overline{u'v'} > 0$ nel caso di gradiente assiale di \bar{v} negativo, $(\partial\bar{v}/\partial x) < 0$; nel caso opposto, $(\partial\bar{v}/\partial x) > 0$, si trova invece $\overline{u'v'} < 0$.

Queste osservazioni suggeriscono che lo sforzo di Reynolds di taglio $\overline{u'v'}$ può essere tentativamente preso proporzionale alla somma dei gradienti incrociati dei valori *medi* delle componenti di velocità, con segno opposto:

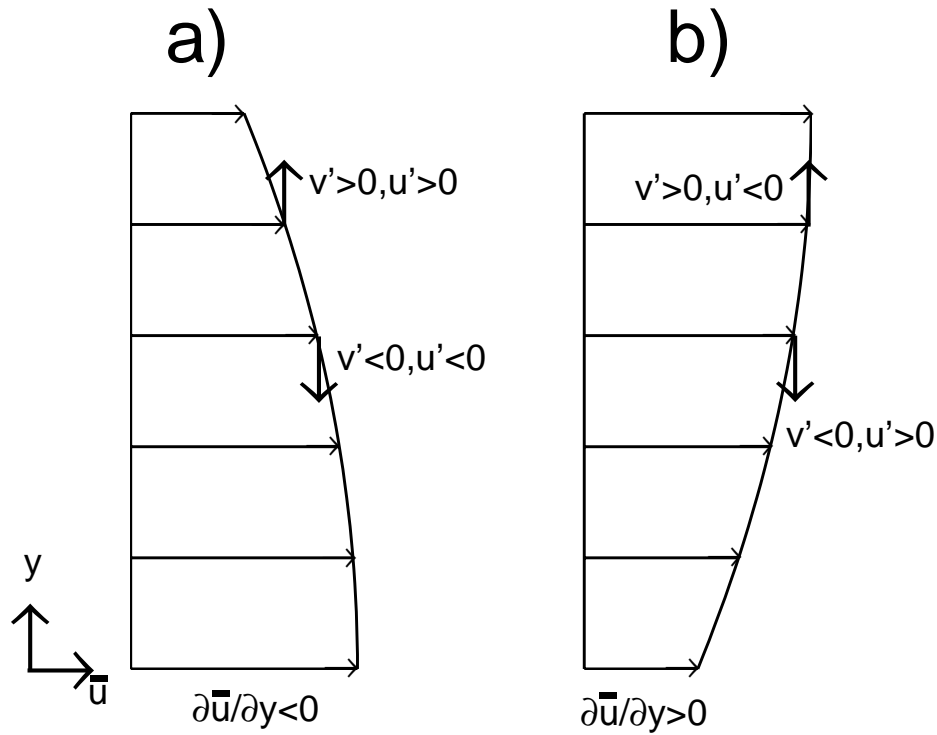


Figure 3.1: Flusso in un canale: a) gradiente trasversale di \bar{u} negativo, b) gradiente trasversale di \bar{u} positivo.

$$\overline{u'v'} \propto - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

Questa ipotesi è basata sull'assunzione che le particelle fluide si muovano come corpi rigidi, che chiaramente non è verificata in flussi reali. Perciò l'assunzione di trasporto secondo gradiente può essere considerata solamente come uno strumento per dare un'espressione di tentativo agli sforzi di Reynolds, piuttosto che una relazione di sicuro affidamento. Notiamo che l'aver assunto proporzionalità (cioè una relazione lineare) tra lo sforzo di taglio di Reynolds ed i gradienti indicati soddisfa sicuramente i vincoli determinati sopra sul segno di $\overline{u'v'}$, rappresenta cioè una condizione sufficiente. Essa non è però una condizione necessaria; altri tipi di relazioni funzionali tra sforzo di taglio di Reynolds e gradienti potrebbero essere ipotizzati, che ancora rispettino i vincoli sul segno.

Rimane il problema di determinare il coefficiente di proporzionalità, che si può vedere che ha le dimensioni di una lunghezza per una velocità (incidentalmente, le stesse di una viscosità cinematica). Possiamo perciò congetturare di definirlo come proporzionale al prodotto di una lunghezza caratteristica l^* del problema per una velocità caratteristica u^* . Risulta allora possibile definire una *viscosità turbolenta* (cinematica) ν_t

$$\nu_t \propto u^* l^* \quad (3.2)$$

ed una viscosità turbolenta dinamica come

$$\mu_t = \rho \nu_t \quad (3.3)$$

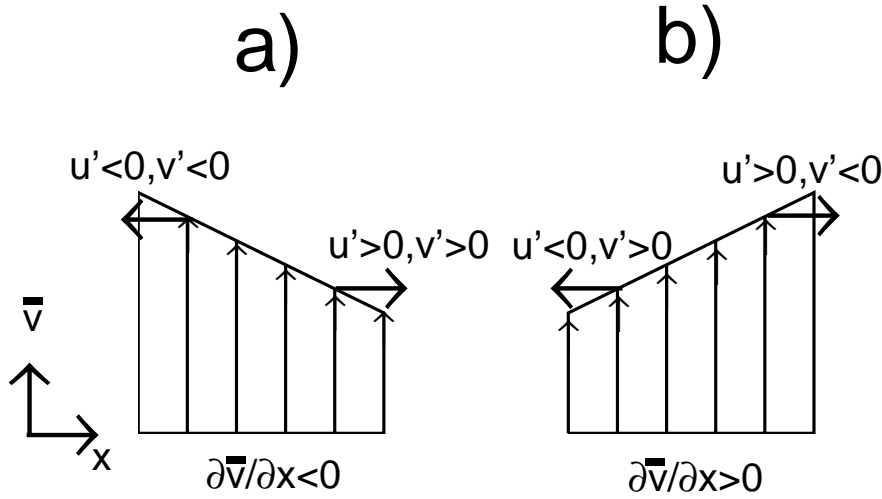


Figure 3.2: Flusso in un canale: a) gradiente assiale di \bar{v} negativo, b) gradiente assiale di \bar{v} positivo.

Vedremo in seguito i problemi associati all'individuazione delle 'scale' della velocità e delle lunghezze u^* ed l^* . Con le definizioni appena date, lo sforzo (cinematico) di taglio di Reynolds può essere scritto

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad (3.4)$$

Questa equazione può essere riscritta in forma tensoriale cartesiana:

$$\overline{u'_k u'_i} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \quad \text{per } i \neq k \quad (3.5)$$

Si noti l'analogia con l'eq. (1.3) degli sforzi molecolari. L'eq. (3.5) tuttavia non può come tale essere applicata per esprimere gli sforzi di Reynolds normali, per la quale darebbe ⁸:

$$\overline{u_i'^2} = -2\nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

in cui il segno del secondo membro dipende dal segno del gradiente di velocità, mentre è evidente che il primo membro deve essere positivo, o al più nullo in assenza di fluttuazioni. Allo scopo di evitare questa eventualità non fisica, ed assicurare inoltre che la somma dei tre sforzi normali di Reynolds ⁹ sia pari a $\overline{u'_k u'_k}$, cioè due volte l'energia cinetica turbolenta, si aggiunge all'eq. (3.5) un ulteriore termine:

⁸La derivata a secondo membro della (3.6) non implica una sommatoria, nonostante gli indici ripetuti, in quanto a tale fine sono riservati gli indici k ed l .

⁹Si noti che la somma dei tre sforzi normali secondo l'eq. (3.6) risulterebbe nulla per l'eq. (1.36).

$$\overline{u'_k u'_i} = -\nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ik} \overline{k} \quad (3.7)$$

che rende questa espressione di applicabilità generale, cioè valida tanto per sforzi tangenziali che normali. δ_{ik} denota il delta di Kronecker. La linearità della (3.7) giustifica il nome dei modelli esaminati in questo capitolo. Nella (3.7) si è implicitamente assunto che

$$\overline{u_1'^2} + 2\nu_t \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_1} = \overline{u_2'^2} + 2\nu_t \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_2} = \overline{u_3'^2} + 2\nu_t \frac{\partial \overline{u}_3}{\partial x_3} = \frac{2}{3} \overline{k} \quad (3.8)$$

cioè che la discrepanza tra la somma delle tre espressioni del tipo (3.6) ed il valore $2\overline{k}$ sia egualmente ripartita fra le tre componenti. Quest'assunzione trova una giustificazione nell'isotropia delle piccole scale (prossime alla scala di Kolmogorov l_K) della turbolenza, vedi Sez. 1.1; occorre però considerare che al valore degli sforzi normali di Reynolds contribuiscono tutte le scale comprese tra la scala integrale l_I e l_K , per cui la condizione (3.8) è verificata solo in modo approssimato. Vedremo che l'ipotesi (3.8) è foriera di notevoli limiti dei modelli lineari.

Allora, con la chiusura sui momenti primi (lineare), l'equazione mediata della quantità di moto può essere riscritta come ¹⁰

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u}_k \overline{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right) \right] + g_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

L'equazione della quantità di moto è spesso scritta in una forma un poco più semplice, definendo la grandezza

$$\overline{p}^* = \overline{p} + \frac{2}{3} \rho \overline{k} \quad (3.10)$$

Questa strada è praticabile perchè (almeno in flussi a bassa velocità, in cui effetti di compressibilità sono esclusi) la natura della pressione nelle equazioni di conservazione è tale per cui essa non richiede la specificazione di condizioni al contorno, e lo stesso vale per \overline{p}^* ; inoltre in questi flussi la pressione non risulta di per sè una variabile di interesse (anche se indirettamente è molto importante, in quanto influenza il moto). Possiamo perciò risolvere un campo, anzichè per \overline{p} , per \overline{p}^* , e scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u}_k \overline{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right) \right] + g_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

Resta il problema di identificare le scale della velocità e delle lunghezze da inserire nell'espressione della viscosità turbolenta. A questo scopo è necessario approfondire l'analogia tra diffusione molecolare e diffusione turbolenta che deriva dall'ipotesi di trasporto secondo gradiente. La diffusione molecolare è dovuta al moto di agitazione termica delle molecole, e la relativa viscosità molecolare risulta proporzionale al prodotto della velocità media delle molecole per il loro cammino libero medio. Nella turbolenza, possiamo pensare che il trasporto di quantità di moto (come pure quelli di energia e specie chimiche che si verificano in flussi con scambio di calore e massa) sia dovuto all'effetto delle fluttuazioni; in questa visione, le molecole sono sostituite da particelle fluide che collidono e quindi scambiano le loro proprietà. Questa analogia mette anche in luce i limiti di questa modellizzazione:

¹⁰Si noti che quando si inserisce la (3.7) nella (1.40), il delta di Kronecker dà un solo termine non nullo, quello per $k = i$.

chiaramente le particelle fluide non sono corpi rigidi che conservano la loro identità, ed inoltre la distanza percorsa nelle fluttuazioni non è trascurabile rispetto alle dimensioni del campo di flusso (come invece si può assumere nella teoria cinetica dei gas, che permette di dare un'espressione agli sforzi molecolari). Tuttavia essa funziona bene in molti casi pratici, perché la viscosità turbolenta può essere identificata con buona approssimazione.

Il ruolo dei modelli di turbolenza del primo ordine si riduce quindi all'identificazione di una scala delle velocità, che può essere intesa come uno scarto quadratico medio delle fluttuazioni di velocità, ed una scala delle lunghezze, che rappresenti una sorta di 'libero cammino medio' percorso da una particella fluida per effetto delle fluttuazioni.

3.2 Modelli lineari a zero equazioni.

Nei modelli di turbolenza più semplici le scale della velocità e della lunghezza sono determinate senza introdurre equazioni di conservazione aggiuntive. Per identificare queste scale facciamo riferimento ad un flusso in un canale, senza ricircolazione (vedi p. es. la Fig. 3.1). Sia y la coordinata trasversale. Se indichiamo con $\sqrt{u'^2}$ lo scarto quadratico medio della velocità, possiamo definire una 'lunghezza di mescolamento' l_m nel modo seguente. Quando una particella fluida è spostata per effetto di una fluttuazione trasversale della velocità di una misura Δy , sia Δu la differenza tra la sua velocità (supposta indisturbata) e quella media del fluido adiacente. La distanza Δy che bisogna coprire, muovendosi in senso trasversale, perché Δu sia pari a $\sqrt{u'^2}$ è appunto la lunghezza di mescolamento l_m , introdotta da Prandtl nel 1925. La velocità caratteristica può allora essere riscritta come

$$u^* = \sqrt{u'^2} = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (3.12)$$

e, prendendo l_m come lunghezza caratteristica, la viscosità turbolenta può essere definita come

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (3.13)$$

Si noti quindi che il coefficiente di proporzionalità previsto dalla (3.2) è qui preso pari all'unità. In flussi semplici, l_m può essere presa come una frazione dell'altezza del canale o del diametro del condotto; essa dipende anche dalla particolare configurazione del flusso (getto, scia, flusso piano, assialsimmetrico, etc.), vedi p. es. [4].

Questo modello per la chiusura fluidodinamica, che esprime la viscosità turbolenta algebricamente, è il più semplice possibile. Modelli di questo tipo sono stati sviluppati da diversi autori [5]; abbastanza diffuso è il modello di Baldwin e Lomax, vedi p. es. [6].

Essi soffrono di limiti in flussi complessi, specie in presenza di ricircolazione, dove diventa molto difficile assegnare una lunghezza di mescolamento. Inoltre, questi modelli non sono in alcun modo in grado di tenere in conto della 'storia' della turbolenza; come si vede infatti dall'eq. (3.13), il valore della viscosità turbolenta dipende linearmente dal valore *locale* del gradiente di velocità media, per cui per esempio in turbolenza dietro una griglia, Fig. 3.3, dove ad una certa distanza dalla griglia stessa i gradienti trasversali di velocità media si annullano, la viscosità turbolenta risulta nulla. Questo significa che, se immettessimo p. es. una goccia di colorante nel flusso, in corrispondenza alla zona dove il gradiente di velocità media si è ormai annullato, questi modelli prevederebbero che il colorante diffonde solo per effetto molecolare (quindi molto piccolo), mentre in realtà la goccia si dissolve rapidamente per effetto della turbolenza residua del flusso (per quanto essa sia in fase

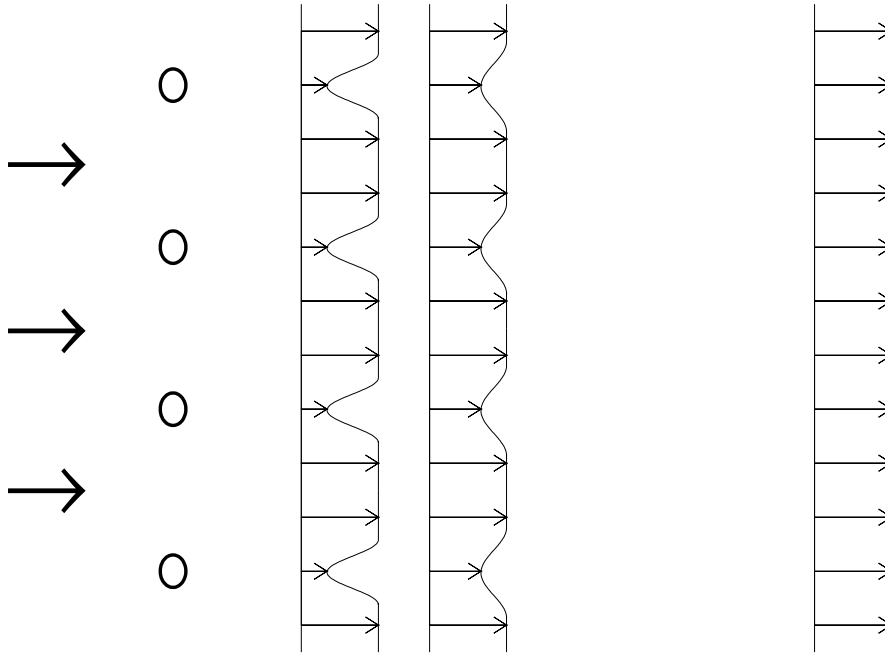


Figure 3.3: Schematizzazione di flusso turbolento dietro una griglia, con profili trasversali della velocità media a varie stazioni assiali.

di decadimento per effetto della dissipazione, essendo nullo il termine di produzione in assenza di gradienti di velocità media). Allo stesso modo, questi modelli non sono in grado di conservare memoria della convezione dei vortici, che fa sì che anche la scala delle lunghezze l^* non sia valutabile semplicemente a livello locale.

Appare quindi evidente che un miglioramento nella descrizione della turbolenza può essere ottenuto introducendo equazioni di conservazione per le grandezze che descrivono la turbolenza (per esempio u^* e l^* , o grandezze ad esse collegate), che quindi permettano di conservare una ‘memoria’ della storia del flusso. A motivo dell’assenza di equazioni per grandezze relative alla turbolenza, i modelli considerati in questa Sezione sono invece denominati ‘modelli a zero equazioni’.

3.3 Modelli lineari ad una equazione.

In questi modelli è risolta, oltre alle equazioni di Navier–Stokes mediate e modellate secondo l’ipotesi di trasporto secondo gradiente (1.35,3.11), un’ulteriore equazione, generalmente per l’energia cinetica turbolenta, la quale permette di ottenere una scala delle velocità come

$$u^* = \sqrt{k} \quad (3.14)$$

Si è quindi introdotta una ‘memoria’ della storia del flusso nella valutazione della scala delle velocità. La scala delle lunghezze deve invece ancora essere specificata empiricamente sulla base di considerazioni *ad hoc*. La viscosità turbolenta, indicando con c'_μ il coefficiente di proporzionalità previsto dalla (3.2), è qui presa pari a

$$\nu_t = c'_\mu \sqrt{\bar{k}} l^* \quad (3.15)$$

L'equazione per l'energia cinetica turbolenta è ricavata a partire dalla (1.74), dove il termine di produzione (1.71) è esprimibile, grazie alla (3.7), come

$$P = \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} \delta_{lk} \bar{k} \right] \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \quad (3.16)$$

Si noti che il termine in δ_{lk} dà contributo nullo per la (1.35). Il termine (1.73), per il suo significato di trasporto dell'energia cinetica turbolenta, può essere modellato mediante un'estensione dell'ipotesi di trasporto secondo gradiente:

$$d = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} \right] \quad (3.17)$$

Il termine in ν è evidentemente il trasporto molecolare di \bar{k} , che è espresso in maniera esatta (cioè non necessita di modellizzazione). Il coefficiente σ_k (dove l'indice k in questo caso, come eccezione, *non* ha il significato di un indice di sommatoria, ma ricorda semplicemente un riferimento alla grandezza \bar{k}) a denominatore di ν_t è stato posto per ricordare che l'energia cinetica turbolenta potrebbe diffondere con una diffusività turbolenta legata a ν_t , ma non esattamente uguale ad essa; ha quindi il significato di un numero di Prandtl turbolento. Peraltro, nella maggior parte dei modelli si pone $\sigma_k = 1.0$. Il termine di dissipazione viscosa è invece modellato attraverso la scala delle lunghezze, sulla base di considerazioni di carattere dimensionale

$$\bar{\epsilon} = c_D \frac{\bar{k}^{3/2}}{l^*} \quad (3.18)$$

dove c_D è un'ulteriore costante. La forma modellata dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta assume quindi la forma

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - c_D \frac{\bar{k}^{3/2}}{l^*} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} \right] \quad (3.19)$$

Si noti che nello *shear layer* considerato nelle Figg. 1.5, 1.6, la (3.7) si riduce sotto l'ipotesi adottata di trasporto secondo gradiente, a

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.20)$$

e quindi il termine di produzione (3.16) si a

$$P = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (3.21)$$

che conferma inequivocabilmente il suo carattere di produzione (essendo sempre positivo).

Altri modelli di questo tipo sono riportati in letteratura, vedi p. es. [7]. Nei paesi dell'ex URSS è invece largamente impiegato un modello in cui si risolve un'equazione per la viscosità turbolenta ν_t stessa. Quest'approccio è stato recentemente riproposto da altri ricercatori [13].

3.4 Modelli lineari a due equazioni.

I modelli a zero e ad un'equazione presentano quindi lo svantaggio che la lunghezza di miscelamento l_m , o la scala delle lunghezze l^* , deve essere valutata 'a sentimento', operazione effettuabile con ragionevoli possibilità di successo solo in configurazioni di flusso particolarmente semplici, ma certamente proibitiva in flussi complessi; non viene inoltre conservata una memoria della convezione della scala delle lunghezze (ed in quelli a zero equazioni, nemmeno della scala delle velocità). Nei modelli a due equazioni, mentre la scala delle velocità è ancora determinata attraverso l'equazione per l'energia cinetica turbolenta (come nei modelli ad un'equazione), la scala delle lunghezze è determinata risolvendo un'ulteriore equazione, per l^* o per una grandezza ad essa collegata, del tipo

$$Z = [\bar{k}]^\alpha [l^*]^\beta \quad (3.22)$$

dove α e β sono esponenti che possono essere assegnati in vario modo. Numerose scelte della seconda variabile sono state proposte, dando luogo ai corrispondenti modelli $k-l$, $k-kl$, $k-\sqrt{k}l$, $k-\epsilon$, $k-\omega$, $k-\tau$. Tra essi quello che ha conosciuto di gran lunga maggiore diffusione è il modello $k-\epsilon$, a causa della relativa semplicità dell'equazione per la seconda variabile, che richiamiamo perciò con maggiore dettaglio.

3.4.1 Il modello $k-\epsilon$ lineare.

Nel modello di turbolenza $k-\epsilon$ (lineare), espresso in forma iniziale in [8] ed in forma consolidata in [9], si adotta come seconda variabile il tasso di dissipazione viscosa dell'energia cinetica turbolenta $\bar{\epsilon}$. Poichè questa grandezza ha le dimensioni di un'energia cinetica diviso un tempo, la scala delle lunghezze può essere ricavata, sulla base di considerazioni di ordine dimensionale, come

$$l^* = \frac{\bar{k}^{3/2}}{\bar{\epsilon}} \quad (3.23)$$

L'equazione di conservazione dell'energia cinetica turbolenta assume allora la forma

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - \bar{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} \right] \quad (3.24)$$

dove sono chiaramente riconoscibili, a secondo membro, i termini di produzione, dissipazione, trasporto (molecolare e turbolento). La viscosità turbolenta risulta, dalle (3.14,3.23), come

$$\nu_t = c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}} \quad (3.25)$$

avendo indicato con c_μ la costante di proporzionalità della (3.2), da determinarsi sperimentalmente. Consideriamo ancora a questo scopo lo strato limite in prossimità di una parete; in queste condizioni l'eq. (3.24) dell'energia cinetica turbolenta si scrive, come vedremo nel Cap. 4, semplicemente come

$$P = \bar{\epsilon} \quad (3.26)$$

Si verifica quindi in questo flusso un'equilibrio tra i termini di produzione e dissipazione dell'energia cinetica turbolenta. Il termine di produzione, che come abbiamo osservato si riduce in questo caso alla (3.21), può anche essere scritto, in base alla (3.20), nella forma

$$P = \frac{\overline{u'v'^2}}{\nu_t} \quad (3.27)$$

L'eq. (3.26), moltiplicata per ν_t , si può allora riscrivere come

$$\overline{u'v'^2} = \nu_t \bar{\epsilon} \quad (3.28)$$

ed esprimendo quindi ν_t secondo l'eq. (3.25)

$$\overline{u'v'^2} = c_\mu \bar{k}^2 \quad (3.29)$$

dalla quale risulta che c_μ è determinabile, per questo particolare tipo di flusso, dalla relazione

$$c_\mu = \left(\frac{\overline{u'v'^2}}{\bar{k}} \right)^2 \quad (3.30)$$

Si trova sperimentalmente che per lo strato limite considerato il modulo del rapporto tra sforzo di taglio di Reynolds ed energia cinetica turbolenta vale circa 0.3, di conseguenza risulta

$$c_\mu = 0.09 \quad (3.31)$$

Avendo introdotto in questo modello la dissipazione $\bar{\epsilon}$ come ulteriore incognita, è necessario ricavare un'equazione di conservazione per questa grandezza. Essa può essere formalmente derivata, e risulta

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} \right) - 2\nu \left(\frac{\partial u'_l}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u'_m}{\partial x_l} \frac{\partial u'_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - 2\nu \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial u'_l}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m} - \\ & - 2\nu \frac{\partial^2 u'_l}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_l}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_k \epsilon'} \right) - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_l}{\partial x_m} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

dove eccezionalmente gli indici tensoriali di sommatoria adottati sono tre, k , l e m , ed ϵ' indica

$$\epsilon' = \nu \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} - \bar{\epsilon} \quad (3.33)$$

Tutti i termini a secondo membro della (3.32), ad eccezione del primo che esprime il trasporto molecolare, risultano essere non chiusi, e richiedono perciò ipotesi di modellizzazione. Tale compito si presenta chiaramente non facile. Osserviamo che i termini più importanti dell'equazione descrivono processi che avvengono alle scale alla quale la dissipazione risulta importante, cioè alla scala di Kolmogorov. Tali processi tuttavia, come osservato nella Sez. 1.1, sono passivi, nel senso che le loro scale si aggiustano per dissipare energia cinetica turbolenta con un tasso che è invece determinato da processi che avvengono su scale grandi, quindi sostanzialmente indipendenti dalla viscosità per la (1.43). La conclusione che si trae è che si può tentare di descrivere l'evoluzione di $\bar{\epsilon}$ attraverso una semplice equazione, modellata sulla base di considerazioni di ordine dimensionale ed intuitive; per una derivazione più dettagliata vedi [10]. Tale equazione comprenderà quindi, oltre ai termini di convezione e trasporto molecolare (che non richiedono modellizzazione), termini di trasporto turbolento, e presumibilmente anche termini di produzione e dissipazione. Si possono ovviamente modellare i termini di trasporto turbolento con l'ipotesi di trasporto secondo gradiente, ottenendo perciò un termine del tipo

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} \right) \quad (3.34)$$

dove ancora σ_ϵ è un coefficiente (presumibilmente prossimo all'unità) destinato a tenere conto del fatto che la diffusività turbolenta della dissipazione può risultare diversa da quella della quantità di moto, per quanto proporzionale a questa. Possiamo poi pensare che l'ipotetico termine di produzione abbia una struttura simile all'analogo termine dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta; per consistenza dimensionale supponiamo che sia proporzionale a P moltiplicato per il rapporto $\bar{\epsilon}/\bar{k}$:

$$c_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} P = c_{\epsilon 1} \nu_t \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \quad (3.35)$$

avendo indicato con $c_{\epsilon 1}$ una costante di proporzionalità, da determinarsi opportunamente. Possiamo seguire una strada analoga per l'ipotetico termine di dissipazione, indicando con $c_{\epsilon 2}$ un'ulteriore costante di proporzionalità da determinarsi:

$$- c_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} \quad (3.36)$$

L'equazione modellata della dissipazione assume perciò la forma

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = c_{\epsilon 1} \nu_t \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - c_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} \right] \quad (3.37)$$

Vediamo come determinare le costanti del modello. In turbolenza dietro ad una griglia (Fig. 3.3) non c'è produzione essendo nulli i gradienti della velocità media (a sufficiente distanza dalla griglia), mentre i termini convettivi e diffusivi sono nulli (quelli in cui figurano derivate rispetto ad y) o molto piccoli (quelli in cui figurano derivate rispetto ad x), per cui sostanzialmente rimane solo il termine di dissipazione; confrontando quindi il decadimento di \bar{k} con x previsto dal modello con dati sperimentali, è possibile stimare che $c_{\epsilon 2}$ deve essere compreso nel range

$$1.8 < c_{\epsilon 2} < 2.0 \quad (3.38)$$

Per ricavare $c_{\epsilon 1}$, si considera lo strato limite in prossimità di una parete, dove sussiste l'eguaglianza tra termini di produzione e dissipazione dell'energia cinetica turbolenta (3.26), ed inoltre vale una legge universale di velocità (vedi Cap. 4), che permette di scrivere

$$c_{\epsilon 1} = c_{\epsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sqrt{c_\mu} \sigma_\epsilon} \quad (3.39)$$

dove il significato della costante κ ($=0.41$) sarà meglio specificato in seguito; da ciò risulta che la differenza tra $c_{\epsilon 1}$ e $c_{\epsilon 2}$ è circa 0.5 (σ_ϵ non è ancora determinato, ma possiamo prevedere sia prossimo ad uno). Abbiamo quindi quasi tutti gli elementi per determinare le costanti del modello: c_μ è già stata determinata, $c_{\epsilon 1}$ e $c_{\epsilon 2}$ sono legate dalle relazioni (3.38,3.39) ed inoltre abbiamo detto che σ_k e σ_ϵ sono presumibilmente vicine all'unità. Per affinare la determinazione dei valori di $c_{\epsilon 1}$, $c_{\epsilon 2}$, σ_k e σ_ϵ gli autori del modello hanno ricorso ad ottimizzazione al calcolatore, confrontando i risultati delle previsioni numeriche generate dal modello con risultati sperimentali relativi a molti casi test, ed hanno dedotto i seguenti valori:

$$c_{\epsilon 1} = 1.44 \qquad c_{\epsilon 2} = 1.92 \quad (3.40)$$

$$\sigma_k = 1.0 \qquad \sigma_\epsilon = 1.3 \qquad (3.41)$$

Talvolta si riportano in letteratura valori di $c_{\epsilon 1}$ e $c_{\epsilon 2}$ lievementi diversi da quelli citati. Questi aggiustamenti sono a volta effettuati per cercare di adattare meglio i risultati numerici a quelli sperimentali in uno specifico caso test, e sono comunque da scoraggiare (l'utilità delle previsioni numeriche risiede nel fatto che esse appunto servono a *prevedere*, pur con i loro limiti, il comportamento del flusso, e non a giustificare *a posteriori* la presunta bontà del modello). Bisogna comunque tener presente che le variazioni di questi due coefficienti devono essere opportunamente bilanciate secondo l'eq. (3.39); alterare uno solo dei coefficienti porta a sensibili variazioni del flusso calcolato. Non ci si può tuttavia attendere una completa universalità delle costanti del modello. Già per semplici flussi assialsimmetrici, privi di ricircolazione, risulta opportuno modificare le espressioni di c_μ e $c_{\epsilon 2}$, secondo il cosiddetto modello $k-\epsilon 1$ [9].

La forma (3.37) adottata per l'equazione del tasso di dissipazione viscosa è estremamente semplice, e ci si può ben attendere che dia prestazioni insoddisfacenti, almeno in certi casi. Tuttavia, i tentativi di modificarla hanno sempre dato luogo ad un peggioramento delle prestazioni del modello, quando queste sono verificate su un'ampia gamma di casi test. Una di queste modifiche per esempio è la forma RNG [11], che è risultata in miglioramenti miracolosi in alcuni casi test, ma in peggioramenti catastrofici in altri.

Capitolo 4

Trattamento dello strato limite

La risoluzione numerica dello strato limite che si forma in prossimità delle pareti pone, per flussi turbolenti, due problemi:

1. nello strato limite si verificano elevatissimi gradienti di velocità, per risolvere i quali sarebbe necessario concentrare un gran numero di nodi della griglia di calcolo in questa regione, peraltro molto sottile;
2. le equazioni dei modelli di turbolenza sono generalmente ricavate sotto l'ipotesi di viscosità molecolare trascurabile in confronto a quella turbolenta, e quindi perdono significato nello strato limite dove invece gli effetti molecolari divengono importanti (vedi oltre).

Allo scopo di evitare questi problemi, nella risoluzione numerica di flussi turbolenti si introduce generalmente un trattamento sintetico dello strato limite, che consente di legare i valori delle grandezze nell'ultimo punto di calcolo del campo (al confine con lo strato limite turbolento) con i valori alla parete mediante leggi 'universali'. Diamo qui gli elementi essenziali per la comprensione di questo trattamento.

4.1 Profili di velocità.

Consideriamo un flusso in un canale di altezza $2h$, completamente sviluppato, per cui la componente trasversale \bar{v} della velocità media è identicamente nulla, ed inoltre sono nulle le derivate di tutte le grandezze in direzione x , fatta eccezione per la pressione. Questo flusso idealizzato risulta utile per lo studio che intendiamo affrontare, perchè nello strato limite in prossimità delle pareti sono appunto verificate le condizioni citate (in particolare velocità diretta parallelamente alla parete) – in flusso statisticamente stazionario.

In queste condizioni l'eq. (1.40) della quantità di moto in forma mediata, si scrive nelle direzioni x ed y (abbandoniamo in questo caso per comodità la notazione tensoriale; assumiamo inoltre che l'origine della coordinata y sia su una delle due pareti) come

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau - \rho \overline{u'v'})}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial(-\bar{p} - \rho \overline{v'^2})}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

Nella prima equazione abbiamo indicato con $\tau = \tau_{12} = \mu(\partial \bar{u}/\partial y + \partial \bar{v}/\partial x) = \mu \partial \bar{u}/\partial y$ lo sforzo molecolare di taglio (si noti invece che $\tau_{11} = 2\mu \partial \bar{u}/\partial x = 0$ e $\tau_{22} = 2\mu \partial \bar{v}/\partial y = 0$). Nella (4.2), per

flussi a bassa velocità, possiamo trascurare $\rho \overline{v'^2}$ rispetto a \bar{p} : infatti il rapporto di questi due termini può essere messo nella forma (indicando con γ il rapporto dei calori specifici)

$$\frac{\rho \overline{v'^2}}{\bar{p}} = \gamma \frac{\overline{v'^2}}{\gamma \bar{p} / \rho} \quad (4.3)$$

Il denominatore del secondo membro rappresenta il quadrato della velocità del suono, quindi questo termine ha il significato di un numero di Mach della turbolenza al quadrato. Per flussi a bassa velocità questo rapporto è perciò sicuramente trascurabile. L'equazione della quantità di moto in y si riduce quindi a

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0 \quad (4.4)$$

indicando cioè che la pressione media è uniforme attraverso lo spessore dello strato limite. Possiamo quindi sostituire la derivata parziale della pressione che compare in (4.1) con una derivata totale, e riscriverla nella forma

$$- \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial(\tau - \rho \overline{u'v'})}{\partial y} = 0 \quad (4.5)$$

Possiamo integrare l'eq. (4.5) tra la parete ($y = 0$) e la generica ordinata y :

$$- y \frac{d\bar{p}}{dx} + \tau - \rho \overline{u'v'} - \tau_w = 0 \quad (4.6)$$

avendo indicato con τ_w lo sforzo d'attrito alla parete (lo sforzo turbolento $\rho \overline{u'v'}$ è evidentemente nullo alla parete, in quanto le velocità si annullano). In particolare per $y = h$ si ha, essendo τ e $\rho \overline{u'v'}$ nulli per simmetria (in quanto cioè $\partial \bar{u} / \partial y = 0$; per convincersi dell'annullarsi dello sforzo turbolento si può ricordare l'ipotesi di trasporto secondo gradiente):

$$- h \frac{d\bar{p}}{dx} - \tau_w = 0 \quad (4.7)$$

quindi il gradiente di pressione può essere espresso come

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = - \frac{\tau_w}{h} \quad (4.8)$$

Sostituendo nell'eq. (4.5) si ha

$$\frac{\tau_w}{h} + \frac{\partial(\tau - \rho \overline{u'v'})}{\partial y} = 0 \quad (4.9)$$

ed integrando in y tra la generica ordinata e l'asse di simmetria, si ottiene l'importante risultato

$$\tau_{tot} = \tau - \rho \overline{u'v'} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (4.10)$$

che mostra come la somma degli sforzi di taglio molecolari e turbolenti (indicata con τ_{tot} , sforzo totale) vari linearmente lungo l'altezza del canale. In particolare, essendo l'altezza dello strato limite trascurabile rispetto all'altezza del canale, lo sforzo totale di taglio può essere considerato praticamente costante nello strato limite. Si noti come questo risultato sia indipendente da ogni ipotesi di modellizzazione della turbolenza.

Abbiamo osservato che lo sforzo turbolento è nullo alla parete, mentre lontano da essa è alquanto più grande dello sforzo molecolare, vedi (1.44). Lo strato limite può quindi essere diviso in due zone, una dove il τ molecolare è prevalente, detta sottostrato laminare (nelle immediate vicinanze della parete), ed una ove lo sforzo di Reynolds è prevalente. Tra le due si troverà una limitata zona dove i due tipi di sforzo sono comparabili.

Trattiamo separatamente le due zone, cominciando dalla zona turbolenta dello strato limite. In essa quindi lo sforzo totale sarà dovuto quasi totalmente alle fluttuazioni turbolente, ma sarà ancora molto vicino al valore alla parete:

$$\tau_{tot} \cong -\rho \overline{u'v'} \cong \tau_w \quad (4.11)$$

Introduciamo per comodità di notazione la *velocità d'attrito*, definita come

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.12)$$

Si noti che questa è l'unica scala della velocità che può essere avvertita dal flusso in prossimità della parete, il quale ovviamente non avverte i valori su grande scala della velocità, come la velocità di massa del fluido, o la velocità sull'asse del canale. Poichè nella parte turbolenta dello strato limite vale la relazione (risultanza sperimentale che è stata usata per valutare c_μ , vedi Sez. 3.4.1)

$$\frac{|\overline{u'v'}|}{\bar{k}} = c_\mu^{1/2} = 0.30 \quad (4.13)$$

una stima di \bar{k} in questa regione può essere presa come, per le (4.11,4.12,4.13)

$$\bar{k} \cong \frac{u_\tau^2}{c_\mu^{1/2}} \quad (4.14)$$

Quindi essa è in prima approssimazione costante entro la parte turbolenta dello strato limite (essa varia con y ma con una scala dell'ordine di h , mentre le velocità variano con una scala dell'ordine dello spessore dello strato limite, quindi molto minore). Allora l'eq. (1.74) dell'energia cinetica turbolenta si riduce, in questa zona dello strato limite, a

$$-\rho \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \bar{\epsilon} = 0 \quad (4.15)$$

che esprime il già citato (vedi Sez. 3.4.1) equilibrio tra produzione e dissipazione. In questa espressione possiamo esprimere lo sforzo di Reynolds attraverso le (4.11,4.12) come

$$-\overline{u'v'} \cong u_\tau^2 \quad (4.16)$$

mentre l'ordine di grandezza di $\bar{\epsilon}$ può essere legato a quello di \bar{k} attraverso la scala delle lunghezze (3.23), che per la (4.14) risulta essere:

$$l^* \cong \frac{\bar{k}^{3/2}}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{c_\mu^{3/4}} \frac{u_\tau^3}{\bar{\epsilon}} \quad (4.17)$$

da cui

$$\bar{\epsilon} \cong \frac{1}{c_\mu^{3/4}} \frac{u_\tau^3}{l^*} \quad (4.18)$$

Se in questa espressione si introduce un'espressione di tentativo per la scala delle lunghezze, allora diventa possibile dall'eq. (4.15) stimare l'andamento del profilo di velocità nella zona turbolenta dello strato limite, esplicitando il gradiente di velocità ed utilizzando (4.16,4.18):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\bar{\epsilon}}{u_\tau^2} = \frac{u_\tau}{c_\mu^{3/4} l^*} \quad (4.19)$$

Si può innanzitutto senz'altro assumere che l^* sia proporzionale alla distanza dalla parete, unica lunghezza significativa nello strato limite; conviene esprimere questo concetto inglobando nella proporzionalità tutto il denominatore della (4.19), essendo c_μ una costante. Possiamo allora porre

$$c_\mu^{3/4} l^* = \kappa y \quad (4.20)$$

dove la costante di proporzionalità κ andrà determinata sperimentalmente. Allora l'eq. (4.19) si riscrive:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau}{\kappa y} \quad (4.21)$$

ed integrando

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log y + \text{cost} \quad (4.22)$$

ed esprimendo in maniera conveniente la costante d'integrazione tramite un'altra costante adimensionale E si ottiene infine il *profilo universale di velocità*, valido nella parte turbolenta dello strato limite:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log (E y^+) \quad (4.23)$$

dove

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad (4.24)$$

è una distanza dalla parete opportunamente adimensionalizzata (tramite le grandezze ν ed u_τ che sono le sole di cui il flusso in prossimità della parete può risentire). Per le costanti si trovano i valori $\kappa = 0.41$ (costante di von Karman) ed $E = 9.0$ (per condotti tubolari lisci; per pareti piane lisce si può adottare $E = 7.4$, per quanto la maggior parte dei codici di calcolo non tengano conto di questa differenziazione) [12]. Nella parte turbolenta dello strato limite si ha quindi un *profilo semilogaritmico di velocità*, con pendenza pari all'inverso della costante di von Karman.

Nel sottostrato laminare, invece, gli sforzi di Reynolds sono trascurabili, per cui dall'equazione della quantità di moto in x si ricava un andamento lineare della velocità (*legge della parete*). Dalla (4.5) si ottiene infatti, esplicitando lo sforzo molecolare e trascurando lo sforzo di Reynolds

$$-\frac{d\bar{p}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0 \quad (4.25)$$

Se supponiamo dapprima che il gradiente di pressione media sia nullo, $d\bar{p}/dx = 0$, la (4.25) dà semplicemente

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0 \quad (4.26)$$

che integrata in y dà

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = c \quad (4.27)$$

avendo indicato con c una costante d'integrazione. Integrando una seconda volta rispetto ad y , e tenendo conto che l'ulteriore costante di integrazione è necessariamente nulla (in quanto rappresenta la velocità alla parete), si ottiene l'atteso andamento lineare:

$$\bar{u} = c y \quad (4.28)$$

Quando poi il gradiente di pressione media risulta essere diverso da zero, alla (4.28) occorre apportare una correzione, la quale però non influisce sostanzialmente sulla natura lineare del profilo di velocità, in quanto i valori di $d\bar{p}/dx$ sono normalmente piuttosto piccoli, in flussi a bassa velocità.

Si può verificare che per $y^+ < 5$ prevale la soluzione lineare, mentre per $y^+ > 15$ prevale quella semilogaritmica, ed in particolare per $y^+ > 30$ il profilo di velocità praticamente coincide con quello universale. Naturalmente quest'ultima soluzione vale solo nella parte turbolenta dello strato limite, per cui non può essere applicata per valori di y^+ superiori a circa 100.

4.2 Applicazione al modello $k-\epsilon$.

La constatazione che nella parte turbolenta dello strato limite la velocità è data da una legge universale suggerisce un mezzo per evitare di integrare le equazioni del moto nello strato limite, superando quindi i problemi citati all'inizio di questa sezione. I valori di \bar{u} , \bar{k} , $\bar{\epsilon}$ nel punto di calcolo adiacente alla parete (che per quanto visto deve essere posizionato in modo tale da rispettare la condizione $30 < y^+ < 100$, approssimativamente) sono legati alla distanza y dalla parete nel modo seguente. Notiamo esplicitamente che il trattamento adottato per lo strato limite sintetico può differire lievemente da codice a codice in alcuni dettagli. Tratteremo dapprima una forma (A) adottata p. es. in alcuni codici di calcolo agli elementi finiti, e poi quella (B) adottata in alcuni codici alle differenze finite utilizzando l'algoritmo di soluzione SIMPLE.

4.2.1 Forma A.

Nella forma (A), dall'eq. (4.23), con i valori di y^+ e \bar{u} aggiornati all'ultima iterazione, si ricava il valore locale di u_τ . Tenendo poi conto che nello strato limite lo sforzo totale risulta praticamente costante, esso si calcola come

$$\tau_{tot} = \tau_w = \rho u_\tau^2 \quad (4.29)$$

per la (4.12). L'eq. (4.29) definisce quindi la condizione al contorno da applicare all'equazione (mediata) per la componente della quantità di moto parallela alla parete; la componente a questa ortogonale è evidentemente nulla:

$$\bar{v} = 0 \quad (4.30)$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica turbolenta, consideriamo che essa per l'eq. (4.13) dapprima cresce avvicinandosi alla parete, nella parte turbolenta dello strato limite, proporzionalmente a $\overline{u'v'}$ (vedi anche le eq. 4.11, 4.10), per poi annullarsi alla parete stessa. Essa avrà quindi un massimo, che risulta essere piuttosto largo e consente di porre la condizione al contorno per \bar{k} nella forma

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial y} = 0 \quad (4.31)$$

Infine, per il tasso di dissipazione viscosa dell'energia cinetica turbolenta, osserviamo che dalle eq. (4.14, 4.18, 4.20) risulta

$$\bar{\epsilon} = \frac{c_\mu^{3/4} \bar{k}^{3/2}}{\kappa y} \quad (4.32)$$

Le condizioni (4.29) – con u_τ ricavato dalla (4.23) – (4.30, 4.31, 4.32) definiscono quindi il trattamento sintetico dello strato limite nella forma (A).

4.2.2 Forma B.

Nella forma (B) invece il profilo universale di velocità viene riscritto esprimendo la velocità d'attrito tramite le (4.11,4.12,4.13) come

$$u_\tau = c_\mu^{1/4} \bar{k}^{1/2} \quad (4.33)$$

per cui il profilo universale di velocità (4.23) si può riscrivere nella forma

$$\bar{u} = \frac{c_\mu^{1/4} \bar{k}^{1/2}}{\kappa} \log \left(\frac{E c_\mu^{1/4} \bar{k}^{1/2} y}{\nu} \right) \quad (4.34)$$

Per l'energia cinetica turbolenta, dalla (4.15) con lo sforzo di taglio di Reynolds espresso in funzione di \bar{k} attraverso la (4.13), si ha

$$\bar{k} = \frac{\bar{\epsilon}}{c_\mu^{1/2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} \quad (4.35)$$

dove il gradiente di velocità è espresso derivando la (4.34). Per la dissipazione viscosa $\bar{\epsilon}$ si adotta ancora la condizione (4.32).

Le condizioni (4.34, 4.30, 4.35, 4.32) definiscono quindi il trattamento sintetico dello strato limite nella forma (B).

Capitolo 5

Flussi con galleggiamento

5.1 Ipotesi di Boussinesq.

In flussi gassosi nei quali si verificano significative variazioni della temperatura T , la densità varia secondo l'equazione termica di stato

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (5.1)$$

dove R è la costante del gas operativo, esprimibile come rapporto tra la costante universale dei gas R^0 ed il peso molecolare W :

$$R = \frac{R^0}{W} \quad (5.2)$$

Incidentalmente, se la composizione chimica del gas operativo non è uniforme, W varierà con essa, e così anche R . Per flussi a bassa velocità, le variazioni di pressione risultano invece assolutamente ininfluenti nella (5.1).

Una trattazione formalmente analoga a quella vista nei capitoli precedenti per flussi a densità costante richiederebbe quindi di riscrivere tutte le equazioni facendo esplicitamente apparire la ρ variabile. Ciò è senz'altro possibile, ed adottando opportuni criteri di media [1] porta ad una semplice formulazione. Tuttavia essa richiede di dare un'espressione alla media della densità, $\bar{\rho}$, cioè di affrontare la cosiddetta *chiusura termochimica*, in aggiunta alla chiusura fluidodinamica già ampiamente discussa. La chiusura termochimica, tramite opportuni modelli, si rende quindi assolutamente necessaria in flussi in cui si verificano forti escursioni di densità, e quindi tipicamente in flussi in cui avvengono fenomeni di combustione. In quest'ultimi, per l'effetto congiunto delle forti escursioni di temperatura e di composizione chimica, si hanno variazioni della densità tipicamente di un ordine di grandezza.

Quando invece le fluttuazioni di densità sono contenute, si può adottare un differente trattamento dei termini di galleggiamento, che consente di evitare di ricorrere a modelli di chiusura termochimica. Tale trattamento garantisce un'ottima approssimazione nei casi in cui l'escursione di densità non superi indicativamente il valore 1.5. Esso è quindi senz'altro applicabile per descrivere il moto dell'aria in ambienti abitativi sottoposti a moderate escursioni termiche (qualche decina di gradi Kelvin al massimo). Questo trattamento, dovuto a Boussinesq, consta nel tener conto esplicitamente degli effetti di galleggiamento nella sola equazione della quantità di moto, scrivendo il termine di forza di volume nell'equazione della quantità di moto (1.2) come

$$g_i \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (5.3)$$

dove ρ_0 è una densità di riferimento, che ha il significato di un valore attorno al quale si verificano moderate escursioni della grandezza in questione. Per l'equazione termica di stato (5.1), il termine di galleggiamento (5.3) può essere riscritto, per gas a composizione costante, per i quali quindi $\rho \propto 1/T$, come

$$g_i \frac{T_0 - T}{T} \simeq -g_i \frac{T - T_0}{T_0} = -\beta_i (T - T_0) \quad (5.4)$$

avendo definito le costanti ($i = 1, 2, 3$)

$$\beta_i = \frac{g_i}{T_0} \quad (5.5)$$

L'equazione della quantità di moto si scrive quindi, per i valori istantanei, come

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} - \beta_i (T - T_0) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.6)$$

Applicando l'operatore di media, è possibile ricavare da questa la forma mediata, che sotto l'ipotesi di flusso statisticamente stazionario introdotta nella Sez. 1.2 risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k u'_i}) - \beta_i (\bar{T} - T_0) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.7)$$

avendo adottato anche per la temperatura l'usuale decomposizione di Reynolds nella forma

$$T = \bar{T} + T' \quad (5.8)$$

L'estensione dei modelli di turbolenza con chiusura sui momenti primi, descritti nel Cap. 3, a flussi in presenza di galleggiamento, comporta due risvolti:

1. come abbiamo visto, i modelli di turbolenza della classe considerata, che possano ritenersi ragionevolmente completi, utilizzano un'equazione per l'energia cinetica turbolenta \bar{k} , ed un'equazione per una seconda variabile, che nel caso del modello $k-\epsilon$ è il tasso di dissipazione viscosa $\bar{\epsilon}$, la cui modellizzazione è fortemente legata all'equazione di \bar{k} stessa. L'equazione per l'energia cinetica è stata ricavata (Sez. 1.3) contraendo l'equazione per gli sforzi di Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ (cioè ponendo $i = j = l$ e sommando rispetto a quest'ultimo indice). L'equazione per gli sforzi di Reynolds era stata a sua volta ricavata dall'equazione per la quantità di moto. Occorre perciò valutare i termini aggiuntivi nell'equazione per gli sforzi di Reynolds, corrispondenti all'introduzione del termine di galleggiamento, quindi effettuare un'operazione analoga per l'equazione per \bar{k} , ed infine studiare le modifiche da apportare alle equazioni modellate per \bar{k} ed $\bar{\epsilon}$;
2. poichè nell'equazione della quantità di moto mediata compare \bar{T} , occorre derivare un'equazione di conservazione per la temperatura media, e modellarne i termini non chiusi.

Questi due problemi sono affrontati nelle due Sezioni che seguono. Per quanto riguarda l'equazione mediata della quantità di moto (5.7), adottando l'ipotesi di trasporto secondo gradiente (3.7), e definendo la \bar{p}^* secondo la (3.10), si ottiene una formula analoga alla (3.11):

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \right] - \beta_i (\bar{T} - T_0) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.9)$$

5.2 Sforzi di Reynolds ed energia cinetica turbolenta.

In modo del tutto analogo a quanto visto nella Sez. 1.2, ricaviamo il contributo del termine di galleggiamento all'equazione di conservazione dello sforzo di Reynolds moltiplicando il secondo membro della (5.4), scritta per l'indice i , per u'_j , ed ancora la (5.4), scritta però per l'indice j , per u'_i . Come al solito, i e j possono assumere i valori 1, 2, 3. Il termine che ne deriva è

$$- \beta_i u'_j (T - T_0) - \beta_j u'_i (T - T_0) \quad (5.10)$$

e decomponendo la T secondo la (5.8)

$$- \beta_i u'_j [(\bar{T} + T') - T_0] - \beta_j u'_i [(\bar{T} + T') - T_0] \quad (5.11)$$

Applicando l'operatore di media, e tenendo conto dell'annullarsi dei termini in cui compare una singola fluttuazione, si ha il termine

$$G_{ij} = -\beta_i \overline{u'_j T'} - \beta_j \overline{u'_i T'} \quad (5.12)$$

da aggiungere alla (1.68) come contributo di *galleggiamento*. L'equazione per gli sforzi di Reynolds si riscrive perciò simbolicamente come

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} - \epsilon_{ij} + d_{ij} \quad (5.13)$$

Ricaviamo ora dalla (5.12) l'analogo termine di galleggiamento per l'equazione per l'energia cinetica turbolenta, ponendo $i = j = l$, sommando sull'indice l e dividendo per 2:

$$G = \frac{G_{ll}}{2} = -\beta_l \overline{u'_l T'} \quad (5.14)$$

L'equazione per l'energia cinetica turbolenta assume quindi, in forma simbolica, la forma

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} = P + G - \epsilon + d \quad (5.15)$$

da confrontare con la (1.74). Il termine G è quindi un termine sorgente dell'equazione per l'energia cinetica, in maniera analoga al termine di produzione P ; per questo è chiamato termine di *produzione per galleggiamento*. L'importanza relativa dei termini di produzione P e G è quantificata attraverso il numero di Richardson (di *flusso* - indicato con l'indice f , per distinguere da un'altra definizione che daremo più avanti)

$$Ri_f = \frac{G}{P} = \frac{\beta_m \overline{u'_m T'}}{\overline{u'_l u'_k} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial \bar{u}_k}} \quad (5.16)$$

dove eccezionalmente abbiamo usato anche m come indice di sommatoria tensoriale.

5.3 Equazione per la temperatura media.

Per ricavare la temperatura, osserviamo che questa è legata all'entalpia dall'equazione calorica di stato (essendo T_{ref} una temperatura di riferimento)

$$h = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p(T) dT \quad (5.17)$$

che in questa forma è valida per gas a composizione costante; essa risulta allora una funzione

$$h = h(T) \quad (5.18)$$

Occorre quindi a rigore risolvere l'equazione di trasporto per l'entalpia, che per i valori istantanei si scrive (sotto l'ipotesi di flusso a bassa velocità, e trascurando lo scambio di calore per radiazione)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k h) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right) \quad (5.19)$$

Nel termine di diffusione molecolare compare il coefficiente di conduzione del calore λ , anch'esso funzione di T . La temperatura, una volta nota h , andrebbe poi ricavata invertendo la (5.18). In realtà, nelle condizioni di applicabilità dell'ipotesi di Boussinesq, l'escursione di temperatura è molto limitata per cui è lecito assumere c_p e λ costanti; dividendo allora la (5.19) per c_p si ottiene direttamente un'equazione per i valori istantanei della temperatura

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k T) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \quad (5.20)$$

Il coefficiente di diffusione molecolare della temperatura è $\lambda/(\rho c_p)$ ed ha un significato analogo a quello di ν nell'equazione della quantità di moto, e ne ha ovviamente le stesse dimensioni. Risulta allora spesso utile introdurre il numero di Prandtl, rapporto tra il coefficiente di diffusione della quantità di moto e della temperatura (a volte indicato con Pr)

$$\sigma = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (5.21)$$

che permette di scrivere il coefficiente di diffusione della temperatura come

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} = \frac{\nu}{\sigma} \quad (5.22)$$

Per i gas (con l'eccezione dell'idrogeno), il numero di Prandtl ha valori tipicamente intorno a 0.7. Se allora si assume $\sigma = \text{cost}$, avendo assunto anche $\nu = \text{cost}$, ne segue che la (5.20) si può riscrivere nella forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k T) = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} \quad (5.23)$$

Mediando, otteniamo l'equazione per la temperatura media

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{T}) = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k T'}) \quad (5.24)$$

nella quale, analogamente a quanto accade nell'equazione mediata della quantità di moto, compare un termine non chiuso, il cosiddetto *flusso di Reynolds*¹¹ $\overline{u'_k T'}$. Per chiudere l'equazione abbiamo quindi bisogno di un'espressione per questo termine. Come visto per l'equazione della quantità di moto, possiamo ricavare un'equazione di conservazione per $\overline{u'_k T'}$, nella quale compariranno tuttavia

¹¹Si usa la dizione di *flusso di Reynolds* anche per altre grandezze scalari, come entalpia e concentrazioni di specie chimiche.

diversi termini da modellare. Quest'approccio è seguito nei modelli con chiusura sui momenti secondi, vedi Sez. 2.3.2. Oppure, più semplicemente, si può adottare l'ipotesi di trasporto secondo gradiente per modellare direttamente il flusso di Reynolds, senza introdurre equazioni di conservazione aggiuntive. Il primo approccio è certo più potente ma alquanto più complesso e costoso (in termini di risorse computazionali necessarie). L'approccio del trasporto secondo gradiente è perciò adottato praticamente da tutti i codici di calcolo correnti. Prima di prenderlo in considerazione, ricaviamo tuttavia l'equazione per il momento secondo $\overline{u'_i T'}$, che risulterà utile per comprendere i limiti della modellizzazione utilizzando la chiusura sui momenti primi.

5.4 Equazione per i flussi di Reynolds.

Riscriviamo dapprima la (5.6) manipolando il termine convettivo secondo la (1.45) ed esplicitando il termine di diffusione molecolare secondo la (1.41,1.47)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} - \beta_i (T - T_0) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.25)$$

e manipolando analogamente il termine convettivo nella (5.23)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} \quad (5.26)$$

Per ricavare un'equazione per il flusso di Reynolds $\overline{u'_i T'}$, moltiplichiamo l'equazione della quantità di moto in direzione i per T' , l'equazione della temperatura per u'_i , mediamo e sommiamo. Allora, il prodotto della (5.25) per T' risulta

$$T' \frac{\partial u_i}{\partial t} + T' u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{T'}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu T' \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} - \beta_i T' (T - T_0) \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.27)$$

e quello della (5.26) per u'_i

$$u'_i \frac{\partial T}{\partial t} + u'_i u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\nu}{\sigma} u'_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} \quad (5.28)$$

Sommando e mediando si hanno a primo membro i seguenti termini

$$\overline{T' \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u'_i \frac{\partial T}{\partial t}} \quad (5.29)$$

$$\overline{T' u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u_k \frac{\partial T}{\partial x_k}} \quad (5.30)$$

il primo dei quali è nullo per l'ipotesi di flusso statisticamente stazionario. A secondo membro si hanno i seguenti termini

$$-\frac{\overline{T' \partial p}}{\rho \partial x_i} \quad (5.31)$$

$$\overline{\nu T' \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{\frac{\nu}{\sigma} u'_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}} \quad (5.32)$$

$$- \beta_i \overline{T'(T - T_0)} \quad (5.33)$$

Per esplicitare il significato dei vari termini, procediamo a manipolazioni analoghe a quelle eseguite nella Sez. (1.2). Per il termine convettivo (5.30) si ha, adottando la decomposizione di Reynolds per u_i e T :

$$\begin{aligned} \overline{u_k T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_k T' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_k T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \overline{\bar{u}_k u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial T'}{\partial x_k}} = \\ \overline{\bar{u}_k \frac{\partial u'_i T'}{\partial x_k}} + \overline{u'_k T' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}} + \overline{u'_k \frac{\partial u'_i T'}{\partial x_k}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

L'ultimo termine può essere riscritto considerando che

$$u'_k \frac{\partial u'_i T'}{\partial x_k} = \frac{\partial u'_i u'_k T'}{\partial x_k} - u'_i T' \frac{\partial u'_k}{\partial x_k} = \frac{\partial u'_i u'_k T'}{\partial x_k} \quad (5.35)$$

per l'equazione di continuità (1.36). Allora il termine convettivo (5.30,5.34) complessivamente dà

$$\overline{\bar{u}_k \frac{\partial u'_i T'}{\partial x_k}} + \overline{u'_k T' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_k T'}}{\partial x_k} \quad (5.36)$$

Il termine (5.31) in cui appare il gradiente di pressione si può riscrivere come

$$- \frac{\overline{T' \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i}}}{\rho} = - \frac{\overline{T' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}}{\rho} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p' T'}}{\partial x_i} + \frac{\overline{p' \frac{\partial T'}{\partial x_i}}}{\rho} = \quad (5.37)$$

Il termine viscoso (5.32) dà

$$\overline{\nu T' \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_k \partial x_k}} + \frac{\nu}{\sigma} \overline{u'_i \frac{\partial^2 (\bar{T} + T')}{\partial x_k \partial x_k}} = \overline{\nu T' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \frac{\nu}{\sigma} \overline{u'_i \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k \partial x_k}} \quad (5.38)$$

Per esplicitarne il significato, consideriamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\nu}{\sigma} u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) = \nu T' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_k} + \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} + \frac{\nu}{\sigma} u'_i \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (5.39)$$

che permette di riscrivere la (5.38) come

$$- \left(\nu + \frac{\nu}{\sigma} \right) \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\nu}{\sigma} u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) \quad (5.40)$$

Manipoliamo l'ultimo termine ponendo

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\nu + \frac{\nu}{\sigma} \right) \quad (5.41)$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\nu - \frac{\nu}{\sigma} \right) \quad (5.42)$$

per cui

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\kappa + \delta) T' \frac{\overline{\partial u'_i}}{\partial x_k} + (\kappa - \delta) u'_i \frac{\overline{\partial T'}}{\partial x_k} \right] = \kappa \frac{\partial^2 \overline{u'_i T'}}{\partial x_k \partial x_k} + \delta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} - \overline{u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_k}} \right) \quad (5.43)$$

Definendo il tasso di dissipazione mista

$$\epsilon_{iT} = \left(\nu + \frac{\nu}{\sigma} \right) \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k}} \quad (5.44)$$

l'intero termine viscoso si può riscrivere come

$$- \epsilon_{iT} + \kappa \frac{\partial^2 \overline{u'_i T'}}{\partial x_k \partial x_k} + \delta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} - \overline{u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_k}} \right) \quad (5.45)$$

dove il secondo termine ha evidentemente il significato di trasporto molecolare dello sforzo di Reynolds (e sarà quindi piccolo in confronto con l'analogo termine turbolento, che vedremo fra breve); il terzo termine è moltiplicato per un coefficiente (5.42) che è molto piccolo per flussi gassosi (in cui come abbiamo osservato σ è prossimo ad uno), per cui può in prima approssimazione essere trascurato in questo contesto.

Infine, il termine di galleggiamento (5.33) dà immediatamente

$$- \beta_i \overline{T' (\overline{T} + T' - T_0)} = - \beta_i \overline{T'^2} \quad (5.46)$$

dove $\overline{T'^2}$ è evidentemente la varianza della temperatura. L'equazione di trasporto del flusso di Reynolds $\overline{u'_i T'}$ può infine scriversi per esteso come

$$\overline{u_k \frac{\partial u'_i T'}{\partial x_k}} = - \overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} + \frac{\overline{p'}}{\rho} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_i} - \epsilon_{iT} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_k T'} + \frac{\overline{p' T'}}{\rho} \delta_{ik} - \kappa \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} \right) \quad (5.47)$$

Possiamo interpretare i termini di questa equazione in modo analogo a quanto visto per l'equazione per gli sforzi di Reynolds (1.68). Il termine a primo membro ha evidentemente il significato di *convezione* del flusso di Reynolds. I primi due termini a secondo membro rappresentano la *produzione* del flusso di Reynolds, che indichiamo con

$$P_{iT} = - \overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} \quad (5.48)$$

e la produzione per *galleggiamento*

$$G_{iT} = - \beta_i \overline{T'^2} \quad (5.49)$$

Notiamo che la produzione (5.48) è dovuta tanto a gradienti di velocità media che di temperatura media. Il terzo termine a secondo membro rappresenta l'interazione *pressione–gradiente di temperatura*, ed è indicato come

$$\phi_{iT} = \frac{\overline{p' \frac{\partial T'}{\partial x_i}}}{\rho} \quad (5.50)$$

Il termine ϵ_{iT} , come citato, ha un significato di *dissipazione*; anticipiamo che esso è praticamente nullo per flussi ad alto numero di Reynolds. Infine, l'ultimo termine della (5.47) rappresenta il *trasporto* del flusso di Reynolds

$$d_{iT} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_k T'} + \frac{\overline{p' T'}}{\rho} \delta_{ik} - \kappa \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} \right) \quad (5.51)$$

In particolare, l'ultimo termine tra parentesi nella (5.51) rappresenta il *trasporto molecolare*, gli altri il *trasporto turbolento*, preponderante come sempre rispetto al primo. In forma simbolica l'equazione per il flusso di Reynolds si scrive allora

$$\overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} = P_{iT} + G_{iT} + \phi_{iT} - \epsilon_{iT} + d_{iT} \quad (5.52)$$

Per i modelli con chiusura sui momenti secondi, il termine convettivo e quello di produzione sono esatti, mentre gli altri devono essere modellati, eccetto il piccolo contributo a d_{iT} dovuto al trasporto molecolare.

5.5 Modelli con chiusura sui momenti primi

Per effettuare la chiusura dell'equazione (5.24) per la temperatura media è dunque necessario fornire un modello per il flusso di Reynolds $\overline{u'_i T'}$. A tale scopo, nell'ambito della modellizzazione con chiusura sui momenti primi, si fa ancora ricorso al modello di trasporto secondo gradiente. Riprendiamo quindi brevemente i concetti già stabiliti nella Sez. 3.1, specializzandoli al caso in esame, facendo ancora riferimento ad un flusso statisticamente in un canale, nel quale sia presente un gradiente di temperatura media in direzione y , vedi Fig. 5.1.

Le fluttuazioni della componente trasversale v della velocità indurranno spostamenti delle particelle fluide verso il basso o verso l'alto, a seconda che siano positive o negative. L'effetto risultante sul flusso di Reynolds dipende dal segno del gradiente di temperatura media. Consideriamo per primo il caso in cui il gradiente trasversale del valore *medio* di T sia negativo (Fig. 5.1a), cioè $(\partial \overline{T} / \partial y) < 0$. Consideriamo una generica ordinata y , alla quale il valor medio di T sia $\overline{T}(y)$. Se una particella fluida posta in y è spostata verso l'alto per effetto di una fluttuazione turbolenta della velocità $v' > 0$, essa si troverà circondata da particelle fluide aventi, *in media*, valori di T minori di $\overline{T}(y)$, perciò essa sarà caratterizzata da una fluttuazione di temperatura $T' > 0$ rispetto al fluido circostante; di conseguenza risulta un contributo al flusso di Reynolds $\overline{v' T'} > 0$. Se invece la particella fluida è spostata verso il basso per effetto di una fluttuazione $v' < 0$, essa sarà circondata da particelle fluide con $T > \overline{T}(y)$, perciò essa darà luogo ad una fluttuazione $T' < 0$, con il risultato che ancora $\overline{v' T'} > 0$. Consideriamo poi il caso di un gradiente trasversale di temperatura media positivo, $(\partial \overline{T} / \partial y) > 0$ (Fig. 5.1b). Ragionamenti secondo le stesse linee mostrano che in questo caso $\overline{v' T'} < 0$, in entrambe le situazioni $v' > 0$ e $v' < 0$.

Queste osservazioni suggeriscono che il flusso di Reynolds $\overline{v' T'}$ può essere tentativamente preso proporzionale al gradiente della temperatura *media*, con segno opposto:

$$\overline{v' T'} \propto -\frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \quad (5.53)$$

A differenza di quanto accade per il modello di trasporto secondo gradiente per gli sforzi di Reynolds, le fluttuazioni di temperatura T' non contribuiscono al flusso di Reynolds, nell'ambito di questa modellizzazione. Il coefficiente di proporzionalità ha ovviamente sempre le dimensioni di una lunghezza per una velocità, cioè le stesse di una viscosità cinematica. Risulta evidente che tale coefficiente di proporzionalità sarà legato a quello che compare nella modellizzazione dei flussi di Reynolds, che abbiamo chiamato viscosità turbolenta ed indicato con ν_t . Possiamo esprimere tentativamente

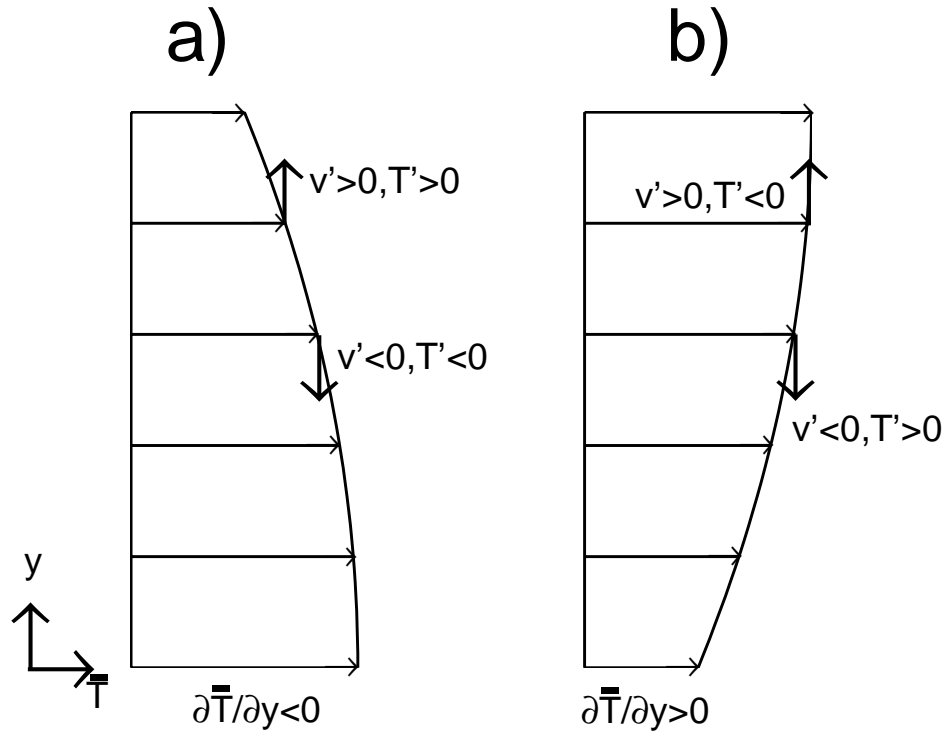


Figure 5.1: Flusso in un canale: a) gradiente trasversale di \bar{T} negativo, b) gradiente trasversale di \bar{T} positivo.

il legame citato imponendo che il coefficiente della (5.53) sia legato a ν_t attraverso un *numero di Prandtl turbolento*, che indichiamo con σ_t , per cui

$$\overline{v'T'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (5.54)$$

Questa equazione può essere riscritta in forma tensoriale cartesiana:

$$\overline{u'_i T'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (5.55)$$

Si noti l'analogia con l'espressione del termine di diffusione molecolare che compare nell'eq. (5.20); inoltre si osservi che la (5.55) indica un modello di trasporto secondo gradiente *lineare*, cioè una relazione lineare tra flusso di Reynolds e gradiente di temperatura. Il numero di Prandtl turbolento è assunto costante, anche se non c'è unanimità sul valore da attribuirgli. Normalmente si assume

$$\sigma_t = 0.7 \quad (5.56)$$

ma alcuni autori preferiscono valori significativamente diversi, come per esempio $\sigma_t = 0.9$, mentre altri suggeriscono di adottare valori di σ_t differenti per flussi piani ed assialsimmetrici. Tali discordanze possono essere viste come un sintomo dei limiti del modello di trasporto secondo gradiente, cioè con chiusura sui momenti primi.

Allora, con la chiusura sui momenti primi (lineare), l'equazione della temperatura media può essere riscritta come

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \right] \quad (5.57)$$

Questa equazione suggerisce un'immediata estensione dei modelli con chiusura sui momenti primi visti nel Cap. 2.3.2 a flussi con galleggiamento. Nei modelli che usano equazioni per grandezze come l'energia cinetica turbolenta, ed il suo tasso di dissipazione viscosa, è però necessarie effettuare alcune lievi modifiche.

5.6 Il modello $k-\epsilon$

Nella Sez. 5.2 si è visto come gli effetti di galleggiamento facciano sorgere nell'equazione per l'energia cinetica turbolenta (5.15) un termine (5.14). In quest'ultimo compare il flusso di Reynolds, che è stato modellato secondo l'ipotesi di trasporto secondo gradiente come indicato dalla (5.55); il termine di galleggiamento modellato allora si scrive

$$G = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \beta_l \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_l} \quad (5.58)$$

dove come al solito l'indice l ripetuto sta ad indicare una sommatoria sulle tre componenti cartesiane. L'equazione di conservazione dell'energia cinetica turbolenta, scritta in forma estesa analoga alla (3.24), assume allora la forma

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \beta_l \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_l} - \bar{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} \right] \quad (5.59)$$

dove sono chiaramente riconoscibili, a secondo membro, i termini di produzione, galleggiamento, dissipazione, trasporto (molecolare e turbolento).

Per quanto riguarda l'equazione per il tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta (3.37), ricordiamo che essa è stata modellata assumendo che i suoi termini di produzione e distruzione fossero proporzionali agni analoghi termini dell'equazione per \bar{k} , moltiplicati per $\bar{\epsilon}/\bar{k}$ ed opportune costanti di proporzionalità. Quando il flusso è affetto da galleggiamento, occorre considerare anche il termine G tra i termini di produzione, per cui la forma modellata si riscrive come

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = c_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \beta_l \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_l} \right] - c_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} \right] \quad (5.60)$$

Alcuni autori [4] ritengono opportuno introdurre nel coefficiente che moltiplica il termine di produzione una dipendenza dal numero di Richardson Ri_f , introdotto nella Sez. 5.2. La forma suggerita per l'equazione della dissipazione viscosa è in questo caso del tipo

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = c_{\epsilon 1} (1 + c_{\epsilon 3} Ri_f) \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \beta_l \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_l} \right] - c_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} \right] \quad (5.61)$$

Non esiste tuttavia unanimità sul valore da attribuire alla costante di modellizzazione $c_{\epsilon 3}$, ed anzi diversi autori suggeriscono che essa debba essere prossima a zero. Per tali motivi, la forma (5.60) è generalmente preferita alla (5.61).

Incidentalmente, si noti che il numero di Richardson di flusso (5.16) è un rapporto che, quando i termini P e G sono espressi attraverso l'ipotesi di trasporto secondo gradiente (3.16,5.58), è dato da

$$Ri_f = \frac{G}{P} = \frac{\beta_m \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_m}}{\sigma_t \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}} \quad (5.62)$$

Il numero di Richardson espresso secondo la (5.62) risulta più facile da misurare che non quello espresso nella forma originaria, essendo ridotta ad un rapporto di gradienti. Si introduce allora un numero di Richardson di gradiente, definito semplicemente come (traendo vantaggio dal fatto che il numero di Prandtl turbolento è assunto costante, e per di più prossimo ad uno)

$$Ri_g = \frac{\beta_m \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_m}}{\left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}} \quad (5.63)$$

Riassumendo, l'applicazione del modello $k-\epsilon$ ad un flusso con galleggiamento implica la risoluzione dell'equazione di continuità mediata (1.35), delle equazioni della quantità di moto nella forma (5.9), dell'equazione per la temperatura media (5.57), e delle equazioni per l'energia cinetica turbolenta ed il suo tasso di dissipazione viscosa nelle forme (5.59,5.60), rispettivamente. La viscosità turbolenta è ancora data dalla (3.25), mentre il numero di Prandtl turbolento σ_t è generalmente preso come stabilito dalla (5.56).

Capitolo 6

Strato limite termico

6.1 Particolarità dello strato limite termico

Vogliamo determinare se è possibile estendere il trattamento dello strato limite riportato nel Cap. 3.4.1 al caso dello strato limite termico, cioè alla sottile regione che si forma in prossimità di una parete solida caratterizzata da una temperatura differente da quella del fluido che la lambisce. In questa regione si hanno elevati gradienti di temperatura, i quali richiedono di concentrarvi un gran numero di nodi della griglia di calcolo, quindi un sensibile sforzo computazionale.

Un trattamento di questo tipo è possibile, ed è effettivamente utilizzato, tuttavia si presenta meno affidabile di quello visto nel Cap. 3.4.1, per la differente natura dello strato limite termico. Ricordiamo infatti che lo studio dello strato limite è stato impostato a partire dalla nozione di flusso completamente sviluppato, tale cioè che tutte le grandezze (eccetto la pressione) variano solo nella direzione y ortogonale alla parete solida. Questa condizione è di difficile realizzazione per lo strato limite termico. Se infatti la parete scambia calore con il gas, la temperatura di quest'ultimo necessariamente cresce, o diminuisce, nella direzione x parallela alla parete, a meno di non considerare il caso estremamente particolare raffigurato in Fig. 6.1a, concernente un flusso in un canale in cui la parete inferiore fornisce calore al fluido, mentre la parete superiore lo estrae dal fluido stesso in pari entità. Quindi in generale il concetto di flusso completamente sviluppato non può essere applicato. Inoltre, la variazione della temperatura del fluido, sia in x che in y , indurrà effetti di galleggiamento, con conseguenti ripercussioni sul moto del fluido, come si può vedere dalla forma mediata dell'equazione della quantità di moto (5.9) e dalle equazioni dell'energia cinetica turbolenta e del suo tasso di dissipazione viscosa (5.59,5.60) (le quali ultime, determinando la viscosità turbolenta nell'ambito di modellizzazione con chiusura sui momenti primi, influenzano ulteriormente la quantità di moto).

Nella Sez. 6.2 deriveremo, per un caso particolare, un trattamento per lo strato limite termico. Da quanto esposto, e dalle ulteriori approssimazioni che introdurremo, si evince tuttavia che tale trattamento non ha la stessa affidabilità di quello esposto nel Cap. 3.4.1 per il profilo di velocità in prossimità di una parete.

6.2 Canale a distribuzione simmetrica di temperatura

Consideriamo il flusso in un canale di altezza $2h$, vedi Fig. 6.1b, con distribuzione di temperatura media simmetrica rispetto all'asse, con profilo di velocità completamente sviluppato. Supponiamo che la il flusso di calore dalle parete verso il fluido (o viceversa) sia tale da mantenere il profilo simmetrico. Allo scopo di separare il calcolo del profilo di temperatura dal campo di moto, supponiamo

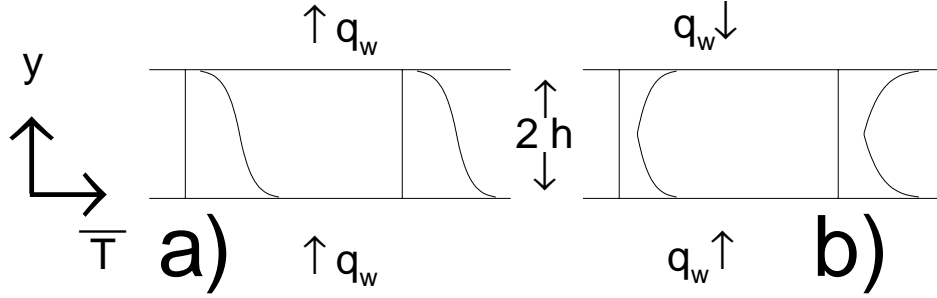


Figure 6.1: Flusso in un canale con scambio di calore alle pareti: a) profilo di temperatura media invariante in x , b) profilo di temperatura media simmetrico.

che le variazioni di temperatura del fluido non influenzino significativamente il campo di moto. Quest'ultima ipotesi, per quanto esposto nella Sez. 6.1, è particolarmente drastica, e corrisponde a trascurare del tutto i termini di galleggiamento. In queste condizioni, l'evoluzione della temperatura media del canale, data in generale dall'equazione (5.24), è descritta nella forma

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \overline{v' T'} \right) \quad (6.1)$$

Notiamo esplicitamente che tale forma non implica alcuna ipotesi di modellizzazione della turbolenza. Possiamo moltiplicare la (6.1) per ρc_p per dare al primo membro il significato di un termine convettivo dell'entalpia per unità di massa:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \rho c_p \overline{v' T'} \right) \quad (6.2)$$

tenendo conto della (5.22). Analogamente a quanto fatto nella Sez. 4.1, integriamo la (6.2) tra la parete ($y = 0$) e l'asse del canale ($y = h$). Alla parete le velocità sono nulle, per cui $\overline{v' T'} = 0$; sull'asse, per simmetria, risulta tanto $\partial \bar{T} / \partial y = 0$ che $\overline{v' T'} = 0$, per cui la forma integrata risulta

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \bar{u} \bar{T} dy = -\lambda \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (6.3)$$

dove il gradiente di temperatura è valutato alla parete; esso è legato al flusso termico alla parete q_w dalla

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (6.4)$$

che permette di scrivere la (6.3) nella forma

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \bar{u} \bar{T} dy = q_w \quad (6.5)$$

la quale evidenzia l'effetto globale del calore scambiato alla parete sull'aumento di temperatura del fluido con x . Per determinare il campo di temperatura media nel canale, $\bar{T}(x, y)$, occorre quindi integrare la (6.2), con opportune condizioni iniziali (all'ingresso del canale, $x = 0$) ed al contorno (alla parete, $y = 0$, ed all'asse di simmetria, $y = h$). Indichiamo le condizioni iniziali come

$$\bar{T}(0, y) = \bar{T}_0(y) \quad (6.6)$$

Due casi estremi di condizioni al contorno possono aversi alla parete, a seconda del problema considerato. In regime di temperature imposte, la temperatura alla parete è data:

$$\bar{T}(x, 0) = \bar{T}_w(x) \quad (6.7)$$

ed il flusso termico ne è conseguentemente determinato attraverso la (6.4). Nel caso di flusso termico imposto, come può p. es. verificarsi nello scambio da una termoresistenza o da una barretta di combustibile nucleare, il flusso termico alla parete è assegnato

$$q_w(x) = -\lambda \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (6.8)$$

Sull'asse di simmetria ovviamente la condizione al contorno assume in ambedue i casi la forma

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_{y=h} = 0 \quad (6.9)$$

Introducendo l'ipotesi di trasporto secondo gradiente per esprimere il flusso di Reynolds

$$\frac{\overline{v'T'}}{v'T'} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (6.10)$$

la forma modellata dell'equazione per la temperatura media (5.57) si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \bar{T}) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] \quad (6.11)$$

e manipolando il termine convettivo grazie all'equazione di continuità mediata

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] \quad (6.12)$$

Ricerchiamo da questa equazione una soluzione per il campo di temperatura media $\bar{T}(x, y)$, ed ipotizziamo che possa essere effettuata una separazione della dipendenza dalle due variabili spaziali, nella forma

$$\bar{T}(x, y) = X(x) Y(y) \quad (6.13)$$

dove $X(x)$ e $Y(y)$ sono due funzioni da determinare. Inoltre, assumiamo ancora che la dipendenza da x sia di tipo esponenziale:

$$X(x) = \exp\left(\frac{x}{L}\right) \quad (6.14)$$

Questa assunzione, a prima vista molto drastica, può trovare una parziale giustificazione nel fatto che la scala delle lunghezze $|L|$ alla quale corrisponde un aumento di temperatura di un fattore ϵ , secondo la (6.14), od un decremento se L è negativa, risulta presumibilmente molto grande rispetto all'altezza $2h$ del canale, per cui l'andamento esponenziale può in prima approssimazione essere assimilato, su un tratto di condotto di lunghezza limitata, ad un andamento lineare. Resta comunque il fatto che l'assunzione (6.14) è del tutto arbitraria, ed ha il solo scopo di consentire i successivi passaggi matematici. Sulla sezione iniziale posta ad $x = 0$ la (6.14) è evidentemente uguale all'unità, per cui dalla condizione iniziale (6.6) si deduce che

$$Y(y) = \bar{T}_0(y) \quad (6.15)$$

e quindi la soluzione cercata (6.13) sarà della forma

$$\bar{T}(x, y) = \exp\left(\frac{x}{L}\right) \bar{T}_0(y) \quad (6.16)$$

Inseriamo ora questa forma della soluzione cercata nell'equazione per la temperatura media (6.12)

$$\frac{\bar{u}}{L} \exp\left(\frac{x}{L}\right) \bar{T}_0(y) = \exp\left(\frac{x}{L}\right) \frac{d}{dy} \left[\left(\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{d\bar{T}_0}{dy} \right] \quad (6.17)$$

e dividendo per $\exp(x/L)$ si ha infine una semplice equazione differenziale in y :

$$\frac{\bar{u} \bar{T}_0(y)}{L} = \frac{d}{dy} \left[\left(\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{d\bar{T}_0}{dy} \right] \quad (6.18)$$

dalla cui soluzione intendiamo ricavare l'andamento di \bar{T}_0 con y . Separiamo ancora la trattazione del sottostrato laminare da quella dello strato turbolento.

6.2.1 Sottostrato laminare

In questa regione la viscosità turbolenta è trascurabile in confronto a quella molecolare, per cui la (6.18) si riduce a

$$\frac{\bar{u} \bar{T}_0(y)}{L} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{d^2 \bar{T}_0}{dy^2} \quad (6.19)$$

Ricaviamo ora il rapporto tra l'ordine di grandezza del primo e del secondo membro, considerando che la scala delle lunghezze che compare nella derivata è dell'ordine dello spessore, che indichiamo con δ_l , del sottostrato laminare. Possiamo allora scrivere

$$\frac{\frac{\bar{u} \bar{T}_0(y)}{L}}{\frac{\nu}{\sigma} \frac{d^2 \bar{T}_0}{dy^2}} = \mathcal{O} \left(\frac{\bar{u} \bar{T}_0}{L} \frac{\delta_l^2}{\nu \bar{T}_0} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{\delta_l}{L} \frac{\bar{u} \delta_l}{\nu} \right) \quad (6.20)$$

avendo indicato con \bar{u} e \bar{T}_0 i valori rappresentativi di velocità e temperatura media. Il termine $\bar{u} \delta_l / \nu$ ha il significato di un numero di Reynolds, valutato con una scala delle lunghezze tipica del sottostrato laminare; esso assume quindi tipicamente valori non superiori a 5, per quanto detto nella Sez. 4.1, vedi anche la (4.24). Il rapporto δ_l / L tra lo spessore dello strato limite turbolento e la distanza L che figura nella (6.14) è invece estremamente piccolo, per cui possiamo senz'altro trascurare il primo membro della (6.18) rispetto al primo, e riscrivere questa equazione come

$$\frac{d^2 \bar{T}_0}{dy^2} \cong 0 \quad (6.21)$$

Integrando la (6.21) si ottiene il profilo cercato di temperatura nel sottostrato laminare. Una prima integrazione dà

$$\frac{d\bar{T}_0}{dy} = c_1 \quad (6.22)$$

ed integrando una seconda volta si ottiene

$$\bar{T}_0(y) = c_1 y + c_0 \quad (6.23)$$

L'andamento della temperatura nel sottostrato laminare è quindi lineare, sotto le ipotesi adottate. I valori delle costanti di integrazione c_0 e c_1 si identificano facilmente. Per $y = 0$ la (6.23) dà

$$\bar{T}_0(0) = c_0 = T_w(0) \quad (6.24)$$

quindi c_0 rappresenta la temperatura di parete sulla sezione iniziale (cioè, per $x = 0$ – si ricordi che T_w è una funzione di x). La costante c_1 si identifica invece dalla (6.22) che dà, in virtù della (6.8)

$$\frac{d\bar{T}_0}{dy} = c_1 = -\frac{q_w(0)}{\lambda} \quad (6.25)$$

quindi c_1 rappresenta il flusso termico sulla sezione iniziale ($x = 0$), diviso la conducibilità termica λ , cambiato di segno. Quindi la (6.23), che dà la temperatura media sulla sezione iniziale, si scrive

$$\bar{T}_0(y) = -\frac{q_w(0)}{\lambda} y + T_w(0) \quad (6.26)$$

Alla generica ascissa x , per l'ipotesi adottata (6.13), la distribuzione di temperatura sarà

$$\bar{T}(x, y) = -\frac{q_w(x)}{\lambda} y + T_w(x) \quad (6.27)$$

Ovviamente, la validità di tale soluzione implica che flusso termico alla parete e temperatura di parete varino con x in modo tale $q_w(x) \propto T_w(x)$. Questo sottolinea i limiti della soluzione ottenuta.

6.2.2 Strato turbolento

Nella regione turbolenta dello strato limite, essendo la viscosità turbolenta assolutamente preponderante rispetto a quella molecolare, l'eq. (6.19) assume la forma

$$\frac{\bar{u} \bar{T}_0(y)}{L} = \frac{1}{\sigma_t} \frac{d}{dy} \left(\nu_t \frac{d\bar{T}_0}{dy} \right) \quad (6.28)$$

dove abbiamo preso σ_t costante, mentre ovviamente ν_t non lo è, essendo data, nel modello $k-\epsilon$ da (3.25)

$$\nu_t = c_\mu \frac{\overline{k}^2}{\epsilon} \quad (6.29)$$

Possiamo ricavare come varia ν_t con y osservando che dalla (4.14) è

$$\sqrt{\overline{k}} = \frac{u_\tau}{c_\mu^{1/4}} \quad (6.30)$$

mentre dalle (4.17,4.20) risulta

$$\frac{\overline{k}^{3/2}}{\epsilon} = \frac{\kappa y}{c_\mu^{3/4}} \quad (6.31)$$

per cui la viscosità turbolenta è esprimibile, in questa regione, come

$$\nu_t = \kappa u_\tau y \quad (6.32)$$

e quindi varia linearmente con la distanza con la parete. Sostituendo nella (6.28)

$$\frac{\overline{u} \overline{T}_0(y)}{L} = \frac{\kappa u_\tau}{\sigma_t} \frac{d}{dy} \left(y \frac{d\overline{T}_0}{dy} \right) \quad (6.33)$$

Possiamo anche in questo caso confrontare gli ordini di grandezza di primo e secondo membro, considerandone il rapporto

$$\frac{\frac{\overline{u} \overline{T}_0(y)}{L}}{\frac{\kappa u_\tau}{\sigma_t} \frac{d}{dy} \left(y \frac{d\overline{T}_0}{dy} \right)} = \mathcal{O} \left(\frac{\overline{u} \overline{T}_0}{L} \frac{\sigma_t \delta_t}{\kappa u_\tau \overline{T}_0} \right) = \mathcal{O} \left(\frac{\delta_t}{L} \frac{\overline{u}}{u_\tau} \right) \quad (6.34)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo considerato che σ_t e κ sono dello stesso ordine di grandezza. Per ricavare l'ordine di grandezza del rapporto u/u_τ ricordiamo la definizione (4.12) di velocità d'attrito, dove esprimiamo la τ_w secondo la (4.8):

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{-\frac{h}{\rho} \frac{d\overline{p}}{dx}} \quad (6.35)$$

Incidentalmente, osserviamo che $d\overline{p}/dx$ in un canale è ovviamente negativo. Esprimiamo poi la perdita di pressione nel canale mediante la formula empirica di Darcy (1.82), che in questo caso si scrive (essendo $D = 4h$ per flusso in un canale)

$$\frac{d\overline{p}}{dx} = -f' \frac{\rho \overline{u}^2}{2} \frac{1}{4h} \quad (6.36)$$

per cui u_τ è esprimibile come

$$u_\tau = \sqrt{\frac{f'}{8}} \overline{u} \quad (6.37)$$

ed il rapporto di velocità cercato risulta pertanto

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = \sqrt{\frac{8}{f'}} \quad (6.38)$$

Poichè, come osservato nella Sez. 1.4, i valori tipo di f' sono intorno a 0.02, la (6.38) indica che il valore tipico del rapporto di velocità a primo membro è intorno a 20.

L'altro rapporto, δ_t/L , che compare nella (6.34), è invece sicuramente di molti ordini di grandezza inferiore all'unità. Infatti, δ_t rappresenta lo spessore dello strato limite turbolento, che è molto sottile rispetto all'altezza $2h$ del canale. La lunghezza L è stata definita come una lunghezza in direzione x in cui la temperatura cresce (o decresce) di un fattore e , quindi sarà senz'altro molto maggiore dell'altezza $2h$ del canale.

In conclusione, il rapporto tra l'ordine di grandezza del primo del secondo membro della (6.33), dato dalla (6.34), è trascurabile, per cui la (6.33) stessa può essere riscritta, con ragionevole approssimazione, come

$$\frac{d}{dy} \left(y \frac{d\bar{T}_0}{dy} \right) = 0 \quad (6.39)$$

Da questa espressione ricaviamo l'andamento della temperatura media nella parte turbolenta dello strato limite, procedendo come al solito ad una doppia integrazione rispetto ad y . Una prima integrazione dà

$$y \frac{d\bar{T}_0}{dy} = c_1 \quad (6.40)$$

ossia

$$\frac{d\bar{T}_0}{dy} = \frac{c_1}{y} \quad (6.41)$$

ed integrando quest'ultima si ottiene

$$\bar{T}_0(y) = c_1 \log y + c_0 \quad (6.42)$$

dove c_0 e c_1 denotano opportune costanti d'integrazione, da non confondere con quelle usate nella (6.23). Si ha cioè un profilo semilogaritmico di temperatura media, analogamente a quanto si era trovato per la velocità media nella Sez. 4.1. Esprimendo le costanti di integrazione in maniera conveniente, si può riscrivere la (6.42) nella forma consueta

$$\frac{\rho c_p u_\tau}{q_w} (T_w - \bar{T}_0) = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \log(\tilde{E} y^+) \quad (6.43)$$

analogo al profilo universale di velocità (4.23); si può facilmente constatare che anche in questo caso il primo membro è adimensionale, ed è anche indicato come T^+ . Il segno di q_w è stato preso positivo per trasferimento di calore dalla parete al fluido. Le costanti d'integrazione che compaiono nella (6.43) sono determinate mediante confronto con dati sperimentali, dal quale si deduce il valore

$$\tilde{\kappa} = 0.46 \quad (6.44)$$

mentre la \tilde{E} risulta essere una funzione del numero di Prandtl σ del mezzo. Talvolta la (6.43) viene invece manipolata esprimendo il logaritmo di y^+ mediante la (4.24):

$$\log y^+ = \kappa u^+ - \log E \quad (6.45)$$

avendo indicato con u^+ il rapporto \bar{u}/u_τ , da cui

$$T^+ = \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} \left(u^+ + \frac{\log \tilde{E} - \log E}{\kappa} \right) \quad (6.46)$$

e posto

$$\mathcal{P} = \frac{\log(\tilde{E}/E)}{\tilde{\kappa}} \quad (6.47)$$

si ha infine la forma equivalente della (6.43)

$$T^+ = \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} (u^+ + \mathcal{P}) \quad (6.48)$$

La funzione \mathcal{P} dipende ovviamente dal numero di Prandtl; la forma suggerita per flusso in tubi è

$$\mathcal{P} = 9.24 \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_t} \right)^{3/4} - 1 \right] \left[1 + 0.28 \exp \left(-0.007 \frac{\sigma}{\sigma_t} \right) \right] \quad (6.49)$$

Se invece si usa la forma (6.43), la dipendenza di \tilde{E} da σ è esprimibile attraverso la

$$\tilde{E} = E \exp(\tilde{\kappa} \mathcal{P}) \quad (6.50)$$

6.3 Conclusioni

Da quanto esposto si intuisce che il trattamento ‘sintetico’ dello strato limite termico risulta assai meno soddisfacente dell’analogo trattamento per il profilo di velocità. Si può anzi dire, più in generale, che i problemi di scambio termico con una parete sono quelli che pongono i maggiori problemi nella modellizzazione della turbolenza.

Capitolo 7

Limiti della modellizzazione standard

7.1 Limiti nella riproduzione del campo di moto

I modelli esposti nei Capp. 2.3.2–5.6 definiscono quella che può essere chiamata la modellizzazione *standard* della turbolenza. Questa modellizzazione presenta notevoli vantaggi dal punto di vista computazionale:

1. le equazioni di Navier–Stokes mediate conservano una forma analoga alle equazioni valide per i valori istantanei delle grandezze, con la sola differenza che la viscosità (o diffusività, nel caso dell’equazione per la temperatura) molecolare è sostituita con una viscosità (o diffusività) efficace, somma di un termine molecolare e di un termine turbolento;
2. le equazioni per l’energia cinetica turbolenta ed il tasso di dissipazione viscosa hanno anch’esse una forma sostanzialmente simile a quella generale delle equazioni di Navier–Stokes, pur con l’aggiunta di termini di produzione e dissipazione, peraltro di espressione relativamente semplice;
3. l’assimilazione del fenomeno di trasporto turbolento ad un effetto diffusivo facilita notevolmente la soluzione numerica, in quanto l’accresciuta diffusione tende ad ‘uniformare’ il flusso;
4. la trattazione sintetica dello strato limite, sia per quanto riguarda il profilo di velocità che di temperatura, consente una notevole economia nel numero di nodi di calcolo necessari.

Questi innegabili vantaggi hanno determinato il largo successo di questa modellizzazione, che è ampiamente adottata in tutte le applicazioni pratiche. Abbiamo però avuto occasionalmente modo di notare come alcune delle ipotesi sulle quali tale modellizzazione si basa si prestano a qualche critica. Queste carenze si ripercuotono sulla qualità delle previsioni numeriche del campo di moto, che in alcune situazioni si discostano sensibilmente dalle risultanze sperimentali.

Nelle tre successive sottosezioni sono analizzati alcuni dei principali limiti della modellizzazione standard per quanto riguarda la previsione del campo di moto; nella Sez. 7.2 sono invece esaminati i limiti attinenti alla previsione del campo termico.

7.1.1 Flussi con ricircolazione

Consideriamo l’equazione della quantità di moto mediata, nella forma in cui ancora non sono introdotte ipotesi di modellizzazione (1.40); supponiamo inoltre che il flusso sia bidimensionale nella media, e scriviamo esplicitamente la componente dell’equazione citata in direzione x

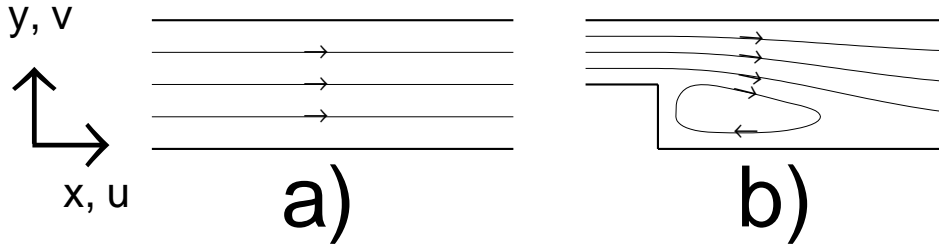


Figure 7.1: Andamento delle linee di corrente a) nel flusso in un canale, e b) nel flusso a valle di un gradino.

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}\bar{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + g_x \quad (7.1)$$

In questa equazione i termini da modellare sono le derivate degli sforzi di Reynolds

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} \quad (7.3)$$

Determineremo ora l'ordine di grandezza di questi termini, dapprima per il flusso in un canale riportato in fig. 7.1a, e quindi per il flusso con ricircolazione a valle del gradino indicato in fig. 7.1b.

Cominciamo con il valutare l'ordine di grandezza della (7.3); se indichiamo con u' un valore caratteristico della fluttuazione di velocità, dobbiamo innanzitutto considerare che l'ordine di grandezza di $\bar{u}'v'$ è inferiore a u'^2 , in quanto le componenti di velocità u' e v' non sono perfettamente correlate, come già osservato nella nota 4 della Sez. 1.2, e nella Sez. 4.1, vedi in particolare la (4.13). Ad ogni modo, nel quadro di una grossolana valutazione dell'ordine di grandezza, possiamo prendere il quadrato di u' come una prima stima di $\bar{u}'v'$. L'ordine di grandezza della (7.3) può allora essere indentificato come il rapporto tra un valore caratteristico u' della fluttuazione di velocità, al quadrato, diviso una lunghezza caratteristica in direzione y . Poichè la velocità media varia in direzione y con una scala dell'ordine al più della semi-altezza h del canale (ma in verità più piccola di questa, specie nello strato limite), possiamo approssimativamente scrivere una stima per difetto dell'ordine di grandezza di questo termine come

$$\frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} = \mathcal{O}\left(\frac{u'^2}{h}\right) \quad (7.4)$$

Per valutare l'ordine di grandezza della (7.2), possiamo ancora prendere l'ordine di grandezza di $\overline{u'^2}$ come il quadrato di u' . La sostanziale differenza tra la valutazione dell'ordine di grandezza della (7.3) e della (7.2) risiede tuttavia nella scala con cui la velocità varia in direzione x , che qui indichiamo con L . Possiamo indicare quindi una stima dell'ordine di grandezza della (7.2) come

$$\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} = \mathcal{O}\left(\frac{u'^2}{L}\right) \quad (7.5)$$

In un flusso in un canale, L è molto più grande di h , per cui l'ordine di grandezza del termine nello sforzo normale di Reynolds (7.2,7.5) è di gran lunga minore di quello nello sforzo di taglio di Reynolds (7.3,7.4).

Analizziamo ora cosa accade nel caso di un flusso con ricircolazione, come p. es. il flusso a valle di un gradino indicato in fig. 7.1b. Se indichiamo con h l'altezza del gradino, e con L la 'lunghezza di riattaccamento' (cioè la distanza dal gradino, nella direzione principale del flusso, in corrispondenza alla quale si esaurisce la zona di ricircolazione), allora le stime degli ordini di grandezza date dalle (7.4,7.5) sono ancora formalmente valide. Tuttavia, in flussi con ricircolazione la scala del moto medio in direzione x , che abbiamo indicata come L , non è più molto maggiore della scala in y , indicata come h . Per flussi ad alto numero di Reynolds, la lunghezza di riattaccamento per un flusso a valle di un gradino piano è tipicamente intorno a 7 volte l'altezza del gradino stesso. Quindi il termine (7.2) risulta in questo caso di un ordine di grandezza comparabile a (7.3). Ne consegue che mentre nel flusso in un canale solo il termine nello sforzo di taglio di Reynolds entra significativamente nelle equazioni del moto medio (e lo stesso avviene per flussi in tubazioni, o comunque condotti allungati), in presenza di ricircolazione anche gli sforzi normali di Reynolds influenzano il moto medio. Ora, abbiamo visto nella Sez. 3.1 che l'estensione dell'ipotesi di trasporto secondo gradiente agli sforzi normali di Reynolds (3.7) non è completamente soddisfacente, in quanto basata sull'equiripartizione (3.8). Ne consegue che i modelli sinora visti danno previsioni numeriche caratterizzate da una sostanziale isotropia degli sforzi normali di Reynolds

$$\overline{u'^2} \simeq \overline{v'^2} \simeq \overline{w'^2} \quad (7.6)$$

È facile tuttavia intuire che la relazione (7.6) è alquanto approssimata, a partire dallo studio del flusso in un canale, fig. 7.1a. Se consideriamo i termini di produzione nelle equazioni per i tre sforzi di Reynolds normali, si ha in questo caso per $\overline{u'^2}$ alla (1.65)

$$P_{11} = -2 \overline{u'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - 2 \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \simeq -2 \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (7.7)$$

per considerazioni sull'ordine di grandezza dei due termini (essendo la scala delle lunghezze del moto medio in x sempre molto maggiore dell'analogha scala in y), poi per $\overline{v'^2}$

$$P_{22} = -2 \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - 2 \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (7.8)$$

essendo la componente \bar{v} della velocità media nulla nel flusso in un canale, ed infine per $\overline{w'^2}$

$$P_{33} = -2 \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - 2 \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = 0 \quad (7.9)$$

essendo $\bar{w} \equiv 0$ per questo flusso. Quindi, l'unica componente dello sforzo normale di Reynolds ad avere un termine di produzione è $\overline{u'^2}$; le rimanenti componenti $\overline{v'^2}$ e $\overline{w'^2}$ saranno comunque non nulle grazie all'effetto dei termini pressione-deformazione ϕ_{ij} (1.66), i quali come detto nella Sez. 1.3

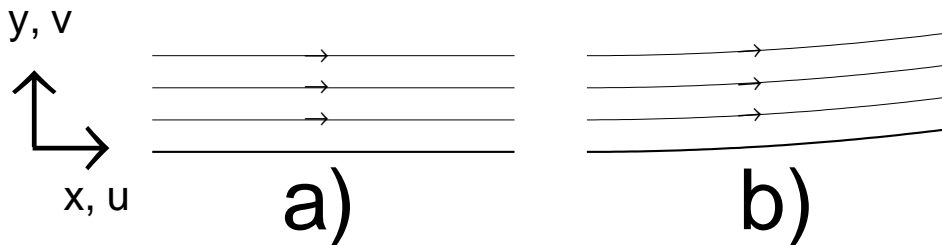


Figure 7.2: Flusso a) su una lastra piana, e b) su una lastra concava.

hanno l'effetto di redistribuire direzionalmente le fluttuazioni. Si intuisce tuttavia facilmente che tale effetto non potrà essere tale da compensare totalmente l'assenza dei termini di produzione, per cui nel flusso considerato $\overline{u'^2}$ risulta sensibilmente superiore (circa il doppio, come dimostrato sperimentalmente) rispetto alle componenti $\overline{v'^2}$ e $\overline{w'^2}$. In definitiva, la (7.6) risulta un'approssimazione molto povera, per cui mentre l'ipotesi di trasporto secondo gradiente nella forma (3.7) è accettabile per gli sforzi *di taglio* di Reynolds, essa lo è assai meno per quelli *normali*. Di conseguenza, i modelli 'standard' visti sinora danno previsioni accettabili quando sono applicati a flussi in cui l'importanza degli sforzi di Reynolds normali sulle equazioni del moto medio è secondaria, come in canali, tubi, o comunque condotti allungati; danno invece previsioni piuttosto modeste quando gli sforzi normali entrano significativamente a determinare il moto medio, cioè in presenza di ricircolazione. Come esempio, riportiamo che tipicamente il modello $k-\epsilon$ prevede, nel flusso a valle di un gradino, un rapporto L/h tra lunghezza di riattaccamento ed altezza del gradino intorno a 5, contro il valore intorno a 7 determinato sperimentalmente.

7.1.2 Flussi su superfici non piane

È stato osservato in esperienze di laboratorio concernenti flussi su superfici non piane, che anche una debole curvatura della superficie stessa esercita un notevole effetto sul flusso, il quale non può essere riprodotto nell'ambito della modellizzazione standard. Per renderci conto del perchè di questo fenomeno, consideriamo il flusso su una lastra piana, fig. 7.2a, a confronto con il flusso su una lastra che presenta una lieve concavità, fig. 7.2b. Poichè in entrambi i casi la scala spaziale nella direzione del moto è molto più grande della scala in direzione normale alla parete, anche in questo caso l'unico sforzo di Reynolds che entra in modo significativo nelle equazioni della quantità di moto mediata è lo sforzo di taglio $\overline{u'v'}$. Nell'ambito della modellizzazione standard, questo sforzo è modellato dalla (3.4), che qui riportiamo

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad (7.10)$$

Esso dipende quindi da due componenti di gradiente di velocità, cioè

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (7.11)$$

e

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (7.12)$$

Nel flusso su una superficie piana, completamente sviluppato, la componente di velocità media normale alla parete \bar{v} è identicamente nulla per cui il solo contributo a $\overline{u'v'}$ viene dal termine (7.11), che chiamiamo perciò *gradiente primario*. Una stima del suo ordine di grandezza può essere indicata come

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \mathcal{O} \left(\frac{U}{h} \right) \quad (7.13)$$

essendo U una velocità caratteristica, p. es. nel flusso in un canale la velocità media sull'asse di simmetria, o nel flusso su una lastra piana la velocità media al di fuori dello strato limite; analogamente, h denota una scala caratteristica delle lunghezze in y , come la semi-altezza del canale o lo spessore dello strato limite nei due casi citati, rispettivamente.

Nel flusso su una superficie concava, fig. 7.2b, interviene invece anche il termine (7.12), del quale cerchiamo ora di valutare l'ordine di grandezza. Indichiamo con α l'angolo (espresso in radianti) di inclinazione della superficie concava rispetto all'orizzontale, il quale quindi è una funzione crescente dell'ascissa x :

$$\alpha = \alpha(x) \quad (7.14)$$

con

$$\frac{d\alpha}{dx} > 0 \quad (7.15)$$

Se supponiamo che in prossimità della parete le linee di flusso abbiano un'inclinazione prossima al valore locale di α , possiamo scrivere

$$\bar{v} \simeq \tan \alpha \bar{u} \simeq \alpha \bar{u} \simeq = \mathcal{O}(\alpha U) \quad (7.16)$$

dove la seconda approssimazione vale evidentemente per α piccoli, cioè per le superfici di limitata curvatura alle quali limitiamo la presente analisi. L'ordine di grandezza della (7.11) può essere perciò valutato come

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \mathcal{O} \left(U \frac{d\alpha}{dx} \right) = \mathcal{O} \left(\alpha \frac{U}{L} \right) \quad (7.17)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo valutato l'ordine di grandezza di $d\alpha/dx$ come rapporto tra α stesso ed una scala delle lunghezze del moto medio in direzione x , che abbiamo indicato con L . Essendo evidentemente nei flussi in questione $L \gg h$, e considerando come detto valori di α piccoli, l'ordine di grandezza (7.17) del gradiente (7.12) risulta evidentemente molto minore di quello (7.13)

del gradiente primario (7.11). Chiameremo allora il termine (7.12) *gradiente secondario*; per la (7.10), sarebbe quindi lecito aspettarsi che esso eserciti un'influenza quasi trascurabile sul moto medio. Le risultanze sperimentali indicano invece che anche una lieve curvatura della superficie dà luogo ad importanti effetti sul flusso.

Per chiarire il perché di questo comportamento inatteso, è necessario analizzare in maggiore dettaglio i meccanismi che concorrono a determinare il valore dello sforzo di taglio di Reynolds $\overline{u'v'}$ che, come abbiamo detto, è quello che altera significativamente il bilancio della quantità di moto mediata. Le equazioni di conservazione per gli sforzi di Reynolds (1.68) costituiscono a questo fine un valido strumento. Consideriamo in particolare il termine di produzione (1.65), specializzato al caso dello sforzo di taglio di Reynolds in un flusso bidimensionale nella media

$$P_{12} = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (7.18)$$

Osserviamo innanzitutto che i due termini in $\overline{u'v'}$ hanno somma

$$-\overline{u'v'} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \quad (7.19)$$

che risulta nulla per l'equazione di continuità mediata (1.35), scritta per un flusso bidimensionale nella media. I termini residui danno perciò

$$P_{12} = -\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (7.20)$$

Come si vede il primo termine di questa espressione è legato al gradiente primario, ed il secondo al gradiente secondario; quest'ultimo è evidentemente nullo per flusso su una superficie piana. Nel flusso sopra una superficie non piana, *se i livelli degli sforzi normali di Reynolds sono comparabili* (7.6), come risulta dalla modellizzazione standard, dobbiamo aspettarci che ancora il primo termine della (7.20) sia prevalente sul secondo, per la valutazione degli ordini di grandezza dei gradienti (7.13,7.17). Abbiamo già osservato, nella Sez. 7.1.1, che in realtà lo sforzo normale di Reynolds nella direzione principale del moto è circa il doppio rispetto a quello nella direzione trasversale. Ciò dà già una prima indicazione che il peso del gradiente secondario di velocità, che moltiplica $\overline{u'^2}$ nel termine di produzione (7.20) (mentre il gradiente primario moltiplica $\overline{v'^2}$), è superiore a quanto previsto nella modellizzazione standard. Ma la situazione è esaltata in modo del tutto particolare nello strato limite. Se y indica la distanza dalla parete, possiamo sviluppare le componenti della velocità fluttuante, ad un dato istante, secondo un'espansione in serie:

$$u' = u'_0 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)_0 y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)_0 y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u'}{\partial y^3} \right)_0 y^3 + \dots \quad (7.21)$$

$$v' = v'_0 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)_0 y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right)_0 y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 v'}{\partial y^3} \right)_0 y^3 + \dots \quad (7.22)$$

$$w' = w'_0 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)_0 y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)_0 y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 w'}{\partial y^3} \right)_0 y^3 + \dots \quad (7.23)$$

dove l'indice 0 sta ad indicare che componenti di velocità e loro derivate sono valutate alla parete, cioè per $y = 0$. Osserviamo subito che le componenti di velocità alla parete sono ovviamente nulle, per cui i termini u'_0 , v'_0 e w'_0 si annullano. Per quanto riguarda le derivate prime, osserviamo che in particolare nella (7.22) compare una derivata di v' in direzione y , cioè uno dei tre termini che

contribuiscono alla divergenza della componente fluttuante della velocità, che sappiamo essere nulla per la (1.36). Possiamo allora scrivere tale derivata come

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)_0 = -\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_0 \quad (7.24)$$

Le derivate a secondo membro sono evidentemente nulle essendo derivate di componenti di velocità, identicamente nulle su tutta la superficie, nel piano della superficie stessa. Allora anche il termine in y della (7.22) è nullo, e le (7.21,7.22,7.23) si possono allora riscrivere più precisamente come

$$u' = \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u'}{\partial y^3}\right)_0 y^3 + \dots \quad (7.25)$$

$$v' = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 v'}{\partial y^3}\right)_0 y^3 + \dots \quad (7.26)$$

$$w' = \left(\frac{\partial w'}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}\right)_0 y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 w'}{\partial y^3}\right)_0 y^3 + \dots \quad (7.27)$$

Si noti che mentre u' e w' , in base a queste espansioni, crescono linearmente in prossimità della parete (dove, essendo la y piccola, prevalgono i termini di ordine inferiore), la componente fluttuante normale v' presenta un andamento parabolico, con derivata nulla alla parete. Ciò indica che nelle vicinanze della parete, cioè nello strato limite, la componente dello sforzo normale di Reynolds ortogonale alla parete, $\overline{v'^2}$, risulta alquanto inferiore alle componenti nella direzione del flusso $\overline{u'^2}$, ed a quella ortogonale alle due precedenti direzioni, $\overline{w'^2}$. In particolare, nella parte turbolenta dello strato limite, alla quale si applica il trattamento descritto nel Cap. 3.4.1, il rapporto tra $\overline{v'^2}$ e $\overline{u'^2}$ è tipicamente 1/4. Ciò fa in modo che il termine di produzione dello sforzo di taglio di Reynolds (7.22) sia molto più sensibile al gradiente secondario (che moltiplica $\overline{u'^2}$), rispetto al gradiente primario (che moltiplica $\overline{v'^2}$), di quanto non risulti in base alla modellizzazione standard.

Da quanto detto deriva tra l'altro un interessante corollario. Abbiamo già citato che, nel flusso in un canale, il valore di $\overline{u'^2}$, sforzo di Reynolds normale nella direzione del moto medio, è tipicamente circa il doppio del valore di $\overline{v'^2}$ e $\overline{w'^2}$. L'effetto smorzante delle pareti sulle fluttuazioni in direzione y fa tuttavia sì che $\overline{w'^2}$ risulti lievemente superiore a $\overline{v'^2}$.

Ritornando al flusso su lastra non piana, la sensibilità alla curvatura della superficie è poi accresciuta da un fenomeno di auto-esaltazione. Se consideriamo il termine di produzione nell'equazione per $\overline{v'^2}$, questo risulta in base alla (1.65)

$$P_{22} = -2\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} - 2\overline{v'^2} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \quad (7.28)$$

dove però il secondo termine è ancora nullo per flussi completamente sviluppati ($\partial \overline{u}/\partial x = 0$, $\overline{w} = 0$) in base alla equazione di continuità, questa volta ovviamente relativa ai valori mediati (1.35), per cui

$$P_{22} = -2\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \quad (7.29)$$

Da questa equazione si vede come la produzione di $\overline{v'^2}$ dipenda solo dal gradiente secondario. Dall'ipotesi di trasporto secondo gradiente per gli sforzi di taglio (7.10), si evince che $\overline{u'v'}$ è negativo; il gradiente secondario (7.12) è positivo per i flussi su superficie concava esaminati, per le (7.15,7.17), quindi nel complesso il termine (7.29) risulta positivo, cioè il gradiente secondario che si genera per effetto della concavità della superficie tende ad aumentare il valore di $\overline{v'^2}$. Questo aumento di $\overline{v'^2}$

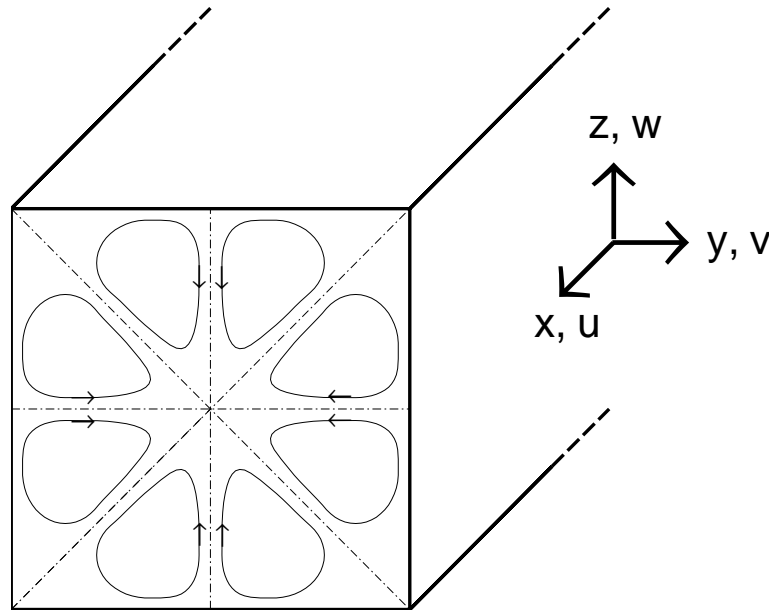


Figure 7.3: Flussi secondari in un condotto a sezione non circolare.

interagisce con il gradiente primario nel termine di produzione (7.20) dello sforzo di Reynolds di taglio, che aumenta pertanto in valore assoluto, mantenendo il segno negativo. Ne consegue che anche $\overline{u'v'}$ crescerà in valore assoluto, mantenendo il segno negativo. Ciò si ripercuote sul termine di produzione (7.29) di $\overline{v'^2}$, che crescerà ulteriormente. Questo processo di auto-esaltazione rende il flusso molto sensibile alla curvatura della superficie. Inevitabilmente, questi effetti non possono essere apprezzati nell'ambito della modellizzazione standard.

Il ragionamento appena esposto sembra delineare un aumento di $\overline{v'^2}$ che tende a riportare la turbolenza verso uno stato isotropo. Si osservi però che il segno di tale effetto dipenda dalla concavità o convessità della superficie. Nel secondo caso esso tenderebbe infatti a ridurre $\overline{v'^2}$, esaltando perciò l'anisotropia. Ciò conferma la sensibilità del flusso alla curvatura della superficie.

7.1.3 Flussi secondari

Nel flusso turbolento in condotti a sezione non circolare, vedi p. es. la fig. 7.3, oltre al moto medio che si sviluppa secondo l'asse x del condotto, si osservano moti medi nel piano normale all'asse del condotto, detti *flussi secondari*. Tali moti non si osservano invece in regime laminare. È possibile dimostrare [14, 15] che l'origine di tali moti è legata alla differenza tra i livelli degli sforzi normali di Reynolds trasversali, cioè del tipo $\overline{v'^2} - \overline{w'^2}$.

Per ricavare questo risultato osserviamo che la presenza dei flussi secondari indicati in fig. 7.3 implica che, per l'analogia della (1.8) e la fig. 1.3, sia non nulla la componente del vettore vorticità media nella direzione x

$$\overline{\omega}_x = \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \quad (7.30)$$

Per accertare le cause dell'insorgere di questa vorticità, deriveremo un'equazione di conservazione per $\bar{\omega}_x$, ed individueremo i termini che svolgono il ruolo di 'sorgente'. Partiamo dalle equazioni di conservazione della quantità di moto mediata nella forma (1.35) ancora esente da ipotesi di modellizzazione, dove il termine di viscosità molecolare (1.41) può essere espresso secondo la relazione lineare (1.46), nelle direzioni y e z :

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \bar{v}^{\prime 2}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}' w'}{\partial z} + g_y \quad (7.31)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \bar{v}' w'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}^{\prime 2}}{\partial z} + g_z \quad (7.32)$$

In queste equazioni abbiamo espresso il termine convettivo facendo uso dell'equazione di continuità mediata (1.35), ed abbiamo considerato che, sotto l'ipotesi di flusso completamente sviluppato, le derivate delle velocità in direzione x si annullano. Per ricavare l'equazione cercata per $\bar{\omega}_x$, deriviamo la (7.31) rispetto a z e la (7.32) rispetto a y , ottenendo

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y \partial z} + \nu \left(\frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial z^3} \right) - \frac{\partial^2 \bar{v}^{\prime 2}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \bar{v}' w'}{\partial z^2} \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y \partial z} + \nu \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y \partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \bar{v}' w'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}^{\prime 2}}{\partial y \partial z} \quad (7.34)$$

Osserviamo che in queste equazioni il primo e terzo termine a primo membro può essere espresso come un fattore che moltiplica

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (7.35)$$

e la (7.35) è evidentemente nulla per l'equazione di continuità mediata (1.35), ricordando inoltre l'ipotesi di flusso completamente sviluppato ($\partial \bar{v} / \partial x = 0$); le (7.33, 7.34) possono dunque essere riscritte come

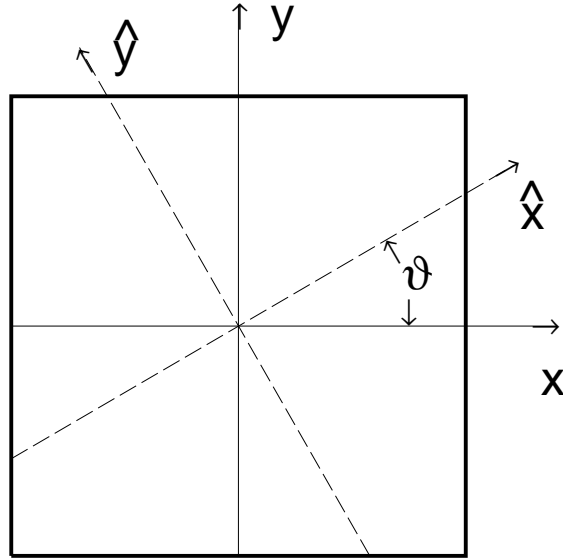
$$\bar{v} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial z} + \bar{w} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y \partial z} + \nu \left(\frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial z^3} \right) - \frac{\partial^2 \bar{v}^{\prime 2}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \bar{v}' w'}{\partial z^2} \quad (7.36)$$

$$\bar{v} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \bar{w} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y \partial z} + \nu \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y \partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \bar{v}' w'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{w}^{\prime 2}}{\partial y \partial z} \quad (7.37)$$

Sottraendo la (7.37) dalla (7.36) si ottiene l'equazione cercata per la componente della vorticità media in x :

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{\omega}_x}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 (\bar{w}^{\prime 2} - \bar{v}^{\prime 2})}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{v}' w'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}' w'}{\partial z^2} \quad (7.38)$$

In questa equazione possiamo riconoscere a primo membro il termine di convezione, ed a secondo membro il termine di diffusione molecolare di $\bar{\omega}_x$, il quale quindi non contribuisce né a creare né a

Figure 7.4: Sistemi di riferimento yz e $\hat{y}\hat{z}$.

distruggere vorticit ; ne segue che l'unico termine che pu  agire come sorgente di vorticit    quello nelle derivate degli sforzi di Reynolds

$$\frac{\partial^2(\overline{w'^2} - \overline{v'^2})}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \overline{v'w'}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overline{v'w'}}{\partial z^2} \quad (7.39)$$

Queste termine dunque dipende dalla differenza degli sforzi normali $\overline{w'^2} - \overline{v'^2}$, come pure dallo sforzo di taglio $\overline{v'w'}$. Dimostriamo per  ora che se la differenza degli sforzi normali   nulla, necessariamente risulta nullo anche lo sforzo di taglio, per cui   tale differenza il reale agente che d  origine ai moti secondari. La dimostrazione si basa sulla considerazione di un sistema di assi $\hat{y}\hat{z}$ coplanare con il sistema yz , ma ruotato di un angolo θ rispetto ad esso, vedi fig. 7.4; l'asse x resta inalterato.

Le componenti di velocit  \hat{v} e \hat{w} , riferite ai nuovi assi \hat{y} e \hat{z} , sono legate a quelle nel sistema originario dalle relazioni

$$\hat{v} = v \cos \theta + w \sin \theta \quad (7.40)$$

$$\hat{w} = -v \sin \theta + w \cos \theta \quad (7.41)$$

Gli sforzi di Reynolds normali $\overline{\hat{v}'^2}$ e $\overline{\hat{w}'^2}$ sono allora esprimibili in funzione degli sforzi nel sistema di riferimento originario come

$$\overline{\hat{v}'^2} = \overline{v'^2} \cos^2 \theta + \overline{w'^2} \sin^2 \theta + 2\overline{v'w'} \sin \theta \cos \theta \quad (7.42)$$

$$\overline{\hat{w}'^2} = \overline{v'^2} \sin^2 \theta + \overline{w'^2} \cos^2 \theta - 2\overline{v'w'} \sin \theta \cos \theta \quad (7.43)$$

Se allora scriviamo l'analoga della (7.38), riferita però al sistema $\hat{y}\hat{z}$, la differenza degli sforzi normali di Reynolds, analoga a quella che compare nella (7.39), può essere legata agli sforzi di Reynolds nel sistema originario come

$$\overline{\hat{w}^{\prime 2}} - \overline{\hat{v}^{\prime 2}} = \overline{w^{\prime 2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \overline{v^{\prime 2}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 4 \overline{v'w'} \sin \theta \cos \theta = (\overline{w^{\prime 2}} - \overline{v^{\prime 2}}) \cos 2\theta - 2 \overline{v'w'} \sin 2\theta \quad (7.44)$$

Allora, se ipotizziamo che la differenza $\overline{\hat{w}^{\prime 2}} - \overline{\hat{v}^{\prime 2}}$ risulti nulla per ogni valore dell'angolo di rotazione θ , la (7.44) indica che *necessariamente* deve aversi

$$\overline{v'w'} = 0 \quad (7.45)$$

Quindi, la condizione essenziale che deve verificarsi affinché nell'equazione della vorticità mediata (7.38) vi sia un termine sorgente è

$$\overline{w^{\prime 2}} - \overline{v^{\prime 2}} \neq 0 \quad (7.46)$$

cioè che i due sforzi normali di Reynolds perpendicolari all'asse del condotto siano diversi tra loro.

Nei modelli con chiusura sui momenti primi, lineari, gli sforzi normali in questione sono dati dalla (3.7) nella forma

$$\overline{v^{\prime 2}} = -2 \nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{2}{3} \bar{k} \quad (7.47)$$

$$\overline{w^{\prime 2}} = -2 \nu_t \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{2}{3} \bar{k} \quad (7.48)$$

A questo punto, osserviamo che l'unica componente di velocità media *sicuramente* non nulla nel flusso sotto esame è quella in direzione x , cioè \bar{u} , e quindi gli unici gradienti *sicuramente* diversi da zero sono quelli della \bar{u} nelle direzioni y e z (quello in x è ovviamente nullo per l'ipotesi di flusso completamente sviluppato). I modelli con chiusura sui momenti primi, lineari, ammettono quindi una soluzione in cui \bar{v} e \bar{w} sono identicamente nulli, di conseguenza le (7.47,7.48) danno $\overline{v^{\prime 2}} = \overline{w^{\prime 2}}$, e pertanto il termine sorgente nell'equazione della vorticità media in x è effettivamente nullo, coerentemente con il fatto che $\bar{v} \equiv \bar{w} \equiv 0$. Questo implica che, se una soluzione numerica viene calcolata a partire da una sezione iniziale sulla quale *non* si verificano moti secondari, tali moti non si svilupperanno per tutta la lunghezza del canale. In altre parole, la condizione di flusso unidirezionale (solo la componente di velocità media in direzione x diversa da zero) è una soluzione ammissibile delle equazioni del moto mediate, sotto l'ipotesi di trasporto secondo gradiente, lineare, per cui essa è *la* soluzione risultante. Questo spiega la constatata incapacità della modellizzazione standard di rendere ragione della presenza di flussi secondari in condotti a sezione non circolare.

Accanto ai limiti citati, la modellizzazione standard presenta altre limitazioni nella riproduzione del campo di moto, alle quali però dedichiamo solo un accenno in quanto non direttamente inerenti al tema di queste note. Un esempio è il moto in un sistema di riferimento non inerziale, che può essere per esempio di interesse nello studio delle turbomacchine. In questo caso infatti è conveniente studiare il moto del fluido in un sistema di riferimento solidale con la pala, quindi ruotante, in modo da poter applicare le condizioni al contorno con (relativa) facilità; in questo sistema sul fluido agiscono forze fittizie. I modelli standard non risultano in grado di riprodurre gli effetti che queste generano sul tensore degli sforzi di Reynolds. I modelli standard danno inoltre previsioni molto modeste in flussi con *swirl*.

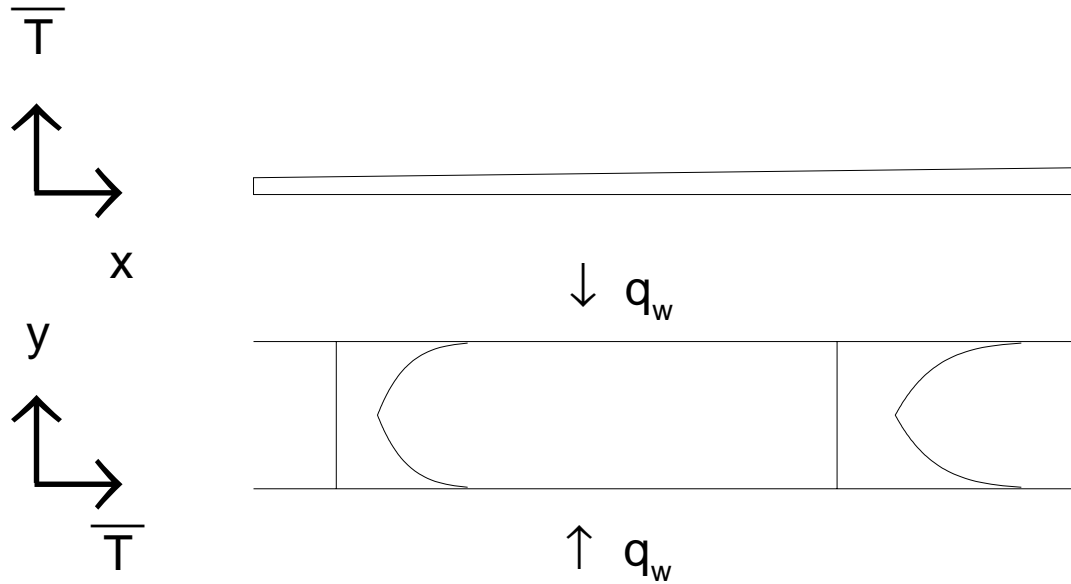


Figure 7.5: Canale con distribuzione simmetrica di temperatura media: profili trasversali ed assiali di temperatura media.

7.2 Limiti nella riproduzione del campo termico

La modellizzazione standard manifesta notevolissimi limiti nella previsione del campo termico. Le due successive sezioni riportano i principali.

7.2.1 Trasporto non secondo gradiente

Abbiamo osservato nel capitolo 5.6 che la nozione di flusso completamente sviluppato non può essere applicata al campo di temperatura in un canale, tranne il caso estremamente particolare raffigurato nella fig. 6.1a. Se, più realisticamente, prendiamo in considerazione il canale con distribuzione simmetrica di temperatura raffigurato in fig. 6.1b, constatiamo che si hanno gradienti di temperatura media tanto in direzione x che in direzione y . La situazione è esemplificata in fig. 7.5 la quale mostra, oltre ai profili trasversali di temperatura media già riportati nella fig. 6.1b, il profilo di temperatura media sull'asse del canale. Si nota immediatamente che il valore (assoluto) del gradiente di temperatura in x è di gran lunga inferiore a quello del gradiente in y ; nel caso raffigurato, il gradiente assiale (in direzione x) è oltre 50 volte inferiore al gradiente trasversale. In effetti, nella maggior parte delle applicazioni a flussi in condotti, il gradiente assiale è tipicamente di due ordini di grandezza inferiore a quello trasversale. Se applichiamo al campo termico l'ipotesi di trasporto secondo gradiente (5.55), dobbiamo allora aspettarci che il flusso termico turbolento in direzione assiale, il quale è proporzionale (a meno del fattore ρc_p) al flusso di Reynolds $\overline{u'T'}$, che per la (5.55) è a sua volta proporzionale a $\partial\overline{T}/\partial x$, risulti trascurabile rispetto a quello in direzione trasversale, proporzionale a $\overline{v'T'}$, quindi a $\partial\overline{T}/\partial y$. L'esperienza dimostra invece che il flusso termico turbolento in direzione assiale è in generale addirittura maggiore che non quello in direzione trasversale; si ha cioè un fenomeno di *trasporto non secondo gradiente*.

Una spiegazione di questo comportamento inaspettato può essere desunta dall'analisi delle equazioni per i flussi di Reynolds (5.52). In esse compare a secondo membro un termine di produzione P_{iT}

dato dalla (5.48), oltre ad altri termini che richiedono modellizzazione. Si noti che in questo termine compare un contributo dovuto al gradiente di velocità media, oltre che quello dovuto al gradiente di temperatura media. Specializziamo la (5.48) al caso considerato di flusso bidimensionale nella media, con profilo di velocità completamente sviluppato ($\bar{v} = \bar{w} = 0$, $\partial\bar{u}/\partial x = 0$). Le componenti di produzione di $\overline{u'T'}$ e $\overline{v'T'}$ risultano rispettivamente

$$P_{1T} = -\overline{v'T'} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \overline{u'^2} \frac{\partial\bar{T}}{\partial x} - \overline{u'v'} \frac{\partial\bar{T}}{\partial y} \quad (7.49)$$

$$P_{2T} = -\overline{u'v'} \frac{\partial\bar{T}}{\partial x} - \overline{v'^2} \frac{\partial\bar{T}}{\partial y} \quad (7.50)$$

Nella (7.50) il termine dovuto al gradiente di velocità media si annulla, essendo la componente \bar{v} identicamente nulla in questo flusso. Esso invece compare nella (7.49), nel primo termine a secondo membro, dove figura l'importante contributo del gradiente di velocità media in direzione normale alla parete, particolarmente elevato nello strato limite. Dobbiamo perciò aspettarci che questo termine contribuisca notevolmente alla produzione del flusso di Reynolds assiale $\overline{u'T'}$. Anche senza considerare il ruolo degli altri termini che compaiono a secondo membro della (5.52), è intuitivo concludere che il valore assoluto di $\overline{u'T'}$ sarà sensibilmente maggiore di quello di $\overline{v'T'}$, in modo particolare nella parte turbolenta dello strato limite. Questo rende conto del comportamento riportato sopra, assolutamente non riproducibile con la modellizzazione standard.

Quanto detto ha anche due ulteriori ripercussioni sul trattamento dello strato limite. In primo luogo, nel derivare il profilo di temperatura media nella parte turbolenta dello strato limite, abbiamo utilizzato l'ipotesi di trasporto secondo gradiente (5.55); i limiti appena visti pongono ulteriormente in dubbio l'attendibilità del trattamento delineato nella Sez. 6.2. In secondo luogo, la sensibilità del termine di produzione (7.49) al gradiente di velocità media, il quale come noto è particolarmente elevato nello strato limite, sottolinea l'importanza di un accurato trattamento dello stesso.

7.2.2 Effetto del galleggiamento sui flussi termici

Dall'equazione (5.52) per il flusso di Reynolds, che qui riportiamo

$$\overline{u_k} \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} = P_{iT} + G_{iT} + \phi_{iT} - \epsilon_{iT} + d_{iT} \quad (7.51)$$

risulta che la varianza della temperatura $\overline{T'^2}$ ha un effetto diretto sul bilancio di tale flusso attraverso il termine di galleggiamento

$$G_{iT} = -\beta_i \overline{T'^2} \quad (7.52)$$

Se l'asse i è diretto verticalmente verso l'alto, il galleggiamento risulta allora in un contributo (algebrico) positivo al bilancio del flusso di Reynolds, essendo in questo caso β_i negativa per la sua definizione (5.5). Ciò lascia intravedere un importante effetto del termine di galleggiamento sul trasporto turbolento di calore, il quale non è in alcun modo tenuto in conto nella modellizzazione standard. Dobbiamo perciò aspettarci che questa modellizzazione dia previsioni particolarmente modeste del campo termico in situazioni in cui i termini di galleggiamento siano importanti, e quindi particolarmente in condizioni di convezione naturale.

Capitolo 8

Modelli nonlineari con chiusura sui momenti primi

Da quanto esposto nelle Sezz. 7.1.1–7.1.3, si evince che la principale limitazione dei modelli standard nella previsione del campo di moto deriva dalla sostanziale isotropia degli sforzi normali di Reynolds che risulta dalla *relazione costitutiva* (3.7). La strada maestra per superare questa limitazione è anch'essa implicita in quanto esposto nelle Sezz. 7.1.1–7.1.3, e consiste nell'adottare un livello di chiusura superiore, in cui sono risolte direttamente equazioni di conservazione per i momenti secondi, cioè gli sforzi (ed i flussi) di Reynolds, nelle quali comunque alcuni termini devono ancora essere modellati. Adottare questo livello di chiusura implica però la rinuncia ai fondamentali vantaggi dei modelli con chiusura sui momenti primi, elencati all'inizio della Sez. 7.1. Va notato, da un punto di vista pratico, che la dimestichezza acquisita dagli utilizzatori di codici di calcolo con il modello k - ϵ li spinge ad una forte resistenza ad adottare modelli di turbolenza radicalmente diversi.

Queste motivazioni hanno spinto diversi ricercatori ad investigare la possibilità di apportare miglioramenti ai modelli con chiusura sui momenti primi, senza stravolgerne la struttura e le modalità operative. Il filone più consistente di questa ricerca si è indirizzato verso la possibilità di sostituire la relazione costitutiva che esprime gli sforzi di Reynolds secondo l'ipotesi di trasporto secondo gradiente lineare (3.7), con una relazione nonlineare, ed in particolare polinomiale. Si cerca perciò di esprimere gli sforzi di Reynolds come una funzione polinomiale nei gradienti di velocità; al solito, occorrerà anche indicare una scala delle velocità ed una scala delle lunghezze caratteristiche, che per quanto detto nel Cap. 2.3.2 può essere fatto attraverso l'energia cinetica turbolenta \bar{k} ed il suo tasso di dissipazione viscosa $\bar{\epsilon}$.

Sotto opportune ipotesi, Shih [16] ricava la forma più generale possibile che tale relazione può assumere. Indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{11}$ opportuni coefficienti (costanti, o anche funzioni) ed adottando come indici di sommatoria tensoriale k, l, m ed n , questa risulta essere del tipo

$$\begin{aligned}
\overline{u'_i u'_j} &= \frac{2}{3} \overline{k} \delta_{ij} + \alpha_1 \frac{\overline{k}^2}{\overline{\epsilon}} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) + \\
&+ \alpha_2 \frac{\overline{k}^3}{\overline{\epsilon}^2} \left[\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] + \\
&+ \alpha_3 \frac{\overline{k}^3}{\overline{\epsilon}^2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \frac{1}{3} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \\
&+ \alpha_4 \frac{\overline{k}^3}{\overline{\epsilon}^2} \left(\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \\
&+ \alpha_5 \frac{\overline{k}^4}{\overline{\epsilon}^3} \left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \right] + \\
&+ \alpha_6 \frac{\overline{k}^4}{\overline{\epsilon}^3} \left[\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \right] + \\
&+ \alpha_7 \frac{\overline{k}^5}{\overline{\epsilon}^4} \left[\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \right] + \\
&+ \alpha_8 \frac{\overline{k}^5}{\overline{\epsilon}^4} \left[\left(\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \delta_{ij} \right] + \\
&+ \alpha_9 \frac{\overline{k}^5}{\overline{\epsilon}^4} \left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ij} \right] + \\
&+ \alpha_{10} \frac{\overline{k}^6}{\overline{\epsilon}^5} \left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \cdot \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ij} \right] + \\
&+ \alpha_{11} \frac{\overline{k}^7}{\overline{\epsilon}^6} \left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_m} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_m} \right)^2 + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_m} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_m} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{u}_n}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_m} \right)^2 \left(\frac{\partial \overline{u}_n}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ij} \right]
\end{aligned} \tag{8.1}$$

In questa espressione, la prima riga corrisponde al modello k - ϵ lineare, se α_1 è preso pari a c_μ ; i termini in α_2 , α_3 ed α_4 sono quadratici nel gradiente di velocità; i termini in α_5 ed α_6 sono cubici; i termini in α_7 , α_8 ed α_9 sono del quarto ordine; il termine in α_{10} è del quinto ordine, ed infine i termini in α_{11} è del quinto ordine.

Come si può intuire, l'individuazione dei coefficienti α_2 , α_3 , ..., α_{11} è compito estremamente arduo; finora sono stati sviluppati solo modelli quadratici e cubici, che sono rispettivamente riportati nelle Sezz. 8.1 e 8.2.

8.1 Modello k - ϵ quadratico.

Un modello quadratico è stato proposto da Speziale [17]. Prima di esaminarne la forma, occorre porre alcune premesse. Il tensore gradiente di velocità media può essere scisso in una componente simmetrica ed una antisimmetrica

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \\
& = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} & 2 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.2)
\end{aligned}$$

che può essere scritta più concisamente in forma tensoriale

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} S_{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{ij} \quad (8.3)$$

avendo ovviamente posto

$$S_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (8.4)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (8.5)$$

Ricordando quanto esposto nella Sez. 1.1, vedi fig. 1.3, si riconosce facilmente che le componenti non diagonali di S_{ij} sono responsabili di una deformazione di taglio dell'elementino di fluido, mentre quelle diagonali di una deformazione lineare. Le componenti non diagonali di Ω_{ij} sono invece responsabili di una rotazione dell'elementino, mentre quelle diagonali ovviamente non hanno effetto alcuno. Il tensore S_{ij} (anzi, a rigore $\frac{1}{2} S_{ij}$) è perciò denominato tensore di deformazione, mentre Ω_{ij} (a rigore $\frac{1}{2} \Omega_{ij}$) è perciò denominato tensore di rotazione.

Con queste posizioni, l'ipotesi di trasporto secondo gradiente, lineare (3.7), può essere riscritta come

$$\overline{u'_i u'_j} = -\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} \quad (8.6)$$

Il modello di Speziale adotta invece una relazione costitutiva quadratica, nella forma

$$\begin{aligned}
\overline{u'_i u'_j} = & -\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} - \\
& - c_d \nu_t \frac{\bar{k}}{\epsilon} \left[S_{ik} S_{kj} + 2 \bar{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - 2 S_{kj} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - 2 S_{ki} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \right. \\
& \left. - \frac{\delta_{ij}}{3} \left(S_{lm} S_{lm} + 2 \bar{u}_k \frac{\partial S_{ll}}{\partial x_k} - 4 S_{kl} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) \right] \quad (8.7)
\end{aligned}$$

con k, l, m come indici di sommatoria. Nell'espressione (8.7), la viscosità turbolenta è ancora definita come nel modello $k-\epsilon$ lineare

$$\nu_t = c_\mu \frac{\overline{k}^2}{\overline{\epsilon}} \quad (8.8)$$

con

$$c_\mu = 0.09 \quad (8.9)$$

La costante aggiuntiva del modello è invece determinata come ¹²

$$c_d = 0.0756 \quad (8.10)$$

Per quanto riguarda le equazioni per \overline{k} ed $\overline{\epsilon}$, esse devono essere modificate nei termini di produzione. Per la prima si ha ancora

$$P = -\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \quad (8.11)$$

ma lo sforzo di Reynolds deve ora essere espresso secondo la (8.7). Nell'equazione per $\overline{\epsilon}$ il termine di produzione

$$c_{\epsilon 1} \frac{\overline{\epsilon}}{\overline{k}} P \quad (8.12)$$

deve anch'esse essere espresso tenendo conto di quanto osservato per la (8.11).

La forma (8.7) è ricavata da Speziale imponendo che essa risulti formalmente indifferente ad una trasformazione di coordinate del tutto generale, comprendente cioè una traslazione ed una rotazione, funzioni del tempo, nel caso limite di turbolenza puramente bidimensionale (cioè con fluttuazioni in due sole direzioni coordinate). Pur non potendo entrare in questo contesto nei dettagli del problema, osserviamo che in generale il tensore degli sforzi di Reynolds non è indifferente ad una trasformazione di coordinate, ma lo diventa [18] per turbolenza bidimensionale. Perchè sia rispettata questa proprietà, è allora necessario che il modello quadratico sia costruito a partire da funzioni indifferenti alla trasformazione, per turbolenza bidimensionale; si può dimostrare che il tensore di deformazione rispetta questa proprietà, come pure il termine del tipo

$$\overline{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - S_{kj} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - S_{ki} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \quad (8.13)$$

che compare nella (8.7).

Accenniamo ora a come questo modello riesce a rimediare ad alcune delle più evidenti deficienze del modello lineare, prendendo come esempi il flusso in un canale, ed il flusso in un condotto a sezione non circolare.

8.1.1 Flusso in un canale

Per il flusso completamente sviluppato in un canale, tutte le derivate in x delle grandezze medie (eccetto la pressione) risultano nulle:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0 \quad (8.14)$$

¹² Nella forma originale del modello figura in realtà una costante c_D , la quale risulta legata alla c_d che compare nella (8.7) dalla relazione $c_d = c_\mu c_D / 2$. Inoltre, la (8.7) è limitata ai flussi statisticamente stazionari qui considerati.

Inoltre, l'unica componente di velocità media non nulla è quella in direzione x , per cui per le altre si ha

$$\bar{v} = \bar{w} \equiv 0 \quad (8.15)$$

Dalla definizione (8.4) di S_{ij} si ha allora

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32} \equiv 0 \quad (8.16)$$

Le uniche componenti di S_{ij} diverse da zero sono pertanto

$$S_{12} = S_{21} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (8.17)$$

Possiamo ora in particolare specializzare al flusso considerato i termini che compaiono nella componente quadratica della (8.7), per sforzi *normali*; la componente lineare è evidentemente nulla per $i = j$ a causa della (8.16). Per le (8.16,8.17) si ha quindi

$$S_{lm} S_{lm} = S_{12}^2 + S_{21}^2 = 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (8.18)$$

Per le (8.14,8.15) si ha

$$\bar{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} \equiv 0 \quad (8.19)$$

$$S_{kj} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = S_{2j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} \quad (8.20)$$

$$S_{ki} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} = S_{2i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_2} \quad (8.21)$$

e per la (8.16)

$$\bar{u}_k \frac{\partial S_{ll}}{\partial x_k} \equiv 0 \quad (8.22)$$

Facendo uso delle (8.14,8.15,8.16,8.17) si ottiene infine

$$S_{kl} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} = S_{12} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + S_{21} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = S_{21} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (8.23)$$

Per lo sforzo normale in direzione assiale si ha allora

$$\bar{u}^2 = \frac{2}{3} \bar{k} - c_d \nu_t \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.24)$$

ossia

$$\bar{u}^2 = \frac{2}{3} \bar{k} + \frac{7}{3} c_d \nu_t \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (8.25)$$

Per lo sforzo normale in direzione trasversale si ha invece

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3}\overline{k} - c_d \nu_t \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \left\{ \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.26)$$

ossia

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3}\overline{k} - \frac{5}{3} c_d \nu_t \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (8.27)$$

Per lo sforzo normale in direzione ortogonale alle precedenti si ha infine

$$\overline{w'^2} = \frac{2}{3}\overline{k} - c_d \nu_t \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \left\{ -\frac{1}{3} \left[2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.28)$$

ossia

$$\overline{w'^2} = \frac{2}{3}\overline{k} - \frac{2}{3} c_d \nu_t \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 \quad (8.29)$$

Il modello quadratico riesce quindi, almeno in questo semplice caso, a riprodurre abbastanza realisticamente l'anisotropia del tensore degli sforzi di Reynolds, risultando $\overline{u'^2} > \overline{w'^2} > \overline{v'^2}$, essendo la costante c_d positiva (8.10). Si noti inoltre che la somma delle (8.25,8.27,8.29) è ancora uguale a $2\overline{k}$, soddisfacendo perciò una condizione essenziale. Si può invece facilmente constatare che lo sforzo di taglio di Reynolds resta inalterato rispetto al modello standard:

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (8.30)$$

8.1.2 Flusso in un condotto a sezione non circolare

Consideriamo ora il flusso in un canale a sezione non circolare. Supponiamo al solito il flusso completamente sviluppato, per cui tutte le derivate in x delle grandezze medie (eccetto la pressione) risultano nulle:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0 \quad (8.31)$$

Aniché derivare la configurazione di flusso che si stabilisce in base al modello quadratico, ricaveremo i valori che gli sforzi di Reynolds normali $\overline{v'^2}$ e $\overline{w'^2}$ assumerebbero sotto l'ipotesi che non si verificano moti secondari, allo scopo di dimostrare che tale ipotesi non può essere valida (una dimostrazione per assurdo). Assumeremo perciò ancora che

$$\overline{v} = \overline{w} = 0 \quad (8.32)$$

per cui

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{23} = S_{32} = 0 \quad (8.33)$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (8.34)$$

$$S_{13} = S_{31} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (8.35)$$

Per gli sforzi normali, il termine che compare nella parte lineare della (8.7) risulta chiaramente nullo sotto l'ipotesi avanzata, vedi la (8.32). Per i termini che compaiono nella componente quadratica della (8.7) risulta, per le (8.33,8.34)

$$S_{lm} S_{lm} = S_{12}^2 + S_{21}^2 + S_{13}^2 + S_{31}^2 = 2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8.36)$$

Per la (8.31), e sotto l'ipotesi (8.32) si ha ancora

$$\bar{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} = 0 \quad (8.37)$$

e poi

$$S_{kj} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = S_{2j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_2} + S_{3j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3} \quad (8.38)$$

$$S_{ki} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} = S_{2i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_2} + S_{3i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_3} \quad (8.39)$$

Per la (8.33) risulta ancora

$$\bar{u}_k \frac{\partial S_{ll}}{\partial x_k} = 0 \quad (8.40)$$

Facendo infine uso delle (8.31,8.32,8.33,8.34) si ottiene

$$S_{kl} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} = S_{12} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + S_{21} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + S_{13} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + S_{31} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = S_{21} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + S_{31} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \quad (8.41)$$

Per lo sforzo normale di Reynolds in direzione y si ha allora

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3} \bar{k} - c_d \nu_t \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[2 \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right) - 4 \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad (8.42)$$

ossia

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3} \bar{k} + c_d \nu_t \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left[-\frac{5}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8.43)$$

Per lo sforzo normale di Reynolds in direzione z si ha invece

$$\overline{w'^2} = \frac{2}{3} \bar{k} - c_d \nu_t \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[2 \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right) - 4 \left(\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \right) \right] \right\} \quad (8.44)$$

ossia

$$\overline{w'^2} = \frac{2}{3}\overline{k} + c_d \nu_t \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 - \frac{5}{3} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8.45)$$

La differenza $\overline{w'^2} - \overline{v'^2}$, che come abbiamo visto compare nel termine sorgente della vorticità media in direzione x , risulta allora in generale non nulla:

$$\overline{w'^2} - \overline{v'^2} = c_d \nu_t \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \left[\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8.46)$$

Più precisamente, tale differenza è nulla solo sugli assi di simmetria diagonali del condotto, riportati in fig. 7.3; in ogni altro punto della sezione essa è non nulla, per cui il modello riesce effettivamente a rendere conto di una produzione di vorticità media, e l'ipotesi di semplice flusso unidirezionale (8.32) risulta perciò evidentemente inapplicabile. Il modello quindi è realmente in grado di prevedere l'insorgere di flussi secondari.

8.1.3 Potenza del modello

È interessante, giunti a questo punto, individuare in cosa risiede la maggiore potenza del modello quadratico rispetto a quello lineare. A questo scopo, partiamo da considerazioni di puro carattere matematico sulla natura della relazione che lega gli sforzi di Reynolds ai gradienti di velocità, cioè quella che abbiamo chiamato la *relazione costitutiva*.

Supponiamo di voler tentare di esprimere gli sforzi di Reynolds come funzione dei gradienti di velocità, oltretutto di due parametri che indichino le scale della velocità e delle lunghezze delle fluttuazioni, introdotte nella Sez. 3.1; per le (3.14,3.23), queste possono essere espresse tramite l'energia cinetica turbolenta \overline{k} ed il suo tasso di dissipazione viscosa $\overline{\epsilon}$. Adottiamo cioè tentativamente una relazione del tipo

$$\overline{u'_i u'_j} = f \left(\frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_n}; \overline{k}, \overline{\epsilon} \right) \quad (8.47)$$

dove gli indici m ed n a secondo membro sono liberi di variare tra 1 e 3. La forma della relazione (8.47) dovrà soddisfare alcune condizioni. Innanzitutto, le dimensioni del secondo membro dovranno essere ovviamente uguali a quelle del primo membro. In secondo luogo, la forma della relazione (8.47) dovrà essere tale da garantire l'invarianza rispetto al sistema di coordinate; ciò richiede che gli indici *muti* (ossia, non implicanti sommatoria) che compaiono a secondo devono essere gli stessi che compaiono a primo membro. Se, come primo tentativo, assumiamo che la (8.47) sia lineare, allora essa potrebbe per esempio assumere la forma

$$\overline{u'_i u'_j} = \alpha_1 \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \quad (8.48)$$

Essa soddisfa la condizione sulle dimensioni se il coefficiente di proporzionalità α_1 ha le dimensioni di una velocità per una lunghezza, condizione verificata se risulta

$$\alpha_1 \propto \frac{\overline{k}^2}{\overline{\epsilon}} \quad (8.49)$$

Inoltre, essa soddisfa certamente la condizione di invarianza rispetto al sistema di coordinate. Si può però facilmente verificare che quest'ultima condizione è ancora soddisfatta se assumiamo la forma

$$\overline{u'_i u'_j} = \alpha_1 \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \alpha_1 S_{ij} \quad (8.50)$$

ancora lineare rispetto ai gradienti di velocità. Gli indici i e j a primo membro possono infatti essere scambiati senza alterarlo, e lo stesso risulta vero per il secondo membro. Questo modello, pur accettabile dal punto di vista formale, non è però soddisfacente dal punto di vista fisico, perchè come detto nella Sez. 3.1 porterebbe ad avere sforzi di Reynolds normali di segno dipendente dal gradiente di velocità, ed inoltre con somma sulle tre direzioni coordinate nulla, anzichè pari a due volte l'energia cinetica turbolenta k . Per ovviare a questo inconveniente aggiungiamo ancora un termine in k , sì da avere

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} + \alpha_1 S_{ij} \quad (8.51)$$

Se il fattore di proporzionalità α_1 è identificato con la viscosità turbolenta ν_t , cambiata di segno, la (8.51) risulta completamente equivalente all'ipotesi di trasporto secondo gradiente (3.7).

Cerchiamo ora di adottare una forma quadratica, aggiungendo a secondo membro della (8.51) termini quadratici nel tensore delle deformazioni. Potremmo allora adottare tentativamente la forma

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} + \alpha_1 S_{ij} + \alpha_2 S_{ij}^2 \quad (8.52)$$

la quale certamente soddisfa la condizione di invarianza rispetto al sistema di riferimento. Non risulta però soddisfatta la condizione che la somma degli sforzi di Reynolds normali sia uguale a zero, in quanto la somma dei termini quadratici ad essi relativi risulta

$$\alpha_2 (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) = 4\alpha_2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_1^2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_2^2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_3^2}{\partial x_3} \right)^2 \right] \quad (8.53)$$

la quale in generale non è nulla. Per eliminare questo inconveniente basta introdurre un termine sottrattivo al contributo quadratico, il quale si attivi solo per sforzi normali, cioè per $i = j$; otteniamo perciò la forma

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} + \alpha_1 S_{ij} + \alpha_2 \left[S_{ij}^2 - \frac{1}{3} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) \delta_{ij} \right] \quad (8.54)$$

Rimane infine da soddisfare la condizione di consistenza dimensionale, per cui α_2 dovrà essere del tipo

$$\alpha_2 \propto \frac{\bar{k}^3}{\bar{\epsilon}^2} \quad (8.55)$$

Ciò spiega perchè il termine quadratico del modello di Speziale (8.7) sia moltiplicato, oltre che per coefficiente adimensionale, per $\nu_t \bar{k} / \bar{\epsilon}$.

La forma (8.54), ancorchè all'incirca la più semplice proponibile a livello quadratico, non è la sola possibile. Possiamo ad esempio adottare un'espressione del tipo

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} + \alpha_1 S_{ij} + \alpha_2 \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \quad (8.56)$$

dove al solito k ed l sono indici di sommatoria; si osservi, incidentalmente, che $S_{kl} S_{kl}$ è cosa diversa dalla somma dei quadrati delle componenti diagonali del tensore di deformazione che compare nella (8.54), essendo

$$S_{kl} S_{kl} = S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2 S_{12}^2 + 2 S_{13}^2 + 2 S_{23}^2 \quad (8.57)$$

L'espressione (8.56) soddisfa ancora la condizione di invarianza rispetto al sistema di coordinate; si riconosce facilmente che essa rappresenta una parte del contributo quadratico nella (8.7). Il termine $S_{ik} S_{kj}$ fa sì che lo sforzo di Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ non dipenda più solamente dai gradienti $\partial \overline{u}_i / \partial x_j$ e $\partial \overline{u}_j / \partial x_i$, ma da tutti i gradienti del tipo $\partial \overline{u}_i / \partial x_k$ e $\partial \overline{u}_k / \partial x_j$, con k che assume i valori 1, 2, 3.

Vediamo quale implicazioni questo comporta p. es. nel caso di flusso in un condotto a sezione non circolare. Per omogeneità con la trattazione della Sez. 7.1.3, adottiamo notazione cartesiana esplicita. Si può allora facilmente verificare che gli sforzi normali $\overline{v'^2}$ e $\overline{w'^2}$ nella forma lineare (8.51) hanno un'espressione del tipo

$$\overline{v'^2} = f(S_{11}, S_{22}, S_{33}; \bar{k}, \bar{\epsilon}) \quad (8.58)$$

$$\overline{w'^2} = f(S_{11}, S_{22}, S_{33}; \bar{k}, \bar{\epsilon}) \quad (8.59)$$

Se assumiamo che il flusso sia completamente sviluppato ($\partial / \partial x \equiv 0$, quindi $S_{11} = 0$), ed inoltre ipotizziamo che non vi siano flussi secondari ($\bar{v} \equiv \bar{w} \equiv 0$, quindi $S_{22} = S_{33} = 0$), la dipendenza dai gradienti di velocità viene a cadere nelle (8.58, 8.59), per cui rimarrà solo il termine $2\bar{k}/3$ della (8.51), cioè si ha $\overline{v'^2} = \overline{w'^2}$ ed il modello non è quindi in grado di prevedere l'insorgere di flussi secondari, per quanto detto nella Sez. 7.1.3. Se invece adottiamo la forma quadratica (8.56), le espressioni per gli sforzi normali $\overline{v'^2}$ e $\overline{w'^2}$ assumono la forma

$$\overline{v'^2} = f(S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}; \bar{k}, \bar{\epsilon}) \quad (8.60)$$

$$\overline{w'^2} = f(S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{13}, S_{23}; \bar{k}, \bar{\epsilon}) \quad (8.61)$$

Per flusso completamente sviluppato, *se anche assumiamo* (per assurdo) che non vi siano moti secondari per cui $S_{23} = 0$ (oltrechè $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$ come già osservato), le (8.60, 8.61) prendono la forma

$$\overline{v'^2} = f(S_{12}; \bar{k}, \bar{\epsilon}) \quad (8.62)$$

$$\overline{w'^2} = f(S_{13}; \bar{k}, \bar{\epsilon}) \quad (8.63)$$

dove $S_{12} = \partial \overline{u} / \partial y$ e $S_{13} = \partial \overline{u} / \partial z$ sono sicuramente diversi tra loro e diversi da zero (eccetto che sugli assi di simmetria). Risulta pertanto $\overline{v'^2} \neq \overline{w'^2}$, e sussiste quindi un termine sorgente nell'equazione (7.38) per la vorticità media in direzione x , per cui si stabiliscono in ogni caso moti secondari, contrariamente all'ipotesi avanzata.

Da quanto detto risulta perciò che adottare espressioni nonlineari consente una maggiore flessibilità del modello. Speciale poi aggiunge nel suo modello quadratico (8.7) anche un termine del tipo

$$2 \overline{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} - 2 S_{kj} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - 2 S_{ki} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} - \frac{\delta_{ij}}{3} \left(2 \overline{u}_k \frac{\partial S_{ll}}{\partial x_k} - 4 S_{kl} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_k} \right) \quad (8.64)$$

in quanto esso ha le stesse dimensioni del termine precedentemente visto nella (8.56); il termine tra parentesi quadre ha evidentemente il compito di non alterare la somma dei tre sforzi di Reynolds normali. Si osservi però che mentre il termine

$$- 2 S_{kj} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - 2 S_{ki} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \quad (8.65)$$

è anch'esso quadratico nel gradiente di velocità, il termine

$$2 \bar{u}_k \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} \quad (8.66)$$

è invece il prodotto di una velocità per una *derivata seconda* di componenti di velocità. Il modello di Speziale quindi si discosta in realtà dalla formulazione generale di modello nonlineare, vedi p. es. la (8.1).

Altri modelli quadratici sono stati proposti recentemente [19, 20, 21, 22], che tuttavia non riportiamo, essendo ormai disponibile un modello cubico, verosimilmente più potente.

8.2 Modello $k-\epsilon$ cubico.

Il gruppo guidato da Launder ritiene [23, 24, 25] che la forma quadratica non sia sufficientemente flessibile, e propone per la relazione costitutiva una forma cubica nei tensori di deformazione e rotazione, qui riportata:

$$\begin{aligned} \overline{u'_i u'_j} = & - \nu_t \left(S_{ij} + \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} + \right. \\ & + c_1 \nu_t \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left(S_{ik} S_{kj} - S_{kl} S_{kl} \frac{\delta_{ij}}{3} \right) + \\ & + c_2 \nu_t \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left(\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki} \right) + \\ & + c_3 \nu_t \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left(\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \Omega_{lk} \Omega_{lk} \frac{\delta_{ij}}{3} \right) + \\ & + c_4 c_\mu \nu_t \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \right)^2 \left(S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li} - \frac{2}{3} S_{km} \Omega_{lm} \delta_{ij} \right) S_{kl} + \\ & + c_5 c_\mu \nu_t \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \right)^2 \left(S_{ik} S_{jl} - S_{mk} S_{ml} \frac{\delta_{ij}}{3} \right) S_{kl} + \\ & + c_6 c_\mu \nu_t \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \right)^2 S_{ij} S_{kl} S_{kl} + \\ & + c_7 c_\mu \nu_t \left(\frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \right)^2 S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \end{aligned} \quad (8.67)$$

Osserviamo che i termini in c_1, c_2, c_3 sono quadratici, mentre quelli in c_4, c_5, c_6 sono cubici. In questa espressione la viscosità turbolenta è definita come

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}} \quad (8.68)$$

dove

$$c_\mu = 0.3 \frac{1 - \exp[-0.36 \exp(0.75 S)]}{1 + 0.35 S^{1.5}} \quad (8.69)$$

essendo la grandezza S un *invariante di deformazione* definito come

$$S = \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{2} S_{kl} S_{kl}} \quad (8.70)$$

Il fattore f_μ è introdotto per tener conto di effetti di prossimità alla parete nello strato limite, o di basso numero di Reynolds. Rimandiamo la discussione della sua espressione al Cap. 9.4, dedicato a questi effetti: ci basta per il momento citare che, al di fuori delle condizioni appena citate, risulta

$$f_\mu = 1 \quad (8.71)$$

I coefficienti del modello sono identificati come

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.1 \\ c_2 &= 0.1 \\ c_3 &= 0.26 \\ c_4 &= -10 c_\mu^2 \\ c_5 &= 0 \\ c_6 &= -5 c_\mu^2 \\ c_7 &= 5 c_\mu^2 \end{aligned} \quad (8.72)$$

Si noti che il coefficiente c_5 è posto a zero; si può infatti provare [24] che il termine relativo coincide con quello in c_6 . Si può inoltre verificare che nel termine in c_4 della (8.67) in realtà risulta

$$S_{km} \Omega_{lm} S_{kl} = 0 \quad (8.73)$$

Analogamente a quanto visto per il modello quadratico di Speziale nella Sez. 8.1, una modifica si impone nei termini di produzione delle equazioni per \bar{k} ed $\bar{\epsilon}$, dovendo utilizzare l'espressione (8.67) per lo sforzo di Reynolds che compare nel termine

$$P = -\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \quad (8.74)$$

dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta, e di conseguenza anche nell'analogo termine

$$c_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} P \quad (8.75)$$

dell'equazione per il tasso di dissipazione viscosa. Quest'ultima in realtà contempla anche un termine aggiuntivo, il cui effetto si risente però solo nello strato limite o in flussi a basso numero di Reynolds, per cui sarà anch'esso trattato nel Cap. 9.4.

Capitolo 9

L'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato

9.1 Modellizzazione dei flussi di Reynolds

Abbiamo visto nella Sez. 5.5 che, nell'ambito di quella che abbiamo chiamato la modellizzazione standard, il flusso di Reynolds (proporzionale, a meno del fattore ρc_p , al flusso di calore dovuto alla turbolenza) è descritto tramite l'ipotesi di trasporto secondo gradiente nella forma (5.55), che qui riportiamo

$$\overline{u'_i T'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (9.1)$$

che è quindi una forma del tipo

$$\overline{u'_i T'} = f\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i}; \bar{k}, \bar{\epsilon}\right) \quad (9.2)$$

Nelle Sezz. 7.2.1, 7.2.2 abbiamo però osservato come la forma (9.2) non sia soddisfacente. Infatti se consideriamo l'equazione di conservazione per i flussi di Reynolds (5.52), possiamo facilmente constatare che i termini di produzione (5.48) e galleggiamento (5.49) (i quali sono *esatti* nel contesto di una modellizzazione con chiusura sui momenti secondi, cioè non richiedono modellizzazione) hanno una forma tale da dar luogo ad effetti di cui non è possibile tenere conto tramite la (9.2).

Anche in questo caso, la via maestra per superare i limiti della modellizzazione standard è quella di adottare appunto una modellizzazione con chiusura sui momenti secondi, la quale coinvolge tuttavia problemi di tutt'altro ordine rispetto alla prima. Parallelamente a quanto fatto con i modelli nonlineari per affrontare il problema dell'anisotropia del tensore degli sforzi di Reynolds, si è cercato anche per questi problemi una soluzione relativamente semplice che consentisse di catturare almeno in parte gli effetti in questione, senza però stravolgere la struttura del modello computazionale.

Questa linea di pensiero ha portato alla formulazione dell'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato (*Generalized Gradient Diffusion Hypothesis*, o GGDH per concisione), esprimibile come [26]

$$\overline{u'_i T'} = -C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \xi \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \eta \beta_i \bar{T}^{\prime 2} \right) \quad (9.3)$$

Questa forma funzionale consente di recuperare la dipendenza del flusso di Reynolds dai gradienti di velocità, oltre che da quelli di temperatura. Essa supplisce perciò in buona misura alle limitazioni discusse nella Sez. 7.2.1, e consente anche di tenere in conto esplicitamente gli effetti di galleggiamento,

che non compaiono invece nella modellizzazione standard, causando perciò le ulteriori limitazioni discusse nella Sez. 7.2.2. Inoltre, come vedremo nella Sez. 9.4, l'aver introdotto una dipendenza funzionale da tre componenti $\overline{u'_i u'_k}$ dello sforzo di Reynolds consente di descrivere adeguatamente gli effetti portati dall'anisotropia del tensore dello sforzo di Reynolds sullo scambio di calore in prossimità della parete.

Si osservi però che l'espressione esplicita dei flussi di Reynolds conseguente dalla (9.2) è notevolmente complessa, in quanto nell'espressione per il flusso $\overline{u'_i T'}$ compaiono a secondo membro tutti e tre i flussi $\overline{u'_k T'}$, per $k = 1, 2, 3$. I flussi possono essere ricavati in forma esplicita invertendo il sistema, che si ricava immediatamente dalla (9.2)

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \overline{u'_1 T'} \\ \overline{u'_2 T'} \\ \overline{u'_3 T'} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \quad (9.4)$$

dove \mathbf{A} indica la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} & C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} & C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \\ C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} & 1 + C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} & C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \\ C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} & C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} & 1 + C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

e \mathbf{B} indica il vettore

$$\mathbf{B} = -C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \begin{bmatrix} \overline{u_1'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_1 \bar{T}^{\prime 2} \\ \overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_2'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_2' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_2 \bar{T}^{\prime 2} \\ \overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_2' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_3'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_3 \bar{T}^{\prime 2} \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Riportiamo a titolo di esempio l'espressione esplicita dei flussi $\overline{u'_1 T'}$ e $\overline{u'_2 T'}$:

$$\begin{aligned} \overline{u'_1 T'} &= -\frac{C}{\Delta} \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left\{ \left(\overline{u_1'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_1 \bar{T}^{\prime 2} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \left[1 + C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right) + C^2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}^2} \xi^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \right) \right] + \\ &+ \left(\overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_2'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_2' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_2 \bar{T}^{\prime 2} \right) \left[C^2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}^2} \xi^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right) - C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right] + \\ &+ \left. \left(\overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_2' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_3'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_3 \bar{T}^{\prime 2} \right) \left[C^2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}^2} \xi^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \right) - C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right] \right\} \quad (9.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u_2' T'} &= -\frac{C}{\Delta} \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left\{ \left(\overline{u_1'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_1 \bar{T}'^2 \right) \cdot \right. \\
&\cdot \left[C^2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}^2} \xi^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right) - C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \right] + \\
&+ \left(\overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_2'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_2' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_2 \bar{T}'^2 \right) \cdot \\
&\cdot \left[1 + C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right) + C^2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}^2} \xi^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} \right) \right] + \\
&+ \left(\overline{u_1' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_2' u_3'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u_3'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} + \eta \beta_3 \bar{T}'^2 \right) \left[C^2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}^2} \xi^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \right) - C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \right] \left. \right\} \\
\end{aligned} \tag{9.8}$$

avendo indicato con Δ il determinante della matrice \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1 + C^2 \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}^2} \xi^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) + \\
&+ C^3 \frac{\bar{k}^3}{\bar{\epsilon}^3} \xi^3 \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} \right) \\
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Specializzando al caso di flusso in un canale ad asse orizzontale, con profilo di velocità (ma non di temperatura, vedi Sez. 6.1) completamente sviluppato, si ha

$$\overline{u_1' T'} = -C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left[\overline{u_1'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} - \left(\overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_2'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \eta \beta_2 \bar{T}'^2 \right) C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \xi \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right] \tag{9.10}$$

$$\overline{u_2' T'} = -C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left(\overline{u_1' u_2'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u_2'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \eta \beta_2 \bar{T}'^2 \right) \tag{9.11}$$

essendo in questo caso, tra l'altro, il determinante Δ unitario.

Una valutazione sistematica delle costanti del modello GGDH [27] porta ai seguenti valori:

$$C = 0.2 \tag{9.12}$$

$$\xi = 0.6 \tag{9.13}$$

$$\eta = 0.6 \tag{9.14}$$

Osserviamo che l'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato può essere ricavata per altra via, nell'ambito dei modelli cosiddetti ASM (*Algebraic Stress Models*) o, più specificamente, AFM (*Algebraic Flux Models*), ai quali dedicheremo un cenno nell'ambito della modellizzazione con chiusura sui momenti secondi. La complessità dell'espressione dei flussi di Reynolds è tipica di tali modelli.

Per quanto riguarda l'effetto del galleggiamento, occorre osservare che esso è tenuto in conto nella (9.3) per mezzo di un termine in cui compare la varianza della temperatura \bar{T}'^2 , per la quale quindi occorre derivare un'espressione.

9.2 Equazione per la varianza della temperatura

Per ricavare l'equazione per la varianza della temperatura, partiamo dall'equazione per i valori istantanei della temperatura, nelle forme equivalenti (5.20) oppure (5.23), moltiplichiamo per la fluttuazione T' , ed infine applichiamo l'operatore di media. Il prodotto della (5.23) per T' dà, avendo utilizzato l'equazione di continuità (1.1) per esprimere convenientemente il termine convettivo, la forma

$$T' \frac{\partial T}{\partial t} + u_k T' \frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\nu}{\sigma} T' \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} \quad (9.15)$$

Applichiamo quindi l'operatore di media ai differenti termini di questa equazione. La media del primo termine a primo membro, di transiente, è nulla per l'ipotesi adottata di flusso statisticamente stazionario. Il secondo termine a primo membro, applicando la decomposizione di Reynolds a u_k e T , dà

$$(\bar{u}_k + u'_k) T' \frac{\partial (\bar{T} + T')}{\partial x_k} = \bar{u}_k T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \bar{u}_k T' \frac{\partial T'}{\partial x_k} + u'_k T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + u'_k T' \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (9.16)$$

ed effettuando la media

$$\frac{1}{2} \bar{u}_k \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} + \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \overline{u'_k \frac{\partial T'^2}{\partial x_k}} \quad (9.17)$$

L'ultimo termine della (9.17) può essere manipolato grazie all'equazione di continuità nella forma (1.36) applicabile alle componenti fluttuanti, dando quindi

$$\frac{1}{2} \bar{u}_k \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} + \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'_k T'^2}}{\partial x_k} \quad (9.18)$$

Applichiamo infine la decomposizione di Reynolds al termine viscoso, a secondo membro della (9.15):

$$\frac{\nu}{\sigma} T' \frac{\partial^2 (\bar{T} + T')}{\partial x_k \partial x_k} \quad (9.19)$$

L'operazione di media lascia il solo termine

$$\frac{\nu}{\sigma} \overline{T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k \partial x_k}} \quad (9.20)$$

per esprimere il quale consideriamo dapprima che

$$\frac{\partial T'^2}{\partial x_k} = 2 T' \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (9.21)$$

$$\frac{\partial^2 T'^2}{\partial x_k \partial x_k} = 2 T' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k \partial x_k} + 2 \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (9.22)$$

Allora il termine (9.20) è esprimibile come

$$\frac{1}{2} \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\nu}{\sigma} \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k}} \quad (9.23)$$

La forma mediata della (9.15) risulta quindi, dopo aver moltiplicato per 2 per eliminare i fattori $\frac{1}{2}$, come

$$\overline{u_k} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} + 2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u'_k T'^2}}{\partial x_k} = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_k \partial x_k} - 2 \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \quad (9.24)$$

L'ultimo termine a secondo membro è detto *tasso di dissipazione scalare* (o semplicemente *dissipazione scalare*), ed indicato con $\overline{\chi}$:

$$\overline{\chi} = 2 \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \quad (9.25)$$

L'equazione della varianza della temperatura può infine essere posta nella forma

$$\overline{u_k} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} = -2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} + \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_k T'^2}}{\partial x_k} - \overline{\chi} \quad (9.26)$$

Analizziamo il significato dei diversi termini; un confronto con i termini dell'equazione dell'energia cinetica turbolenta (1.74) (la quale può essere vista come un'equazione per la semisomma delle *varianze* delle componenti di velocità) può aiutare a chiarirne il significato. Il termine a primo membro rappresenta ovviamente la convezione della varianza della temperatura:

$$\overline{u_k} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} \quad (9.27)$$

Passando ai termini a secondo membro, il secondo

$$\frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_k \partial x_k} \quad (9.28)$$

rappresenta ovviamente il trasporto molecolare della varianza della temperatura, mentre il terzo

$$- \frac{\partial \overline{u'_k T'^2}}{\partial x_k} \quad (9.29)$$

rappresenta il trasporto turbolento (e risulta perciò di gran lunga superiore al precedente, come si può facilmente constatare mediante una valutazione dell'ordine di grandezza, analogamente a quanto fatto nella Sez. 1.2). Il termine di dissipazione scalare rappresenta la distruzione delle fluttuazioni di temperatura ad opera della conducibilità termica, che si verifica a scale dell'ordine di grandezza di quella di Kolmogorov. Infine, il primo termine

$$- 2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} \quad (9.30)$$

rappresenta il meccanismo di *produzione* delle fluttuazioni di temperatura, che come si vede può aversi solo in presenza di gradienti di temperatura media.

La forma (9.26) dell'equazione per la varianza della temperatura non comporta approssimazioni ma, come sempre, alcuni suoi termini risultano non chiusi. In particolare, nel contesto della modellizzazione con chiusura sui momenti primi fin qui considerata, i termini di produzione, trasporto turbolento e dissipazione scalare devono essere modellati, mentre il termine di trasporto molecolare, peraltro piccolo, è esatto. Per poter utilizzare quest'equazione è pertanto necessario modellare i termini non chiusi. Analizzeremo nella Sez. 9.2.1 la forma che si ricava sotto l'ipotesi di trasporto secondo gradiente standard, rinunciando invece a derivare quella secondo l'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato, che come abbiamo visto è non poco complessa. Infine, nella Sez. 9.2.2

daremo un'espressione per la varianza della temperatura che si può tentativamente utilizzare qualora non si intenda risolvere per essa un'apposita equazione di conservazione.

Osserviamo che talora si risolve anziché un'equazione per $\overline{T'^2}$, un'equazione per $\overline{T'^2}/2$, per analogia con l'espressione dell'energia cinetica turbolenta. Tale equazione, che ovviamente altro non è che la (9.26) divisa per 2, è abitualmente scritta nella forma

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{T'^2}/2}{\partial x_k} = -\overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \overline{T'^2}/2}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_k T'^2}/2}{\partial x_k} - \bar{\epsilon}_T \quad (9.31)$$

dove la dissipazione scalare è in questo caso definita come

$$\bar{\epsilon}_T = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_k} \quad (9.32)$$

risultando perciò la metà della $\bar{\chi}$ definita nella (9.24).

9.2.1 Equazione per $\overline{T'^2}$ per trasporto secondo gradiente standard

In base all'ipotesi di trasporto adottata, il termine di produzione (9.30) può essere semplicemente espresso come

$$-2\overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} = 2\frac{\nu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (9.33)$$

Il termine di trasporto turbolento per la varianza della temperatura può essere modellato in modo simile a quello per la temperatura media, quindi si ha

$$-\overline{u'_k T'^2} = \frac{\nu_t}{\sigma_{T'^2}} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} \quad (9.34)$$

Si noti che il numero di Prandtl turbolento per la varianza della temperatura, qui indicato come $\sigma_{T'^2}$, può essere specificato indipendentemente da σ_T , per quanto in genere si tende a porre

$$\sigma_{T'^2} = \sigma_t = 0.7 \quad (9.35)$$

Resta da modellare il tasso di dissipazione scalare. Kolmogorov ha per primo suggerito che esso possa essere preso proporzionale alla varianza delle fluttuazioni, divisa per una scala dei tempi, che nel modello k - ϵ è data ovviamente dal rapporto $\bar{k}/\bar{\epsilon}$. Si ha quindi il modello

$$\bar{\chi} = c_\chi \frac{\bar{\epsilon} \overline{T'^2}}{\bar{k}} \quad (9.36)$$

dove il valore della costante di proporzionalità è determinato come

$$c_\chi = 2.0 \quad (9.37)$$

La (9.36) esprime il concetto intuitivo secondo il quale la dissipazione scalare è tanto più alta quanto più grande è la varianza della temperatura, ed è inoltre inversamente proporzionale ad una scala dei tempi caratteristica. Una volta sostituiti i differenti modelli per i termini non chiusi, la forma modellata dell'equazione per la varianza della temperatura risulta allora

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} = 2\frac{\nu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_{T'^2}} \right) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} \right] - c_\chi \frac{\bar{\epsilon} \overline{T'^2}}{\bar{k}} \quad (9.38)$$

9.2.2 Espressione algebrica per $\overline{T'^2}$

Dalla (9.38) è possibile ricavare un'espressione algebrica semplificata per la varianza, trascurando in essa i termini convettivi e diffusivi (molecolari e turbolenti). Abbiamo incontrato una situazione analoga per l'energia cinetica turbolenta; nello strato limite turbolento i termini corrispondenti sono anch'essi nulli, vedi Sez. 4.1. Eguagliando quindi il termine di produzione a quello di dissipazione scalare nella (9.38), si ricava

$$\overline{T'^2} = \frac{2}{c_\chi} \frac{\nu_t}{\sigma_T} \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (9.39)$$

Questa espressione è evidentemente meno accurata della (9.38), ma evita il ricorso ad un'equazione di conservazione per la varianza della temperatura.

9.3 Modello semplificato

Abbiamo osservato come la forma GGDH completa data dalla (9.3) risulti in espressioni particolarmente complesse per gli sforzi di Reynolds, vedi (9.7,9.8). Si adotta talvolta [28, 29] una forma notevolmente semplificata, qui riportata:

$$\overline{u'_i T'} = -C \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \eta \beta_i \overline{T'^2} \right) \quad (9.40)$$

in cui quindi la dipendenza dai gradienti di velocità è cassata; ciò comporta evidentemente che il modello semplificato non è più in grado di tenere in conto gli effetti ad essi dovuti. Tuttavia, poichè il flusso di Reynolds ora compare solo a primo membro, la sua espressione è enormemente semplificata. Il modello è comunque ancora in grado di tener conto degli effetti di trasporto non secondo gradiente dovuti alle tre componenti del gradiente di temperatura media, degli effetti di galleggiamento, ed in prossimità della parete, che andiamo ora ad esaminare. Launder [28] suggerisce in questo caso per la costante C il valore

$$C = 0.3 \quad (9.41)$$

9.4 Effetti in prossimità della parete

Nello scambio termico tra una parete ed il fluido che la lambisce, il trasferimento di calore è controllato da quanto avviene nelle immediate vicinanze della parete [28]. Affinchè un modello di turbolenza possa riprodurre con ragionevole successo il flusso termico, è allora necessario che essa riproduca in maniera soddisfacente le caratteristiche del campo turbolento nelle immediate vicinanze della parete. Ciò indica che un trattamento dello strato limite mediante *wall functions*, come descritto nei Capp. 3.4.1 e 5.6, darà verosimilmente risultati modesti. Sarà perciò consigliabile ricorrere, qualora lo scambio con la parete sia importante, ai più potenti modelli che risolvono in dettaglio lo strato limite, descritti nel Cap. 9.4. Inoltre, la (9.3) o, equivalentemente, la forma semplificata (9.40), contengono la dipendenza dai gradienti di temperatura media nella forma

$$\overline{u'_i u'_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_1} + \overline{u'_i u'_2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} + \overline{u'_i u'_3} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3} \quad (9.42)$$

Nel caso di scambio tra una parete ortogonale all'asse x_2 e fluido, il termine di gradiente di temperatura media di gran lunga prevalente è $\partial \bar{T} / \partial x_2$. Poichè il flusso di interesse è $\overline{u_2' T'}$, ne consegue che riveste particolare importanza il termine

$$\overline{u_2'^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_2} \quad (9.43)$$

in cui compare la sforzo di Reynolds normale $\overline{u_2'^2}$ nella componente fluttuante di velocità normale alla parete. Abbiamo visto nella Sez. 7.1.2 che tale sforzo normale va a zero in prossimità della parete più rapidamente che non gli altri, $\overline{u_1'^2}$ e $\overline{u_3'^2}$. Per poter aspirare a previsioni accurate dello scambio termico tra parete e fluido, è perciò necessario utilizzare un modello che riproduca tale particolare comportamento di $\overline{u_2'^2}$ nello strato limite; ciò non è ovviamente possibile con i modelli di turbolenza lineari, a causa della loro sostanziale isotropia. I modelli nonlineari, nella loro versione specializzata per flussi in prossimità delle parete che vedremo nel Cap. 9.4, consentono invece di affrontare adeguatamente il problema, quando utilizzati congiuntamente all'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato.

Capitolo 10

Modelli a basso numero di Reynolds

10.1 Parametri caratteristici

Abbiamo avuto occasione di sottolineare, nei capitoli precedenti, l'importanza che il pur sottile strato limite che si stabilisce in prossimità delle pareti esercita sul flusso nel suo complesso. In particolare, nella Sez. 7.1.2 abbiamo osservato come quanto avviene in prossimità della parete dia luogo ad una inaspettata sensibilità del flusso alla curvatura della parete stessa; nella Sez. 9.4 abbiamo poi evidenziato l'importanza di tali effetti sullo scambio termico tra parete e fluido.

Da quanto detto si ravvisa l'opportunità di adottare una descrizione per lo strato limite più accurata di quella basata sulle *wall functions*, riportata nei Capp. 3.4.1 e 5.6. Questa migliorata descrizione deve quindi essere basata sulla risoluzione delle equazioni mediate del moto anche nello strato limite, fino ad arrivare alla parete. Ciò comporta ovviamente un'aumento considerevole della potenza computazionale richiesta, poichè diviene necessario aggiungere numerosi punti di calcolo in prossimità della parete (per risolvere gli elevati gradienti), ma questo va inteso come il prezzo da pagare per arrivare ad una migliore riproduzione del campo di moto e dello scambio termico.

Prima di tentare questa strategia, è opportuno però chiedersi se le equazioni che abbiamo sin qui ricavato, per condizioni di flusso *lontano* dalle pareti, siano ancora valide quando applicate in prossimità delle stesse. Per procedere a questa analisi, cerchiamo di definire un parametro che possa essere usato per indicare in quale misura un punto generico del campo di flusso è influenzato dalla presenza delle pareti. Questo potrebbe per esempio essere un numero di Reynolds *locale*, basato sulla distanza y dalla parete:

$$Re_y = \frac{u^* y}{\nu} = \frac{\sqrt{k} y}{\nu} \quad (10.1)$$

dove u^* indica una scala caratteristica locale della fluttuazione di velocità, vedi Sez. (3.1), che possiamo pertanto identificare con la radice quadrata dell'energia cinetica turbolenta secondo la (3.14), come evidenziato nel secondo passaggio. Si tratta pertanto di un numero di Reynolds che coinvolge quantità relative alla turbolenza, piuttosto che al moto medio.

La definizione (10.1) è senz'altro consona allo studio del flusso in prossimità della parete; tuttavia, il campo di applicabilità dei modelli che andiamo a descrivere in questo capitolo è in realtà più ampio. Analizzando quanto avviene nello strato limite, abbiamo osservato nel Cap. 3.4.1 che, avvicinandosi alla parete, ad un certo punto gli sforzi viscosi (dovuti cioè alla viscosità molecolare) diventano importanti rispetto agli sforzi di Reynolds. Questo però in effetti non avviene solo in prossimità della parete, ma anche in altre situazioni in cui la turbolenza è debole. Tra queste possiamo ovviamente

citare il caso di flussi in cui il numero di Reynolds (basato su parametri globali) è basso, cioè prossimo al valore che determina la transizione tra flusso laminare e turbolento. Ancora, nel flusso a valle di una griglia (la quale agisce come generatrice di turbolenza), schematizzato nella fig. 3.3, l'intensità delle fluttuazioni turbolente va gradualmente decadendo, a causa dell'assenza di gradienti di velocità media, e di conseguenza dell'annullarsi del termine di produzione (1.71) nell'equazione per l'energia cinetica turbolenta (1.74). Ne segue che ad un certo punto gli sforzi di Reynolds diventeranno di un ordine di grandezza paragonabile a quello degli sforzi molecolari, contrariamente alla situazione tipica, vedi (1.44).

Al fine di estendere l'applicabilità dei modelli a quest'ultime condizioni di flusso, è allora consigliabile definire il *numero di Reynolds turbolento*, basato non su una distanza dalla parete, ma piuttosto sulla scala delle lunghezze del moto turbolento, introdotta nella Sez. 3.1 e indicata come l^* :

$$Re_t = \frac{u^* l^*}{\nu} = \frac{\sqrt{\bar{k}} \bar{k}^{3/2} / \bar{\epsilon}}{\nu} = \frac{\bar{k}^2}{\nu \bar{\epsilon}} \quad (10.2)$$

avendo utilizzato per l^* l'espressione basata su \bar{k} e $\bar{\epsilon}$, già citata (3.23). La definizione (10.2) è ugualmente applicabile a flussi in prossimità della pareti, oppure lontani da essa, a differenza della (10.1). Si noti che Re_t così definito risulta proporzionale al rapporto tra la viscosità turbolenta come definita nel modello k - ϵ e la viscosità molecolare, essendo per la (3.25)

$$Re_t = \frac{1}{c_\mu} \frac{\nu_t}{\nu} \quad (10.3)$$

Equivalentemente si può scrivere

$$\frac{\nu_t}{\nu} = c_\mu Re_t \quad (10.4)$$

Nell'ambito della modellizzazione con chiusura sui momenti primi (lineare), il rapporto ν_t/ν è anche uguale al rapporto tra lo sforzo di Reynolds di taglio e l'analogo sforzo viscoso. Il numero di Reynolds turbolento va a zero in prossimità della parete (ricordiamo che \bar{k} si annulla alla parete, mentre $\bar{\epsilon}$ assume un valore finito, come vedremo meglio fra breve), e tende a valori molto bassi anche nelle situazioni citate di flusso, p.es. a grande distanza da una griglia, quando lo sforzo viscoso diventa cioè importante; in generale, possiamo dire che gli effetti della viscosità molecolare andrebbero tenuti in conto laddove si verifica la condizione $Re_t < 100$. Chiameremo perciò i flussi di cui ci occupiamo in questo capitolo *flussi a basso numero di Reynolds*, con l'intesa che ciò stia ad indicare qualsiasi situazione in cui gli sforzi viscosi siano comparabili, o preponderanti, rispetto agli sforzi di Reynolds. Analogo termine useremo per i modelli intesi a tenere conto di questi effetti.

10.2 Peculiarità dei flussi a basso Re

Analizziamo ora il comportamento dei flussi a basso numero di Reynolds, nei suoi diversi risvolti.

10.2.1 Comportamento in prossimità della parete

Abbiamo visto nella Sez. 7.1.2 che le componenti di velocità fluttuante, in prossimità di una parete normale alla direzione y possono essere poste nella forma (7.25–7.27), che riportiamo qui per comodità in forma più compatta

$$\begin{aligned}
u' &= a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots \\
v' &= + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots \\
w' &= c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + \dots
\end{aligned} \tag{10.5}$$

dove evidentemente i coefficienti a_n , b_n e c_n sono legati alle derivate spaziali di ordine n delle componenti di velocità, per esempio

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n u'}{\partial y^n} \tag{10.6}$$

Tali coefficienti sono evidentemente funzioni a valor medio nullo, in quanto la media delle fluttuazioni deve essere zero. Se allora esaminiamo l'andamento dello sforzo di Reynolds di taglio $\overline{u'v'}$, dalla (10.5) risulta

$$\overline{u'v'} = \overline{a_1 b_2} y^3 + (\overline{a_2 b_2} + \overline{a_1 b_3}) y^4 + \dots \tag{10.7}$$

Concentrando l'attenzione sul termine più significativo per valori di y piccoli, ne segue che nelle immediate vicinanze della parete lo sforzo di taglio di Reynolds ha un andamento del tipo

$$\overline{u'v'} \propto y^3 \tag{10.8}$$

Vediamo ora quale andamento dello sforzo di taglio di Reynolds è invece previsto dal modello k - ϵ standard, secondo l'ipotesi di trasporto secondo gradiente, che per lo strato limite (linee di flusso parallele alla parete ¹, per cui $\bar{v} = 0$) si scrive

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\epsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \tag{10.9}$$

Esaminiamo quindi la dipendenza dalla distanza y dalla parete dei diversi fattori che contribuiscono alla (10.9). Per l'energia cinetica turbolenta si trova facilmente dalla (10.5)

$$\begin{aligned}
\bar{k} &= \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2} = \\
&= \frac{\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}}{2} y^2 + (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y^3 + \left(\frac{\overline{a_2^2} + \overline{b_2^2} + \overline{c_2^2}}{2} + \overline{a_1 a_3} + \overline{c_1 c_3} \right) y^4 + \dots
\end{aligned} \tag{10.10}$$

e quindi limitandoci al termine principale

$$\bar{k} \propto y^2 \tag{10.11}$$

Per determinare l'andamento di $\bar{\epsilon}$ in prossimità della parete, osserviamo che dalla sua definizione (1.72) si ha nel caso in esame (in prossimità della parete i gradienti in direzione normale ad essa sono in generale assolutamente preponderanti rispetto a quelli nelle altre direzioni)

$$\bar{\epsilon} = \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2} \right] \tag{10.12}$$

per cui, prendendo in considerazione le derivate delle tre componenti della (10.5), che risultano

¹Si noti che per questo tipo di flusso i modelli nonlineari danno per lo sforzo di taglio la stessa espressione del modello lineare

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial y} &= a_1 + 2 a_2 y + 3 a_3 y^2 + \dots \\
\frac{\partial v'}{\partial y} &= 2 b_2 y + 3 b_3 y^2 + \dots \\
\frac{\partial w'}{\partial y} &= c_1 + 2 c_2 y + 3 c_3 y^2 + \dots
\end{aligned} \tag{10.13}$$

si ottiene

$$\bar{\epsilon} = \nu (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) + 4\nu (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y + \nu \left[4(\overline{a_2^2} + \overline{b_2^2} + \overline{c_2^2}) + 6(\overline{a_1 a_3} + \overline{c_1 c_3}) \right] y^2 + \dots \tag{10.14}$$

Quindi, $\bar{\epsilon}$ tende ad un valore costante (non nullo) in prossimità della parete. Osserviamo che in particolare alla parete è $\partial v'/\partial y = 0$ per la (7.24), per cui la (10.12) in corrispondenza ad essa si riduce a

$$\bar{\epsilon} = \nu \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2 \right] \tag{10.15}$$

Per quanto riguarda poi il gradiente di velocità media, poichè quest'ultima ha un andamento lineare nel sottostrato laminare (4.28), esso sarà costante nelle immediate vicinanze della parete. Se allora sostituiamo nella (10.9) le dipendenze dei vari fattori dalla distanza dalla parete, troviamo che il modello k - ϵ standard prevede che lo sforzo di taglio vari in prossimità della parete come

$$\overline{u'v'} \propto y^4 \tag{10.16}$$

in evidente contrasto con la (10.8). Abbiamo quindi una prima indicazione sulla non idoneità del modello k - ϵ , nella forma vista finora e valida per alti numeri di Reynolds, a riprodurre le caratteristiche del flusso nello strato limite. Sarà quindi necessario modificare il modello per adeguarlo al calcolo dello strato limite.

10.2.2 Condizioni al contorno per la dissipazione viscosa

Un problema, per quanto di minore rilevanza, che si pone nella risoluzione di flussi in prossimità di una parete è quello di assegnare le condizioni al contorno per il tasso di dissipazione viscosa $\bar{\epsilon}$, che come abbiamo visto assume alla parete il valore (10.15), ossia, per la (10.14) (scritta per $y = 0$)

$$\bar{\epsilon} = \nu (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) \tag{10.17}$$

Per esprimere le derivate indicate, possiamo osservare che il coefficiente $(\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2})$ compare come coefficiente del termine di grado più basso in y dell'equazione (10.10) che dà l'andamento in prossimità della parete dell'energia cinetica turbolenta. Derivando una prima volta la (10.10) otteniamo

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial y} = (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) y + 3(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y^2 + 2(\overline{a_2^2} + \overline{b_2^2} + \overline{c_2^2} + 2\overline{a_1 a_3} + 2\overline{c_1 c_3}) y^3 + \dots \tag{10.18}$$

e derivando ulteriormente

$$\frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial y^2} = (\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2) + 6(\bar{a}_1 \bar{a}_2 + \bar{c}_1 \bar{c}_2) y + 6(\bar{a}_2^2 + \bar{b}_2^2 + \bar{c}_2^2 + 2\bar{a}_1 \bar{a}_3 + 2\bar{c}_1 \bar{c}_3) y^2 + \dots \quad (10.19)$$

Quindi, alla parete ($y = 0$) vale l'eguaglianza

$$\bar{\epsilon} = \nu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial y^2} \quad (10.20)$$

che quindi possiamo applicare come condizione al contorno per $\bar{\epsilon}$. Tale forma tuttavia è di impiego non semplice, in quanto comporta la valutazione di una derivata *seconda* in prossimità della parete. Una forma alternativa può essere trovata considerando l'andamento in prossimità della parete, anziché di \bar{k} , della sua radice quadrata. Per arrivare ad esprimere quest'ultima, poniamo dapprima in evidenza nella (10.10) il primo termine, ottenendo

$$\bar{k} = \frac{\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2}{2} y^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2 + \bar{c}_1 \bar{c}_2}{\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2} y + \frac{\bar{a}_2^2 + \bar{b}_2^2 + \bar{c}_2^2 + 2\bar{a}_1 \bar{a}_3 + 2\bar{c}_1 \bar{c}_3}{\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2} y^2 + \dots \right) \quad (10.21)$$

quindi estraiamo la radice quadrata. A tale scopo, poniamo dapprima per concisione

$$d_0 = \sqrt{\frac{\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2}{2}} \quad (10.22)$$

$$d_1 = \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2 + \bar{c}_1 \bar{c}_2}{\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2} \quad (10.23)$$

$$d_2 = \frac{\bar{a}_2^2 + \bar{b}_2^2 + \bar{c}_2^2 + 2\bar{a}_1 \bar{a}_3 + 2\bar{c}_1 \bar{c}_3}{\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2} \quad (10.24)$$

quindi facciamo ricorso ad un'espansione in serie ²

$$\sqrt{\bar{k}} = d_0 \left[y + d_1 y^2 + \frac{3}{4} (4d_2 - d_1^2) y^3 + \dots \right] \quad (10.25)$$

e derivando

$$\frac{\partial \sqrt{\bar{k}}}{\partial y} = d_0 \left[1 + 2d_1 y + \frac{9}{4} (4d_2 - d_1^2) y^2 + \dots \right] \quad (10.26)$$

Consideriamo poi il quadrato

$$\left(\frac{\partial \sqrt{\bar{k}}}{\partial y} \right)^2 = d_0^2 \left\{ 1 + 4d_1 y + \left[4d_1^2 + \frac{9}{2} (4d_2 - d_1^2) \right] y^2 + \dots \right\} \quad (10.27)$$

dove i coefficienti possono essere esplicitati secondo le (10.22–10.24), ottenendo

²L'espansione di una funzione del tipo $y(1 + d_1 y + d_2 y^2)^{1/2}$ in prossimità di $y = 0$ risulta $y + d_1 y^2 + \frac{3}{4} (4d_2 - d_1^2) y^3 + \dots$

$$\left(\frac{\partial\sqrt{\bar{k}}}{\partial y}\right)^2 = \frac{\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2}{2} + 2(\bar{a}_1\bar{a}_2 + \bar{c}_1\bar{c}_2)y + \left[9(\bar{a}_2^2 + \bar{b}_2^2 + \bar{c}_2^2 + 2\bar{a}_1\bar{a}_3 + 2\bar{c}_1\bar{c}_3) - \frac{(\bar{a}_1\bar{a}_2 + \bar{c}_1\bar{c}_2)^2}{4(\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2)}\right]y^2 + \dots \quad (10.28)$$

Da questa si ricava, alla parete

$$\bar{a}_1^2 + \bar{c}_1^2 = 2\nu \left(\frac{\partial\sqrt{\bar{k}}}{\partial y}\right)^2 \quad (10.29)$$

In base alla (10.17), la condizione al contorno per la dissipazione viscosa può essere quindi posta nella forma

$$\bar{\epsilon} = 2\nu \left(\frac{\partial\sqrt{\bar{k}}}{\partial y}\right)^2 \quad (10.30)$$

evidentemente di applicabilità più semplice che non la (10.20). È comunque possibile porre le condizioni al contorno in una forma ancora più semplice, definendo la grandezza

$$\tilde{\epsilon} = \bar{\epsilon} - 2\nu \left(\frac{\partial\sqrt{\bar{k}}}{\partial y}\right)^2 \quad (10.31)$$

la quale evidentemente risulta nulla alle pareti. L'adozione della $\tilde{\epsilon}$ al posto della $\bar{\epsilon}$ fa però sorgere qualche domanda sulla effettiva intercambiabilità delle due grandezze nel modello $k-\epsilon$. In tale modello, la dissipazione viscosa compare nell'equazione dell'energia cinetica turbolenta, e nella definizione della viscosità turbolenta. Poichè dalla (10.31) risulta evidentemente

$$\bar{\epsilon} = \tilde{\epsilon} + 2\nu \left(\frac{\partial\sqrt{\bar{k}}}{\partial y}\right)^2 \quad (10.32)$$

sostituendo nella forma che l'equazione dell'energia cinetica turbolenta assume nel modello $k-\epsilon$ (3.24) si ha

$$\bar{u}_k \frac{\partial\bar{k}}{\partial x_k} = \nu_t \left(\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_l}\right) \frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_k} - \tilde{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right) \frac{\partial\bar{k}}{\partial x_k}\right] - 2\nu \left(\frac{\partial\sqrt{\bar{k}}}{\partial x_n}\right)^2 \quad (10.33)$$

dove si può notare che è stato aggiunto un ultimo termine, nel quale la coordinata normale alla parete è stata indicata con x_n . Notiamo esplicitamente che x_n in generale *non* coinciderà con una delle tre direzioni coordinate, per cui la valutazione della derivata in direzione normale alla parete non è operazione banale. Per quanto riguarda l'impatto della sostituzione di $\bar{\epsilon}$ con $\tilde{\epsilon}$ nella definizione di viscosità turbolenta, osserviamo innanzitutto che il termine

$$2 \left(\frac{\partial\sqrt{\bar{k}}}{\partial y}\right)^2 \quad (10.34)$$

che appunto rappresenta la differenza tra le due, risulta importante solo nello strato limite, dove si verificano elevati gradienti di \bar{k} ; all'esterno di tale strato limite, esso sarà trascurabile, il che consente di continuare ad adottare la definizione standard (3.25), con la semplice sostituzione di $\bar{\epsilon}$ con $\tilde{\epsilon}$, cioè

$$\nu_t = c_\mu \frac{\overline{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (10.35)$$

Analizziamo ora, analogamente a quanto abbiamo fatto nella Sez. 10.2.1 per la (10.9), il comportamento di $\overline{u'v'}$ in prossimità della parete che si ha utilizzando invece la (10.35) per la viscosità turbolenta. A differenza di quanto risulta per la $\bar{\epsilon}$ dalla (10.14), la $\tilde{\epsilon}$ è nulla per definizione alla parete; occorrerà allora accertare la sua dipendenza funzionale da y nello strato limite. Basterà a tal fine considerare la differenza tra (10.14) e la (10.28) moltiplicata per $2 - \nu$, che dà

$$\tilde{\epsilon} = \nu \left[-14 \left(\overline{a_2^2} + \overline{b_2^2} + \overline{c_2^2} \right) + \frac{(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2})^2}{2 (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2})} - 30 (\overline{a_1 a_3} + \overline{c_1 c_3}) \right] y^2 + \dots \quad (10.36)$$

quindi in prossimità della parete è

$$\tilde{\epsilon} \propto y^2 \quad (10.37)$$

Adottando l'analogia della (10.9)

$$\overline{u'v'} = -\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -c_\mu \frac{\overline{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (10.38)$$

si trova allora che, quando nel modello k - ϵ standard si adotta $\tilde{\epsilon}$ invece di $\bar{\epsilon}$, risulta per lo sforzo di taglio

$$\overline{u'v'} \propto y^2 \quad (10.39)$$

quindi ancora un comportamento inconsistente con quello atteso (10.8), pur se diverso dalla (10.16). Anche in questo caso saranno perciò necessarie azioni correttive.

10.2.3 Decadimento dell'energia cinetica turbolenta

Valutiamo ora se l'equazione della dissipazione viscosa $\bar{\epsilon}$, che come abbiamo detto è quella in cui hanno maggiore peso le ipotesi di modellizzazione, è adeguata per descrivere flussi a basso numero di Reynolds. Tale verifica dovrebbe in linea di principio basarsi su un confronto di profili di $\bar{\epsilon}$ ottenuti per via sperimentale, con quelli calcolati attraverso un modello, come il k - ϵ ; abbiamo tuttavia osservato come le misure sperimentali della dissipazione non siano praticamente possibili, in quanto richiederebbero una risoluzione spaziale e temporale almeno pari alle scale di Kolmogorov, cioè estremamente piccole. Dobbiamo allora cercare di derivare informazioni sull'adeguatezza dell'equazione per il tasso di dissipazione viscosa operando analoghi confronti su una grandezza ad essa strettamente legata, che è l'energia cinetica turbolenta (nella cui equazione la $\bar{\epsilon}$ compare come termine appunto di dissipazione), misurabile con relativa facilità. Analizziamo allora l'andamento di \overline{k} per turbolenza generata da una griglia, ed in particolare focalizziamo l'attenzione sulla regione a grande distanza da questa. In queste condizioni, tutti i gradienti trasversali alla direzione principale del moto delle grandezze medie sono ormai nulli, vedi fig. 3.3, e quindi le forme modellate delle equazioni per l'energia cinetica turbolenta e la dissipazione assumono la forma

$$\overline{u} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x} = -\bar{\epsilon} \quad (10.40)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} = -c_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} \quad (10.41)$$

Abbiamo qui utilizzato per la dissipazione la sua definizione in termini di $\bar{\epsilon}$, ma i ragionamenti che faremo possono ugualmente applicarsi a $\tilde{\epsilon}$. È possibile dimostrare che le (10.40,10.41) ammettono per l'energia cinetica turbolenta una soluzione del tipo

$$\bar{k} \propto x^{-n} \quad (10.42)$$

dove n è un esponente positivo legato alla costante $c_{\epsilon 2}$ del modello:

$$n = \frac{1}{c_{\epsilon 2} - 1} \quad (10.43)$$

Naturalmente la relazione (10.42) può essere valida solo a grande distanza dalla griglia. Gli andamenti sperimentali di \bar{k} in funzione di x a grande distanza dalla griglia confermano gli andamenti attesi. Anzi, in realtà la (10.43) è stata appunto usata per determinare il valore della costante $c_{\epsilon 2}$ (anche se poi tale valore è stato lievemente alterato nel quadro di una ottimizzazione globale delle prestazioni del modello). In particolare, gli esperimenti indicano un valore dell'esponente pari a

$$n \simeq 1.2 \quad (10.44)$$

Dovremmo quindi aspettarci che l'andamento (10.42) prosegua indefinitamente a valle della griglia. Tuttavia, man mano che la turbolenza decade, ad un certo punto il flusso raggiunge condizioni di basso numero di Reynolds, in quanto al decrescere degli sforzi turbolenti, questi diventano paragonabili a quelli molecolari. Si osserva in corrispondenza (sotto $Re_t \sim 10$) una più rapida diminuzione di \bar{k} , con un esponente prossimo ora a

$$n \simeq 2.5 \quad (10.45)$$

indicando quindi che il modello k - ϵ standard non è più in grado di riprodurre correttamente l'andamento dell'energia cinetica turbolenta ai bassi numeri di Reynolds. Sorge quindi il problema di identificare il motivo di questo comportamento inadeguato del modello. La risposta più immediata è quella di attribuire il tutto all'equazione per la grandezza interessata, cioè l'energia cinetica turbolenta. Tuttavia, il peso delle ipotesi di modellizzazione in questa equazione è *relativamente* contenuto, essendo esse limitate all'aver introdotto l'ipotesi di trasporto secondo gradiente (che come abbiamo visto ha una sua giustificazione fisica, pur ovviamente con i suoi limiti) nei termini di produzione e di trasporto turbolento. Ben maggiore è invece l'impatto della modellizzazione sulla forma che abbiamo adottato per l'equazione della $\bar{\epsilon}$. È presumibile perciò che i valori di $\bar{\epsilon}$ prodotti dal modello siano alquanto approssimati, ed influenzino quindi significativamente il bilancio dell'equazione di \bar{k} , in cui la dissipazione stessa compare, ed ha anzi un grosso peso. Da quanto esposto, risulta la necessità di adottare un'opportuna correzione per l'equazione per la dissipazione viscosa, in aggiunta a quella di cui si è ravvisata la necessità per gli sforzi di Reynolds in prossimità della parete, vedi Sez. 10.2.1. Possiamo senza l'altro dire che questa correzione dovrà far aumentare $\bar{\epsilon}$ rispetto al modello base, in modo da far diminuire ulteriormente \bar{k} (nell'equazione di \bar{k} , la dissipazione entra con il segno negativo) in condizioni di flusso a basso numero di Reynolds.

10.3 Modelli a basso *Re* classici

In questa sezione descriveremo l'approccio che è stato classicamente adottato per operare le correzioni delle quali abbiamo sottolineato la necessità nelle Sez. 10.2.1 e 10.2.3; nella Sez. 10.5 introdurremo invece alcuni modelli, più potenti, che sono stati sviluppati di recente.

L'approccio classico che qui descriviamo è basato sull'introduzione di un coefficiente correttivo (*damping function*) f_μ (dove l'indice sta a designare il fatto che questo termine entra nella definizione di viscosità turbolenta) nella relazione costitutiva, e di un altro coefficiente nell'equazione del tasso di dissipazione viscosa, che moltiplica il termine (di distruzione) in $c_{\epsilon 2}$, nonché eventualmente di altri coefficienti (a seconda dei modelli). Il primo quindi modifica le (3.25) o (10.35) nelle forme

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}} \quad (10.46)$$

oppure

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{\bar{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (10.47)$$

a seconda della definizione adottata per la dissipazione viscosa. Il secondo coefficiente, indicato come f_2 , si applica invece al termine di distruzione della dissipazione viscosa:

$$c_{\epsilon 2} f_2 \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} \quad (10.48)$$

Assegnando un $f_2 < 1$ si ha un incremento della dissipazione viscosa, e conseguentemente un decremento dell'energia cinetica turbolenta, che può essere opportunamente modulato per avvicinarsi agli andamenti sperimentali. Ovviamente una formula analoga alla (10.48) può essere scritta qualora si adottino $\tilde{\epsilon}$ anziché $\bar{\epsilon}$.

Tali due coefficienti saranno funzioni della distanza dalla parete o, ancor meglio, del numero di Reynolds turbolento; per alti valori di questi parametri essi devono tendere all'unità, in modo da consentire, come vedremo, di recuperare il comportamento del modello standard ad alto numero di Reynolds. L'introduzione del fattore moltiplicativo f_2 nell'equazione del tasso di dissipazione viscosa, mentre consente di riprodurre fedelmente il decadimento dell'energia cinetica turbolenta a grande distanza da una griglia, non consente invece ancora di ottenere un andamento corretto di \bar{k} in prossimità di una parete. Si rende quindi necessaria un'ulteriore correzione che, per quanto detto, dovrà essere operata sull'equazione della dissipazione piuttosto che su quella dell'energia cinetica turbolenta stessa. Poiché in prossimità della parete si hanno elevatissimi gradienti, è presumibile che in tale ulteriore correzione debba figurare l'effetto di tali gradienti. Alcuni autori introducono a questo fine un ulteriore fattore correttivo nell'equazione della dissipazione, che va a moltiplicare il suo termine di produzione; altri invece aggiungono un termine supplementare all'equazione in questione. In entrambi i casi, per alti numeri di Reynolds il modello dovrà recuperare le caratteristiche del modello standard.

Una classificazione di questi modelli è riportata in [31]. In questa sede ci limitiamo semplicemente a riportare due modelli, dei quali il primo si caratterizza per la relativa semplicità (la quale però non implica necessariamente applicabilità particolarmente facile), mentre il secondo implica un termine un po' più, ma nondimeno gode di larga popolarità.

10.3.1 Modello di Lam–Bremhorst

Questo modello [32] si caratterizza per l'adozione di $\bar{\epsilon}$ come dissipazione viscosa. L'equazione dell'energia cinetica turbolenta mantiene quindi la forma (3.24), per quanto la viscosità turbolenta che compare nel termine di produzione dovrà includere il fattore f_μ secondo la (10.46). Analizziamo ora gli elementi del modello. Il coefficiente f_μ è assegnato come funzione tanto di Re_y che di Re_t :

$$f_\mu = [1 - \exp(-0.0165 Re_y)]^2 \left(1 + \frac{20.5}{Re_t}\right) \quad (10.49)$$

È immediato verificare che per alti numeri di Reynolds questa espressione tende all'unità, come richiesto. Per quanto riguarda l'espressione dell'equazione per la dissipazione viscosa, questo modello prevede una correzione nel termine di distruzione

$$f_2 = 1 - \exp(-Re_t^2) \quad (10.50)$$

ma anche una nel termine sorgente, per adeguare l'andamento di \bar{k} in prossimità delle pareti:

$$f_1 = 1 + \left(\frac{0.05}{f_\mu}\right)^2 \quad (10.51)$$

Anche questi termini tendono all'unità per flussi ad alto numero di Reynolds. La forma dell'equazione per il tasso di dissipazione viscosa è pertanto

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = c_{\epsilon 1} f_1 \nu_t \frac{\bar{\epsilon}}{k} \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - c_{\epsilon 2} f_2 \frac{\bar{\epsilon}^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} \right] \quad (10.52)$$

dove, sottolineamo, nei termini di produzione e trasporto la viscosità turbolenta è data dalla (10.46). La condizione al contorno per la dissipazione è espressa nella forma (10.20), per quanto sarebbe possibile in linea di principio adottare anche la (10.30).

10.3.2 Modello di Launder–Sharma

Questo modello è stato in realtà sviluppato da Jones e Launder [30]; il successivo lavoro di Launder e Sharma [33] comporta solo una migliore ottimizzazione di alcune costanti. Esso adotta la dissipazione $\tilde{\epsilon}$ definita dalla (10.31), di conseguenza l'equazione per l'energia cinetica turbolenta assume la forma (10.33) dove, come detto, figura un termine in più. Un termine in più figura anche nell'equazione della dissipazione stessa, per correggere l'andamento di \bar{k} in prossimità della parete:

$$\bar{u}_k \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} = c_{\epsilon 1} \nu_t \frac{\tilde{\epsilon}}{k} \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - c_{\epsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} \right] + 2 \nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial x_n^2} \right)^2 \quad (10.53)$$

Nel termine aggiuntivo

$$2 \nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial x_n^2} \right)^2 \quad (10.54)$$

x_n designa come sempre la coordinata normale alla parete, mentre \bar{u}_t indica la componente di velocità media tangente alla parete. Si può verificare [34] che la (10.54) corrisponde ad un modello per un termine dell'equazione esatta per la dissipazione (3.32), finora trascurato, e precisamente

$$- 2\nu u'_k \frac{\overline{\partial u'_m}}{\partial x_l} \frac{\overline{\partial^2 u_m}}{\partial x_l \partial x_m} \quad (10.55)$$

Si constata facilmente che il termine (10.54) è importante solo nello strato limite, essendo il quadrato di una derivata seconda della velocità media, che può essere importante solo dove si hanno elevatissimi gradienti di velocità. La condizione al contorno per la dissipazione $\tilde{\epsilon}$ è nella semplice forma

$$\tilde{\epsilon} = 0 \quad (10.56)$$

L'altro fattore che compare nell'equazione per la dissipazione è definito come

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp(-Re_t^2) \quad (10.57)$$

mentre il fattore correttivo nella relazione costitutiva è

$$f_\mu = \exp \left[- \frac{3.4}{(1 + 0.02 Re_t)^2} \right] \quad (10.58)$$

Si noti che queste espressioni rispettano i vincoli richiesti, cioè tendono all'unità per alto numero di Reynolds.

10.4 Limiti dei modelli classici

Nonostante i modelli esaminati nella Sez. 10.3 consentono un notevole miglioramento dell'accuratezza della soluzione rispetto ai modelli che impiegano l'approccio delle *wall functions*, essi manifestano tuttavia alcuni limiti, che abbiamo qui tentativamente classificato, anche se in realtà sono spesso interrelati.

10.4.1 Isotropia

Abbiamo osservato nella Sez. 10.2.1 che in prossimità della parete lo sforzo di Reynolds di taglio varia come y^3 ; ciò è evidentemente dovuto al fatto che, considerando i termini di grado più basso, è $u' \propto y$, ma $v' \propto y^2$. È allora necessario correggere l'andamento dello sforzo di taglio mediante il fattore f_μ . Questo procedimento, anche se riesce ad aggiustare $\overline{u'v'}$, cioè lo sforzo di taglio che entra direttamente nell'equazione della quantità di moto entro lo strato limite, lascia un'inconsistente descrizione degli sforzi normali. Nei modelli a basso numero di Reynolds basati sul k - ϵ lineare, il trasporto turbolento della quantità di moto resta descritto dalla relazione (3.24) anche in prossimità della parete. Quindi, per *flusso completamente sviluppato, parallelo alla parete* in direzione x , gli sforzi normali risultano ancora sostanzialmente isotropi, essendo

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3} \overline{k} - 2\nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \frac{2}{3} \overline{k} \quad (10.59)$$

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3} \overline{k} - 2\nu_t \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \frac{2}{3} \overline{k} \quad (10.60)$$

$$\overline{w'^2} = \frac{2}{3} \overline{k} - 2\nu_t \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = \frac{2}{3} \overline{k} \quad (10.61)$$

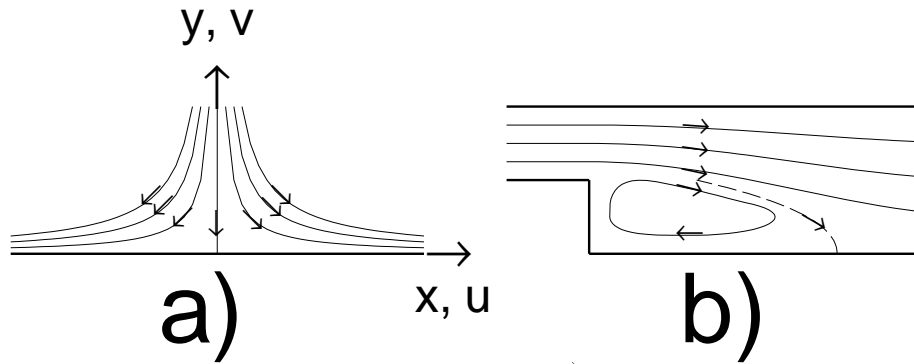


Figure 10.1: Flusso in prossimità di punti di ristagno: a) getto diretto contro la parete, b) zona di riattaccamento in un flusso con ricircolazione (linea di corrente di ristagno tratteggiata).

poichè nelle condizioni di flusso considerate $\bar{v} = \bar{w} \equiv 0$, e $\partial\bar{u}/\partial x = 0$. Il procedimento risulta quindi concettualmente insoddisfacente, perchè non affronta il nodo vero della questione, cioè il fatto che la turbolenza tende ad uno stato bidimensionale in prossimità della parete. La non riprodotta anisotropia delle componenti normali dello sforzo di Reynolds nello strato limite si ripercuote direttamente sulle previsioni dello scambio termico tra parete e fluido. Se si adotta l'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato nella forma (9.3), si constata facilmente come le previsioni del flusso termico saranno di conseguenza alquanto modeste.

10.4.2 Punti di ristagno

I limiti dell'ipotesi di trasporto secondo gradiente nella forma (3.7) si manifestano in particolare nei punti di ristagno, cioè in quei punti del campo di flusso in cui la velocità media del flusso è diretta normalmente alle pareti. Questa situazione può verificarsi in flussi diretti contro una parete, o nel punto di riattaccamento di una zona di separazione, vedi vedi fig. 10.1. Se supponiamo per semplicità che il flusso sia bidimensionale nella media, e prendiamo l'asse y normale alla parete e l'asse x nella direzione della velocità parallela alla parete, con origine nel punto di ristagno, risulta chiaro che, a differenza di quanto avviene per flusso completamente sviluppato parallelo alla parete, in prossimità del punto di ristagno risulta $\bar{v} \neq 0$ e $\partial u/\partial x \neq 0$. In particolare, l'equazione di continuità mediata dà

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} = -\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} \quad (10.62)$$

Se allora consideriamo il termine di produzione dell'energia cinetica turbolenta, nella sua forma (1.71) ancora esente da ipotesi di modellizzazione, esso prende la forma

$$P = -\overline{u'^2} \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} - \overline{v'^2} \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} \quad (10.63)$$

e per la (10.62) questo si può riscrivere

$$P = (\overline{v'^2} - \overline{u'^2}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (10.64)$$

In questa espressione il gradiente di velocità media è positivo (vedi fig. 10.1), per cui il segno e l'entità del termine di produzione dell'energia cinetica turbolenta dipende integralmente dalla *differenza* tra gli sforzi di Reynolds normali. Poichè in prossimità della parete è

$$\overline{v'^2} < \overline{u'^2} \quad (10.65)$$

deve risultare in prossimità del punto di ristagno

$$P < 0 \quad (10.66)$$

quindi presumibilmente i corrispondenti valori dell'energia cinetica turbolenta saranno alquanto bassi. Adottando il modello k - ϵ , si ha invece in questo caso, ricordando la (10.62)

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3} \bar{k} - 2 \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (10.67)$$

$$\overline{v'^2} = \frac{2}{3} \bar{k} + 2 \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (10.68)$$

per cui il termine di produzione modellato risulta

$$P = 4 \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \quad (10.69)$$

quindi un valore positivo, contrariamente a quanto indicato dalla (10.66). Ne deriva che il livello previsto di energia cinetica turbolenta sarà notevolmente superiore a quello effettivo. In particolare, in problemi di scambio termico tra parete e fluido, il coefficiente di diffusione turbolenta del calore, proporzionale a $\bar{k}^2/\bar{\epsilon}$ per la (5.54), o equivalentemente a $\bar{k}^2/\tilde{\epsilon}$, risulterà notevolmente sovrastimato.

10.4.3 Argomento dei fattori correttivi

I fattori correttivi f_μ , f_1 e f_2 adottati nei modelli visti sinora sono descritti da funzioni di un numero di Reynolds, definito o in funzione della distanza dalla parete (10.1), oppure sulla base della scala delle lunghezze della turbolenza (10.2); in ogni caso, l'argomento indica l'importanza relativa dei fenomeni viscosi molecolari. Abbiamo però osservato nella Sez. 10.4.1 che in realtà la necessità di una correzione nasce dalla natura quasi-bidimensionale della turbolenza in prossimità della parete. Come abbiamo visto, quest'ultimo fatto discende dall'equazione di continuità, nella quale in realtà la viscosità molecolare non entra affatto. Si intuisce allora che sarebbe probabilmente più corretto definire i fattori correttivi in funzione di un'altra grandezza, non collegata alla viscosità, ma piuttosto alla stato di maggiore o minore bidimensionalità della turbolenza.

10.4.4 Parametri topologici della parete

Un notevole problema dei modelli per il trattamento della parete è la presenza, in alcuni di essi, di *parametri topologici* legati alla particolare configurazione della parete considerata. Essi consistono tipicamente in vettori che indicano, per ogni punto computazionale, la distanza dalla parete. Ad

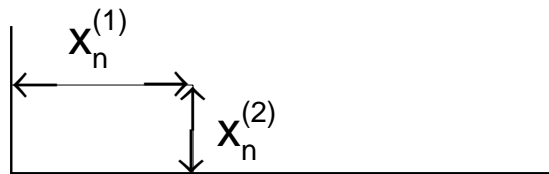


Figure 10.2: Difficoltà nell'individuazione della distanza dalla parete in prossimità di spigoli.

esempio, il modello di Lam–Bremhorst richiede la distanza dalla parete per definire il numero di Reynolds Re_y . Questi parametri implicano sostanziali difficoltà d'uso in geometrie complesse. Nel flusso su una lastra piana, è evidentemente molto facile individuare la distanza dalla parete, ma la cosa è assai meno semplice in geometrie appena più complesse, dove risulta difficile definire univocamente una distanza del nodo di calcolo considerato dalla parete, vedi fig. 10.2.

In queste situazioni si adotta comunemente, in mancanza di una migliore procedura, la prassi di procedere ad una sovrapposizione degli effetti delle due (o più) pareti adiacenti. Questo però porta tipicamente ad oscillazioni numeriche in prossimità di tali spigoli, e deteriora significativamente l'affidabilità della soluzione, specie per geometrie complesse. Si comprende quindi come siano preferibili i modelli che non richiedono parametri topologici, come ad esempio il modello di Launder–Sharma.

10.5 Modelli a basso Re avanzati

Riportiamo di seguito due modelli per flussi a basso numero di Reynolds, sviluppati in questi ultimi anni, che suppliscono in minore o maggiore misura ai limiti esposti nella Sez. 10.4.

10.5.1 Forma completa del modello $k-\epsilon$ cubico

Nella Sez. 8.2 abbiamo riportato la forma del modello $k-\epsilon$ cubico valida per alti numeri di Reynolds; riportiamo qui invece la sua forma completa, applicabile a flussi a basso numero di Reynolds. Come abbiamo detto, tale modello è in grado di riprodurre in buona misura l'anisotropia del tensore degli sforzi di Reynolds, per cui l'estensione qui considerata consente di ottenere in particolare discrete previsioni del flusso termico alla parete, quando viene usata l'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato, come accennato nella Sez. 10.4.1. Inoltre, grazie all'introduzione di un appropriato termine, esso consente di correggere il comportamento del modello anche in corrispondenza a punti di ristagno, vedi Sez. 10.4.2.

Il modello adotta la definizione (10.31) di dissipazione viscosa, per cui l'equazione per l'energia cinetica turbolenta assume la forma, già vista (10.33)

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} = -\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - \tilde{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} \right] - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{\bar{k}}}{\partial x_n} \right)^2 \quad (10.70)$$

dove ovviamente gli sforzi di Reynolds che compaiono nel termine di produzione devono essere espressi secondo la (8.67). L'equazione per la dissipazione viscosa assume la forma

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} = & -c_{\epsilon 1} \frac{\tilde{\epsilon}}{\bar{k}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - c_{\epsilon 2} \frac{\tilde{\epsilon}^2}{\bar{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} \right] + \\ & + 0.06 \frac{\tilde{S} \bar{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial x_n^2} \right)^2 + 0.83 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{\bar{k}} \left(\frac{l}{2.5 x_n} - 1 \right) \left(\frac{l}{2.5 x_n} \right)^2 \end{aligned} \quad (10.71)$$

dove dobbiamo osservare alcune particolarità degli ultimi due termini. Il penultimo, in cui \tilde{S} è definita analogamente alla (8.70) con la nuova definizione di dissipazione viscosa

$$\tilde{S} = \frac{\bar{k}}{\tilde{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{2} S_{kl} S_{kl}} \quad (10.72)$$

sostituisce il termine (10.54), ed ha quindi ancora la funzione di correggere l'andamento dell'energia cinetica turbolenta in prossimità della parete. L'ultimo termine invece, in cui l designa la scala delle lunghezze della turbolenza identificata, analogamente alla (3.23), come

$$l = \frac{\bar{k}^{3/2}}{\tilde{\epsilon}} \quad (10.73)$$

è la cosiddetta 'correzione di Yap', che consente di riprodurre in maniera soddisfacente il comportamento del flusso in prossimità di punti di ristagno, mentre si annulla per flusso parallelo alla parete. Si ricordi infatti che nella (4.20) abbiamo assunto la scala delle lunghezze della turbolenza proporzionale alla distanza dalla parete secondo la

$$l^* = \frac{\kappa}{c_\mu^{3/4}} y \quad (10.74)$$

e ricordando i valori numerici delle costanti si trova

$$l^* = 2.5 y \quad (10.75)$$

Nei punti di ristagno invece, dove i modelli standard predicono un'eccessiva produzione di turbolenza, quindi un livello eccessivo di \bar{k} , e conseguentemente una l che eccede il valore (10.75), la correzione di Yap porta ad un termine positivo a secondo membro della (10.73), quindi ad un aumento della dissipazione viscosa, il quale contrasta l'eccesso di \bar{k} .

Il fattore correttivo f_μ che compare nella (8.68) è poi definito in funzione del numero di Reynolds turbolento come

$$f_\mu = 1 - \exp \left[-\sqrt{\frac{Re_t}{90}} - \left(\frac{Re_t}{400} \right)^2 \right] \quad (10.76)$$

e quindi tende all'unità per alti numeri di Reynolds, come richiesto.

Questo modello, pur superando alcuni dei limiti emersi nella Sez. 10.4, conserva alcune limitazioni. In effetti, la presenza nella 'correzione di Yap' di una distanza dalla parete reintroduce un parametro topologico, vedi Sez. 10.4.4, dal quale era invece esente il modello di Launder–Sharma. Inoltre, i fattori correttivi sono ancora espressi in funzione di un parametro viscoso, cioè il numero di Reynolds turbolento, procedura che come abbiamo visto nella Sez. 10.4.3 non è in linea di principio corretta.

10.5.2 Modello nonlineare a tre equazioni $k-\epsilon-A_2$

Questo modello rappresenta un'estensione del modello $k-\epsilon$ cubico, ma a differenza di questo adotta principalmente come parametro per caratterizzare la vicinanza alla parete una grandezza, indicata come A_2 , che è legata all'anisotropia del tensore degli sforzi di Reynolds. In tal modo questo modello intende superare l'incongruenza della modellizzazione classica, come visto nella Sez. 10.4.3, con l'obiettivo di arrivare a previsioni del campo di moto più realistiche. Inoltre, la presenza di parametri topologici, vedi Sez. 10.4.4, dovuta alla correzione di Yap è eliminata adottando una differente espressione per controbilanciare gli eccessivi valori dell'energia cinetica turbolenta in prossimità dei punti di ristagno.

Introduciamo il tensore anisotropia, definito come

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\bar{k}} - \frac{2}{3} \bar{k} \quad (10.77)$$

il quale fornisce appunto un'indicazione sull'anisotropia della turbolenza; se in particolare gli sforzi normali sono uguali fra loro (quindi evidentemente uguali a $2\bar{k}/3$), si ha

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \quad (10.78)$$

Inoltre, è possibile definire tramite il tensore anisotropia una grandezza *scalare* che dà un'analogia indicazione. Definiamo a questo scopo gli *invarianti* [35] del tensore anisotropia

$$A_2 = a_{kl} a_{lk} \quad (10.79)$$

$$A_3 = a_{kl} a_{lm} a_{mk} \quad (10.80)$$

con k, l, m come indici di sommatoria; incidentalmente, il primo invariante è nullo per flussi a densità costante. È allora possibile dimostrare che la grandezza scalare cercata ha la forma [36]

$$A = 1 - \frac{9}{8} (A_2 - A_3) \quad (10.81)$$

ed assume valore nullo per turbolenza bidimensionale. Il gruppo di Launder ha pensato di adottare questa grandezza come indicatore della maggiore o minore vicinanza alla parete, rimpiazzando in tal modo il ruolo svolto negli altri modelli dal numero di Reynolds turbolento. Lo scalare A potrebbe in linea di principio essere ottenuto a partire da A_2 e A_3 , derivati a loro volta sulla base del campo di moto calcolato. Tuttavia questo procedimento, che per la chiusura sui momenti primi qui considerata equivale ad esprimere A puramente sulla base dei valori *locali* dei gradienti di velocità e di \bar{k} , non risulta sufficientemente accurato. La strada scelta per ovviare a questo inconveniente è quella di introdurre un'equazione di conservazione per il secondo invariante A_2 , che può essere derivata a partire dall'equazione per gli sforzi di Reynolds; ovviamente, essa richiederà l'introduzione di ipotesi

di chiusura per i termini non chiusi. Il terzo invariante è invece ancora ricostruito sulla base del campo di moto calcolato. Non entriamo in questa sede nei dettagli della modellizzazione, limitandoci a riportare la forma ultima del modello. Si tratta quindi di un modello ‘a tre equazioni’, in quanto per determinare lo stato della turbolenza sono risolte tre equazioni, per l’energia cinetica turbolenta, la dissipazione viscosa, ed il secondo invariante del tensore anisotropia. Incidentalmente, altri modelli a tre equazioni, come il $k-\epsilon-\overline{v'^2}$ [37] ed il $k-\epsilon-S$ [38], sono stati sviluppati con motivazioni simili, per quanto risultino in generale meno potenti di quello qui riportato (p. es., il modello $k-\epsilon-S$ adotta una relazione costitutiva lineare).

La relazione costitutiva adottata nel modello $k-\epsilon-A_2$ [24, 39, 49] è

$$\begin{aligned}
\overline{u'_i u'_j} = & - \nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} \overline{k} \delta_{ij} + \\
& + c_1 \nu_t \frac{\overline{k}}{\tilde{\epsilon}} \left(S_{ik} S_{kj} - S_{kl} S_{kl} \frac{\delta_{ij}}{3} \right) + \\
& + c_2 \nu_t \frac{\overline{k}}{\tilde{\epsilon}} (\Omega_{ik} S_{kj} + \Omega_{jk} S_{ki}) + \\
& + c_3 \nu_t \frac{\overline{k}}{\tilde{\epsilon}} \left(\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \Omega_{lk} \Omega_{lk} \frac{\delta_{ij}}{3} \right) + \\
& + c_4 \nu_t \left(\frac{\overline{k}}{\tilde{\epsilon}} \right)^2 \left(S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li} - \frac{2}{3} S_{km} \Omega_{lm} \delta_{ij} \right) S_{kl} + \\
& + c_5 \nu_t \left(\frac{\overline{k}}{\tilde{\epsilon}} \right)^2 \left(\Omega_{il} \Omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - \frac{2}{3} S_{lm} \Omega_{mn} \Omega_{nl} \delta_{ij} \right) + \\
& + c_6 \nu_t \left(\frac{\overline{k}}{\tilde{\epsilon}} \right)^2 S_{ij} S_{kl} S_{kl} + \\
& + c_7 \nu_t \left(\frac{\overline{k}}{\tilde{\epsilon}} \right)^2 S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \\
& + c_8 \frac{\overline{k}^5}{\tilde{\epsilon}^4} \frac{S_{ij} S_{kl} S_{lm} S_{mk}}{(S_{pq} S_{qp})^2}
\end{aligned} \tag{10.82}$$

con k, l, m, p e q come indici di sommatoria; il termine in c_5 è comunque nullo, vedi (10.91). Si noti che il termine in c_8 è del quarto ordine. La viscosità turbolenta è ancora formalmente data da

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{\overline{k}^2}{\tilde{\epsilon}} \tag{10.83}$$

ma c_μ e f_μ sono definite come

$$c_\mu = \frac{0.667 r_\eta}{1 + 1.8 \eta} \left\{ 1 - \exp \left[-0.145 \exp(1.3 \eta^{5/6}) \right] \right\} \tag{10.84}$$

$$f_\mu = \frac{1.1 \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon}} \left[1 - 0.8 \exp \left(-\frac{\widetilde{Re}_t}{30} \right) \right]}{1 + 0.6 A_2 + 0.2 A_2^{3.5}} \tag{10.85}$$

essendo

$$\eta = \max(\tilde{S}, \tilde{\Omega}) \tag{10.86}$$

$$r_\eta = 1 + \left[1 - \exp(-8 A_2^3) \right] \left[1 + 4 \sqrt{\exp(-0.05 \widetilde{Re}_t)} \right] \quad (10.87)$$

dove ora il numero di Reynolds turbolento e gli invarianti di deformazione e rotazione sono definiti come

$$\widetilde{Re}_t = \frac{\bar{k}^2}{\nu \tilde{\epsilon}} \quad (10.88)$$

$$\tilde{S} = \frac{\bar{k}}{\tilde{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{2} S_{kl} S_{kl}} \quad (10.89)$$

$$\tilde{\Omega} = \frac{\bar{k}}{\tilde{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{kl} \Omega_{kl}} \quad (10.90)$$

I coefficienti del modello sono identificati come

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.05 \frac{f_q}{f_\mu} \\ c_2 &= 0.11 \frac{f_q}{f_\mu} \\ c_3 &= 0.42 \frac{f_q S}{f_\mu (S + \Omega)} \\ c_4 &= -0.8 f_c \\ c_5 &= 0 \\ c_6 &= -0.5 f_c \\ c_7 &= 0.5 f_c \\ c_8 &= -0.5 f_B \end{aligned} \quad (10.91)$$

dove le funzioni sono definite come

$$f_B = \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}}} \exp(-20 A^{*2}) \quad (10.92)$$

$$f_c = \frac{r_\eta}{\sqrt{1 + 0.0086 \eta^2}} \quad (10.93)$$

$$f_q = \frac{r_\eta^2}{1 + 0.45 \eta^{2.5}} \quad (10.94)$$

avendo posto

$$\hat{\epsilon} = \bar{\epsilon} - \tilde{\epsilon} = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{\bar{k}}}{\partial x_n} \right)^2 \quad (10.95)$$

Nella (10.92), A^* rappresenta un valore efficace di A

$$A^* = f_A A' + (1 - f_A) A'' \quad (10.96)$$

con

$$A' = A \left[1 - \exp \left(- \frac{\widetilde{Re}_t^2}{1 + 24 A_2} \right) \right] \quad (10.97)$$

$$A'' = \left\{ 1 - \frac{9}{8} \left[A_2 - A_3 \left(\frac{A_2}{a_{kl} a_{kl}} \right)^{1.5} \right] \right\} \left[1 - \exp \left(-0.01 \widetilde{Re}_t^2 \right) \right] \frac{\tilde{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \quad (10.98)$$

$$A = 1 - \frac{9}{8} (a_{kl} a_{kl} - A_3) \quad (10.99)$$

$$A_3 = a_{kl} a_{lm} a_{mk} \quad (10.100)$$

$$f_A = 1 - \exp \left[- \left(0.0125 \widetilde{Re}_t \right)^2 \right] \quad (10.101)$$

Passiamo ora ad esaminare la forma delle tre equazioni differenziali del modello. L'equazione dell'energia cinetica turbolenta è lievemente modificata nella modellizzazione del termine di trasporto turbolento, per cui si ha la forma

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} = - \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - \tilde{\epsilon} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu \delta_{kl} + c_k \frac{\bar{k}}{\tilde{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_l} \right] - 2 \nu \left(\frac{\partial \sqrt{\bar{k}}}{\partial x_n} \right)^2 \quad (10.102)$$

dove al solito gli sforzi di Reynolds devono essere espressi secondo la (10.82), e

$$c_k = 0.22 f_g \quad (10.103)$$

con

$$f_g = 5 \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}}} - 4 \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/4} \quad (10.104)$$

L'equazione per la dissipazione viscosa assume la forma

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} = & - c_{\epsilon 1} \frac{\tilde{\epsilon}}{\bar{k}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - c_{\epsilon 2} \frac{\tilde{\epsilon}^2}{\bar{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu \delta_{kl} + c_{\epsilon} \frac{\bar{k}}{\tilde{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_k} \right] + c_{\epsilon 3} \nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial x_n^2} \right)^2 + \\ & + c_{\epsilon 4} \nu \frac{\nu_t}{\bar{k}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_t}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \bar{u}_t}{\partial x_k \partial x_l} - \hat{\epsilon} \frac{\tilde{\epsilon}}{\bar{k}} \exp \left(-0.25 \widetilde{Re}_t^2 \right) + c_{\epsilon 5} \hat{\epsilon} \frac{\bar{k}}{\tilde{\epsilon}} \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \frac{\partial l}{\partial x_l} \frac{\partial l}{\partial x_m} \right)^2 \end{aligned} \quad (10.105)$$

con l ancora definita come

$$l = \frac{\bar{k}^{3/2}}{\tilde{\epsilon}} \quad (10.106)$$

ed inoltre

$$c_{\epsilon 1} = 1 + 0.15 (1 - A^*) \quad (10.107)$$

$$c_{\epsilon 2} = \frac{1.92}{1 + 0.7 \left(1 - \frac{1}{1 + 0.0025 \overline{Re}_t^2} \right) \sqrt{A_2} \max(0.25, A^*)} \quad (10.108)$$

$$c_{\epsilon 3} = 1.2 \quad (10.109)$$

$$c_{\epsilon 4} = 1.0 \quad (10.110)$$

$$c_{\epsilon 5} = 35 \quad (10.111)$$

L'equazione di A_2 prende la forma

$$\begin{aligned} \overline{u}_k \frac{\partial A_2}{\partial x_k} &= 2 \frac{A_2}{\overline{k}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_l} - 2 \frac{a_{kl}}{\overline{k}} \left(\overline{u'_k u'_m} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_m} + \overline{u'_l u'_m} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu \delta_{kl} + 0.22 f_g \frac{\overline{k}}{\tilde{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \right) \frac{\partial A_2}{\partial x_l} \right] + \\ &+ 2 \frac{a_{kl}}{\overline{k}} \left\{ -\tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon} \left[a_{kl} + c'_1 \left(a_{km} a_{ml} - A_2 \frac{\delta_{kl}}{3} \right) \right] - a_{kl} \sqrt{A^*} \bar{\epsilon} + \right. \\ &+ 0.6 \left(\overline{u'_k u'_m} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_m} + \overline{u'_l u'_m} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_m} \right) - 0.6 \left(a_{kl} + \frac{2}{3} \delta_{kl} \right) \overline{u'_p u'_q} \frac{\partial \overline{u}_p}{\partial x_q} - \\ &- c_{2w} \overline{u'_m u'_p} \frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_p} \left(3 \frac{\partial l_f}{\partial x_k} \frac{\partial l_f}{\partial x_l} - \frac{\partial l_f}{\partial x_q} \frac{\partial l_f}{\partial x_q} \delta_{kl} \right) + \\ &+ c'_{2w} a_{mp} \overline{k} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_p} \frac{\partial l_f}{\partial x_l} \frac{\partial l_f}{\partial x_m} + \frac{3}{2} \frac{\partial \overline{u}_l}{\partial x_p} \frac{\partial l_f}{\partial x_k} \frac{\partial l_f}{\partial x_p} - \frac{\partial \overline{u}_q}{\partial x_p} \frac{\partial l_f}{\partial x_m} \frac{\partial l_f}{\partial x_q} \right) + \\ &+ c''_{2w} \overline{k} \frac{\partial \overline{u}_m}{\partial x_p} \frac{\partial l_f}{\partial x_m} \frac{\partial l_f}{\partial x_p} \left(\frac{\partial l_f}{\partial x_k} \frac{\partial l_f}{\partial x_l} - \frac{\partial l_f}{\partial x_q} \frac{\partial l_f}{\partial x_q} \frac{\delta_{kl}}{3} \right) \left. \right\} + \\ &+ 2 \frac{A_2}{\overline{k}} \bar{\epsilon} - 2 \frac{a_{kl}}{\overline{k}} \left[f_\epsilon \epsilon_{kl}^* + \frac{2}{3} (1 - f_\epsilon) \bar{\epsilon} \delta_{kl} \right] \end{aligned} \quad (10.112)$$

dove

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{2 \nu f_\epsilon^* \frac{\partial \sqrt{\overline{k}}}{\partial x_m} \left(\frac{\overline{u'_j u'_m}}{\overline{k}} \frac{\partial \sqrt{\overline{k}}}{\partial x_i} + \frac{\overline{u'_i u'_m}}{\overline{k}} \frac{\partial \sqrt{\overline{k}}}{\partial x_j} \right) + 2 \nu f_\epsilon^* \frac{\overline{u'_k u'_m}}{\overline{k}} \frac{\partial \sqrt{\overline{k}}}{\partial x_k} \frac{\partial \sqrt{\overline{k}}}{\partial x_m} \delta_{ij} + \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\overline{k}} \bar{\epsilon}}{1 + \frac{5 \nu f_\epsilon^* \overline{u'_k u'_m}}{\bar{\epsilon} \overline{k}} \frac{\partial \sqrt{\overline{k}}}{\partial x_k} \frac{\partial \sqrt{\overline{k}}}{\partial x_m}} \quad (10.113)$$

con

$$l_f = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\overline{Re}_t}{30}\right)}{1 + 3.5 A_2^2} \frac{\overline{k}^{1.5}}{\bar{\epsilon}} \quad (10.114)$$

$$f_\epsilon = 1 - f_\phi \left[1 - \exp(-20 A^{*1.5}) \right] \quad (10.115)$$

$$f_\epsilon^* = 1 - \exp\left(-\frac{\widetilde{Re}_t}{1 + 2A_2^2}\right) \quad (10.116)$$

$$f_\phi = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\widetilde{Re}_t}{80}\right)^2\right] \quad (10.117)$$

$$\tilde{c}_1 = 3.1 \min\left(\sqrt{A_2}, 0.5\right) \sqrt{A^*} f_\phi \quad (10.118)$$

$$c'_1 = 1.2 \quad (10.119)$$

$$c_{2w} = 0.088 A_2^2 \quad (10.120)$$

$$c'_{2w} = 0.16 A_2^2 \quad (10.121)$$

$$c''_{2w} = 1.2 f_\phi A_2^2 \quad (10.122)$$

La condizione al contorno applicata alle pareti solide è

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_n} = 0 \quad (10.123)$$

cioè gradiente nullo in direzione normale alle pareti.

Il modello è stato anche esteso per raffinare l'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato nella forma (9.40), dove il coefficiente C assume ora l'espressione

$$C = \frac{0.3 + 0.2 \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}}{\bar{\epsilon}}}}{1 + 0.5 \sqrt{A_2} + 0.07 A_2^3} \quad (10.124)$$

che sostituisce la (9.41).

Capitolo 11

Generalità sui modelli con chiusura sui momenti secondi

11.1 Formulazione con chiusura sui momenti primi

Abbiamo osservato come il processo di decomposizione e media delle equazioni di Navier–Stokes per un fluido inerte, sottoposto a forze di galleggiamento, porti alle seguenti forme delle equazioni mediate di continuità, della quantità di moto e della temperatura, vedi eq. (1.35,5.7,5.24):

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k u'_i}) - \beta_i (\bar{T} - T_0) \quad i = 1, 2, 3 \quad (11.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{T}) = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k T'}) \quad (11.3)$$

In queste equazioni compaiono termini che rendono il sistema di equazioni mediate *non chiuso*, cioè gli sforzi di Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ nell'equazione della quantità di moto mediata, ed i flussi di Reynolds $\overline{u'_i T'}$ nell'equazione della temperatura mediata.

Per *chiudere* il sistema delle equazioni di Navier–Stokes mediate è quindi necessario ricavare espressioni per i 6 sforzi di Reynolds ed i 3 flussi di Reynolds, in modo da pareggiare il bilancio tra il numero delle incognite ed il numero di equazioni disponibili.

L'approccio modellistico più semplice, ampiamente riportato nei capp. 2.3.2–9.4, è quello di adottare modelli per esprimere direttamente gli sforzi ed i flussi di Reynolds. In questo caso quindi queste grandezze (che sono medie del prodotto di due componenti fluttuanti, cioè *momenti secondi*), sono *totalmente* modellate. Possiamo per esempio adottare la forma lineare dell'ipotesi di trasporto secondo gradiente, vedi eq. (3.7,5.55), e scrivere

$$\overline{u'_k u'_i} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ik} \bar{k} \quad (11.4)$$

$$\overline{u'_i T'} = -\frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (11.5)$$

Sostituendo queste espressioni per gli sforzi ed i flussi di Reynolds nelle eq. (11.2,11.3) rispettivamente, il sistema delle equazioni di Navier–Stokes mediate si riscrive

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (11.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \beta_i (\bar{T} - T_0) \quad i = 1, 2, 3 \quad (11.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{T}) = \left(\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_k} \quad (11.8)$$

e risulta evidentemente *chiuso* una volta che sia assegnata un'espressione per la viscosità turbolenta, il che equivale come detto ad individuare le scale u^* ed l^* della turbolenza:

$$\nu_t \propto u^* l^* \quad (11.9)$$

Facendo riferimento, a titolo di esempio, al modello a due equazioni k - ϵ (abbiamo osservato come occorranza almeno due equazioni per poter definire u^* e l^* con un minimo di generalità), tale scale sono individuate come la radice quadrata dell'energia cinetica turbolenta

$$u^* = \sqrt{k} \quad (11.10)$$

ed attraverso una relazione dimensionale con il tasso di dissipazione viscosa

$$l^* = \frac{\bar{k}^{-3/2}}{\bar{\epsilon}} \quad (11.11)$$

Ricapitolando, in questi modelli le equazioni per i momenti primi (cioè per i valori medi delle componenti di velocità, della pressione e della temperatura) sono (come si suol dire) 'esatte', ma i valori dei momenti secondi (sforzi e flussi di Reynolds) sono *totalmente* modellati. Dobbiamo perciò aspettarci che questi modelli, detti appunto con chiusura sui momenti primi, presentino alcuni limiti, come infatti ampiamente dimostrato nei capp. 6.3 e 9.4. Adottare modelli con chiusura sui momenti primi di tipo 'avanzato', come i modelli nonlineari esaminati nel cap. 7.2.2, ed i modelli GGDH esaminati nel cap. 8.2, può dare qualche miglioramento, ma non sovverte la sostanza del fatto che i momenti secondi in questi modelli sono *totalmente* modellati.

11.2 Formulazione con chiusura sui momenti secondi

Per superare la limitazione dei modelli con chiusura sui momenti primi, citata nella sez. 11.1, la via maestra da seguire è quella di considerare le equazioni di conservazione per gli sforzi ed i flussi di Reynolds, ricavate in precedenza. Per gli sforzi di Reynolds in flussi con galleggiamento, ricordiamo di aver introdotto le seguenti posizioni per indicare i termini di *produzione*, vedi eq. (1.65),

$$P_{ij} = -\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \quad (11.12)$$

di *galleggiamento*, vedi eq. (5.12),

$$G_{ij} = -\beta_i \overline{u'_j T'} - \beta_j \overline{u'_i T'} \quad (11.13)$$

di *pressione–deformazione*, vedi eq. (1.66),

$$\phi_{ij} = \frac{\overline{p' \partial u'_j}}{\rho \partial x_i} + \frac{\overline{p' \partial u'_i}}{\rho \partial x_j} \quad (11.14)$$

di *dissipazione*, vedi eq. (1.67),

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_j}}{\partial x_k \partial x_k} \quad (11.15)$$

e di *trasporto*, vedi eq. (1.63)

$$d_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{\overline{p' u'_i}}{\rho} \delta_{jk} + \frac{\overline{p' u'_j}}{\rho} \delta_{ik} - \nu \frac{\overline{\partial u'_i \partial u'_j}}{\partial x_k} \right) \quad (11.16)$$

Con queste posizioni, l'equazione di conservazione per gli sforzi di Reynolds prende la forma (5.13):

$$\overline{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} - \epsilon_{ij} + d_{ij} \quad (11.17)$$

Per l'equazione dei flussi di Reynolds, adottiamo le seguenti posizioni per i termini di *produzione*, vedi eq. (5.14),

$$P_{iT} = -\overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} \quad (11.18)$$

di *galleggiamento*, vedi eq. (5.49),

$$G_{iT} = -\beta_i \overline{T'^2} \quad (11.19)$$

di *pressione–gradiente scalare* (di temperatura), vedi eq. (5.50),

$$\phi_{iT} = \frac{\overline{p' \partial T'}}{\rho \partial x_i} \quad (11.20)$$

di *dissipazione mista* (che abbiamo osservato essere sostanzialmente nullo in turbolenza quasi isotropa; tuttavia può assumere importanza in condizioni di forte anisotropia, per esempio in prossimità di una parete), vedi eq. (5.44),

$$\epsilon_{iT} = \left(\nu + \frac{\nu}{\sigma} \right) \frac{\overline{\partial u'_i \partial T'}}{\partial x_k \partial x_k} \quad (11.21)$$

di *trasporto*, vedi eq. (5.51),

$$d_{iT} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u'_i u'_k T'} + \frac{\overline{p' T'}}{\rho} \delta_{ik} - \kappa \frac{\overline{\partial u'_i \partial T'}}{\partial x_k} \right) \quad (11.22)$$

Con queste posizioni, l'equazione di conservazione per i flussi di Reynolds prende la forma (5.52):

$$\overline{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} = P_{iT} + G_{iT} + \phi_{iT} - \epsilon_{iT} + d_{iT} \quad (11.23)$$

Oltre a queste equazioni per gli sforzi ed i flussi di Reynolds, consideriamo anche, per motivi che risulteranno subito evidenti, l'equazione per un ulteriore momento secondo, la varianza della temperatura, vedi (9.26),

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} = -2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_k T'^2}}{\partial x_k} - \bar{\chi} \quad (11.24)$$

dove abbiamo introdotto la seguente posizione per designare il termine di *dissipazione scalare*, vedi eq. (9.25):

$$\bar{\chi} = 2 \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial \bar{T}'}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{T}'}{\partial x_k} \quad (11.25)$$

Possiamo allora tentare di risolvere, anziché il sistema delle equazioni mediate per i soli momenti primi, un sistema per le equazioni mediate dei momenti primi (continuità, quantità di moto, temperatura) e secondi (sforzi di Reynolds, flussi di Reynolds, varianza della temperatura):

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (11.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k u'_i}) - \beta_i (\bar{T} - T_0) \quad i = 1, 2, 3 \quad (11.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{u}_k \bar{T}) = \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k T'}) \quad (11.28)$$

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} = P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} - \epsilon_{ij} + d_{ij} \quad (11.29)$$

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} = P_{iT} + G_{iT} + \phi_{iT} - \epsilon_{iT} + d_{iT} \quad (11.30)$$

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} = -2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + \frac{\nu}{\sigma} \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial \overline{u'_k T'^2}}{\partial x_k} - \bar{\chi} \quad (11.31)$$

In questo sistema di 15 equazioni (5 per i momenti primi, e 10 per i momenti secondi) le incognite sono le tre componenti della velocità media, la pressione media, la temperatura media (quindi 5 momenti primi), le sei componenti indipendenti del tensore (simmetrico) degli sforzi di Reynolds, le tre componenti dei flussi di Reynolds, e la varianza della temperatura. È facile però constatare che il sistema non è chiuso. In particolare, mentre nelle equazioni per i momenti primi tutti termini sono chiusi, nelle equazioni dei momenti secondi alcuni termini risultano da modellare. Analizziamo a questo proposito ciascun termine delle equazioni per i momenti secondi. Nell'equazione per gli sforzi di Reynolds (11.29) il termine convettivo (a primo membro) è ovviamente chiuso; si può inoltre verificare dalle posizioni (11.12,11.13) che anche i termini di produzione P_{ij} e di galleggiamento G_{ij} sono chiusi. Risultano invece non chiusi i termini di pressione-deformazione ϕ_{ij} (11.14), dissipazione ϵ_{ij} (11.15), e trasporto d_{ij} (11.16), tranne il piccolo contributo a quest'ultimo derivante dal trasporto molecolare. Nell'equazione per i flussi di Reynolds (11.30), il termine convettivo (a primo membro) è ovviamente chiuso; il termine di produzione P_{iT} è anch'esso chiuso, come si può verificare dalla posizione (11.18). Per quanto riguarda il termine di galleggiamento G_{iT} (11.19), in esso figura la varianza della temperatura, ed è appunto per questo che è stata introdotta l'ulteriore equazione per questo momento secondo, sì da rendere chiuso G_{iT} . I termini di pressione-gradiente scalare ϕ_{iT} (11.20), dissipazione mista ϵ_{iT} (11.21), e trasporto d_{iT} (11.22) risultano invece non chiusi (tranne il piccolo contributo a d_{iT} dovuto ad effetti molecolari). Nell'equazione per la varianza della

temperatura (11.31) il termine convettivo a primo membro è ovviamente chiuso; anche il termine di produzione (il primo a secondo membro) risulta chiaramente chiuso, come pure il piccolo termine di trasporto molecolare (secondo a secondo membro). Sono invece non chiusi i termini di trasporto turbolento (terzo a secondo membro), ed il termine di dissipazione scalare $\bar{\chi}$ (11.25).

Quindi, come d'altronde già sapevamo, la risoluzione delle equazioni dei momenti secondi, in aggiunta a quelle per i momenti primi, non risolve il problema della chiusura delle equazioni mediate. Tuttavia, è importante osservare che, mentre nell'approccio basato sulla chiusura sui momenti primi i termini negli sforzi ed i flussi di Reynolds sono *totalmente* modellati, nell'approccio basato sulla chiusura sui momenti secondi tali termini sono descritti da equazioni in un cui buona parte dei termini (in particolare, convezione, produzione, galleggiamento, ed il sia pur piccolo termine di trasporto molecolare) sono tenuti in conto in maniera esatta, anche se altri termini (pressione-deformazione o pressione-gradiente scalare, dissipazione, trasporto turbolento) devono ancora essere modellati. In altre parole, dobbiamo aspettarci che i modelli con chiusura sui momenti secondi riescano a riprodurre una ben più grande porzione di fenomeni che si generano in flussi turbolenti, che non i modelli con chiusura sui momenti primi.

11.3 Inconvenienti della chiusura sui momenti secondi

Nonostante la loro riconosciuta maggiore potenzialità, i modelli con chiusura sui momenti secondi presentano alcuni inconvenienti che ne hanno fortemente ostacolato la diffusione, specie in applicazioni pratiche, cioè quelle perseguite generalmente da non specialisti mediante packages computazionali disponibili sul mercato.

Innanzitutto, i modelli con chiusura sui momenti primi richiedono la risoluzione delle equazioni (11.6–11.8) (se, come esempio, facciamo riferimento alla forma lineare del modello $k-\epsilon$), più due equazioni (per l'energia cinetica turbolenta ed il suo tasso di dissipazione viscosa), per un totale quindi di 7 equazioni nel caso considerato di flussi con galleggiamento. I modelli con chiusura sui momenti secondi richiedono invece, una volta specificate appropriate forme per i termini non chiusi, la soluzione delle equazioni (11.26–11.31), più ancora un'equazione per ϵ , per un totale di 16 equazioni. Inoltre le equazioni per i momenti secondi presentano numerosi, complessi termini; si comprende quindi come lo sforzo computazionale sia sensibilmente superiore rispetto ai modelli con chiusura sui momenti primi. Questo inconveniente tuttavia tende ad assumere un peso via via minore nel tempo con il continuo aumentare della potenza degli strumenti di calcolo disponibile.

La codifica dei modelli con chiusura sui momenti secondi è evidentemente alquanto più complessa di quella dei modelli con chiusura sui momenti primi, e questo è senz'altro il fattore che frena maggiormente lo sviluppo di codici di calcolo di questo tipo. Occorre comunque considerare che questo rappresenta un problema per chi *sviluppa* il codice di calcolo, ma non ovviamente per un utilizzatore che impiega un codice di calcolo già sviluppato.

Un diverso tipo di inconveniente, non quantitativo ma qualitativo, nasce invece dalla diversa struttura matematica delle equazioni che descrivono il flusso. Nella chiusura sui momenti primi, il fenomeno di trasporto turbolento è assimilato ad un processo diffusivo, vedi eq. (11.4,11.5), che quindi tende ad 'uniformare' il flusso, ossia a rendere più facile e stabile la soluzione numerica. Al contrario, nei modelli con chiusura sui momenti secondi, il trasporto turbolento appare nelle equazioni mediate della quantità di moto e della temperatura (11.27,11.28) come un termine sorgente, attraverso i termini

$$- \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k u'_i}) \quad (11.32)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_k T'}) \quad (11.33)$$

che evidentemente non hanno natura diffusiva. Possiamo dire che nella chiusura sui momenti primi il numero di Reynolds computazionale, essendo U ed L scale di velocità e lunghezza rappresentative per il moto medio

$$Re_c = \frac{U L}{\nu + \nu_t} \quad (11.34)$$

risulta essere molto basso perchè la viscosità turbolenta è in genere molto maggiore della viscosità molecolare. Nella chiusura sui momenti secondi invece, il numero di Reynolds computazionale viene a coincidere con quello effettivo

$$Re_c = Re = \frac{U L}{\nu} \quad (11.35)$$

e risulta quindi molto alto, per cui gli effetti diffusivi sono quasi trascurabili. La soluzione numerica di flussi turbolenti mediante modelli con chiusura sui momenti secondi può perciò rivelarsi operazione notevolmente delicata.

È tuttavia anche il caso di menzionare che alcuni modelli con chiusura sui momenti secondi sviluppati nell'ultimo decennio, pur ritenendo questo inconveniente intrinseco dell'approccio, sono stati disegnati al fine di evitare l'insorgere di situazioni computazionali prive di significato fisico, contribuendo in tal modo, tra l'altro, a rendere più agevole la soluzione numerica.

11.4 Espansione dei termini pressione–deformazione e pressione–gradiente scalare

Per poter utilizzare la chiusura sui momenti secondi, rimane quindi da fornire espressioni per i termini non chiusi delle equazioni per gli sforzi ed i flussi di Reynolds, e per la varianza della temperatura, eq. (11.29,11.30,11.31). Come abbiamo osservato, i termini che richiedono modellizzazione sono quelli di pressione–deformazione, pressione–gradiente scalare, trasporto turbolento, dissipazione. Come vedremo nei prossimi capitoli, alcuni di questi termini possono essere modellati con relativa affidabilità, mentre altri, e segnatamente quelli di pressione–deformazione ϕ_{ij} e pressione–gradiente scalare ϕ_{iT} , sono di difficile modellizzazione.

In questa sezione, prima di affrontare il problema della modellizzazione dei termini non chiusi, opereremo un'espansione dei termini in cui appare la pressione, al fine di aiutare a chiarirne il significato fisico, e dare indicazioni sulla possibile forma dei relativi modelli.

Ricordiamo in proposito che nella sez. 1.2 abbiamo ricavato l'equazione per lo sforzo di Reynolds moltiplicando per u_i l'equazione per u_j (cioè l'equazione della quantità di moto in direzione j), per u_j l'equazione per u_i , sommando e mediando; in modo simile, nella sez. 5.4 abbiamo ricavato l'equazione del flusso di Reynolds moltiplicando per u_i l'equazione per T , e mediando. Una procedura simile non può essere ripetuta per i termini pressione–deformazione e pressione–gradiente scalare perché non esiste un'equazione per la pressione, o almeno, come adesso vedremo, essa ha una forma alquanto diversa da quella per la quantità di moto o la temperatura.

Possiamo tuttavia ricavare un'equazione per il laplaciano della pressione, differenziando l'equazione della quantità di moto per la direzione i , scritta nella forma valida per i valori istantanei in presenza di galleggiamento, eq. (5.6), rispetto alla coordinata x_i . Si ha quindi

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 u_l u_i}{\partial x_i \partial x_l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i \partial x_l \partial x_l} - \beta_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (11.36)$$

Sommando rispetto ad i , ed adottando k come indice di sommatoria tensoriale, si ha, con qualche permutazione dell'ordine di derivazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (11.37)$$

la quale evidentemente dà, per l'equazione di continuità (1.1)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \beta_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (11.38)$$

Questa è la cosiddetta equazione di Poisson, nella forma valida per flussi con galleggiamento. Tale equazione, relativa al laplaciano della pressione, non può come detto essere direttamente utilizzata per ricavare indicazioni sui termini pressione–deformazione e pressione–gradiente scalare. Possiamo però intanto ottenerne una forma mediata, decomponendo dapprima pressione e velocità in componente media e componente fluttuante

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 (\bar{p} + p')}{\partial x_k \partial x_k} &= -\rho \frac{\partial^2 (\bar{u}_k + u'_k) (\bar{u}_l + u'_l)}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \beta_k \frac{\partial (\bar{T} + T')}{\partial x_k} = \\ &= -\rho \frac{\partial^2 \bar{u}_k \bar{u}_l}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \frac{\partial^2 u'_k \bar{u}_l}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \beta_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - \rho \beta_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (11.39)$$

Osserviamo che il secondo ed il terzo termine ad ultimo membro sono uguali fra loro (l'uno può essere ottenuto dall'altro mediante una semplice permutazione degli indici di sommatoria); il termine risultante può essere ulteriormente espanso osservando che

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{u}_k u'_l) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u'_l \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_l}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + u'_l \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \quad (11.40)$$

dove l'equazione di continuità è stata utilizzata per annullare i termini $\partial u'_l / \partial x_l$ e $\partial^2 \bar{u}_k / (\partial x_k \partial x_l) = \partial / \partial x_l (\partial \bar{u}_k / \partial x_k)$. La (11.39) può quindi risciversi

$$\frac{\partial^2 (\bar{p} + p')}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \frac{\partial^2 \bar{u}_k \bar{u}_l}{\partial x_k \partial x_l} - 2\rho \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \beta_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - \rho \beta_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (11.41)$$

Applicando quindi l'operatore di media, con ovvio annullarsi dei termini in cui compare una sola fluttuazione:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \frac{\partial^2 \bar{u}_k \bar{u}_l}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \frac{\partial^2 \overline{u'_k u'_l}}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \beta_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \quad (11.42)$$

Sottraendo la forma mediata (11.42) dalla forma istantanea (11.41) si ha l'equazione di Poisson per la fluttuazione di pressione:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_k \partial x_k} = -2\rho \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l} + \rho \frac{\partial^2 \overline{u'_k u'_l}}{\partial x_k \partial x_l} - \rho \beta_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (11.43)$$

Osserviamo che il terzo termine a secondo membro è trascurabile rispetto ai primi due: infatti in esso compaiono derivate di grandezze medie, che quindi variano su lunghezze dell'ordine delle scale integrali delle lunghezze. Nel primo e secondo termine compaiono invece derivate di grandezze fluttuanti, che cioè variano su scale delle lunghezze dell'ordine della scala di Kolmogorov, cioè sino alle più piccole scale della turbolenza. Ne segue che la (11.43) può essere riscritta, con ottima approssimazione, come

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l} - 2\rho \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} - \rho \beta_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (11.44)$$

Questa espressione permette di comprendere come la pressione fluttuante possa essere scissa in tre componenti

$$p' = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} \quad (11.45)$$

una legata unicamente ai gradienti delle componenti fluttuanti della velocità, che indichiamo come $p^{(1)}$, una legata sia ai gradienti delle componenti fluttuanti che ai gradienti di velocità media, che indichiamo come $p^{(2)}$, ed inoltre una derivante dalle fluttuazioni di temperatura, che indichiamo come $p^{(3)}$. La prima viene anche chiamata 'lenta', mentre la seconda viene chiamata componente 'rapida' o 'veloce', per motivi che vedremo fra breve. Possiamo allora pensare di scindere il termine pressione-deformazione (11.14), che è la media del prodotto della componente fluttuante della pressione per un gradiente di velocità, in maniera analoga alla (11.45)

$$\phi_{ij} = \phi_{ij1} + \phi_{ij2} + \phi_{ij3} \quad (11.46)$$

con

$$\phi_{ij1} = \frac{\overline{p^{(1)} \partial u'_j}}{\rho \partial x_i} + \frac{\overline{p^{(1)} \partial u'_i}}{\rho \partial x_j} \quad (11.47)$$

$$\phi_{ij2} = \frac{\overline{p^{(2)} \partial u'_j}}{\rho \partial x_i} + \frac{\overline{p^{(2)} \partial u'_i}}{\rho \partial x_j} \quad (11.48)$$

$$\phi_{ij3} = \frac{\overline{p^{(3)} \partial u'_j}}{\rho \partial x_i} + \frac{\overline{p^{(3)} \partial u'_i}}{\rho \partial x_j} \quad (11.49)$$

La prima componente è anch'essa chiamata 'lenta', o parte turbulenta; essa è interessata perciò dalla scala dei tempi caratteristica dei fenomeni turbolenti su grande scala (perché il termine $u'_k u'_l$ che compare nella (11.44), appare in forma mediata nella (11.48)), cioè quella che abbiamo identificato come k/ϵ . La seconda componente del termine pressione-deformazione è chiamata 'rapida' o 'veloce', od ancora parte di deformazione media. Notiamo che per le (11.44,11.45) essa è interessata, oltre che dalla scala k/ϵ , da una scala dei tempi definita dall'inverso del gradiente di velocità media. La scala dei tempi della seconda componente risulta normalmente molto più breve di quella associata con la prima, e questo giustifica i nomi assegnati loro.

Cogliamo l'occasione per osservare come l'insorgere di queste due scale dei tempi, che emergono naturalmente dalla formulazione ai momenti secondi, resta del tutto inavvertibile nella chiusura sui

momenti primi. Questo fornisce un'ulteriore indicazione della maggiore potenzialità della chiusura sui momenti secondi.

Occorre anticipare che, per motivi che appariranno più chiari in seguito, sarà poi necessario aggiungere una ulteriore quarta componente del termine ϕ_{ij} in prossimità della parete, che indicheremo come ϕ_{ij}^w .

Analogamente a quanto appena visto per il termine pressione–deformazione, anche il termine pressione–gradiente scalare (11.20) può essere scisso come

$$\phi_{iT} = \phi_{iT1} + \phi_{iT2} + \phi_{iT3} \quad (11.50)$$

avendo introdotto una componente ‘lenta’, o turbolenta

$$\phi_{iT1} = \frac{\overline{p^{(1)}}}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i} \quad (11.51)$$

una componente ‘rapida’, o ‘veloce’, o di deformazione media

$$\phi_{iT2} = \frac{\overline{p^{(2)}}}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i} \quad (11.52)$$

ed una componente dovuta alle forze di galleggiamento

$$\phi_{iT3} = \frac{\overline{p^{(3)}}}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i} \quad (11.53)$$

Considerazioni analoghe a quelle sulle scale dei tempi del termine pressione–deformazione possono essere avanzate anche per queste componenti.

11.5 Principi guida della modellizzazione dei termini non chiusi

Per poter applicare la chiusura sui momenti secondi, occorre quindi definire modelli per i seguenti termini non chiusi:

- nelle equazioni per gli sforzi di Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$:
 - pressione–deformazione, componente turbolenta (o ‘lenta’) ϕ_{ij1} ;
 - pressione–deformazione, componente di deformazione media (o ‘rapida’, o ‘veloce’) ϕ_{ij2} ;
 - pressione–deformazione, componente dovuta alle forze di galleggiamento ϕ_{ij3} ;
 - pressione–deformazione, componente in prossimità della parete ϕ_{ij}^w (eventualmente);
 - trasporto turbolento ¹ d_{ij} ;
 - tasso di dissipazione meccanica ϵ_{ij} .
- nelle equazioni per i flussi di Reynolds $\overline{u'_i T'}$:

¹In realtà d_{ij} , per come è stato definito (11.16), comprende anche il (piccolo) termine di trasporto molecolare, che non richiede modellizzazione.

- pressione–gradiente di temperatura, componente turbolenta (o ‘lenta’) ϕ_{iT1} ;
 - pressione–gradiente di temperatura, componente di deformazione media (o ‘rapida’, o ‘veloce’) ϕ_{iT2} ;
 - pressione–gradiente scalare, componente dovuta alle forze di galleggiamento ϕ_{iT3} ;
 - dissipazione mista ϵ_{iT} ;
 - trasporto turbolento ² d_{iT} ;
- nell’equazione per la varianza della temperatura $\overline{T'^2}$:
 - trasporto turbolento $-\overline{\partial u_k^i T'^2} / \partial x_k$;
 - tasso di dissipazione scalare $\overline{\chi}$.

La modellizzazione di questi termini sarà oggetto dei prossimi capitoli. Vogliamo invece qui individuare le condizioni generali che tali modelli devono (possibilmente) soddisfare, e che sono di seguito riportate. Questa discussione amplia quella accennata nella sez. 8.1.3.

1. Consistenza dimensionale. Questo principio richiede che il termine da modellare ed il modello per esso escogitato abbiano le stesse dimensioni.
2. Indipendenza dal sistema di coordinate. Il modello deve poter essere applicabile qualunque sia il sistema di coordinate scelto. Per assicurare questo principio, basta che il termine da modellare ed il modello possano essere scritti come tensori (o vettori, a seconda del termine considerato) cartesiani con gli stessi indici.
3. Invarianza galileiana. Questo principio richiede che le equazioni del moto siano invarianti rispetto ad una trasformazione (p. es. una rotazione) del sistema di riferimento, supposto inerziale. Quindi il termine da modellare ed il modello devono trasformarsi nello stesso modo.
4. Realizzabilità. Discuteremo ampiamente questo concetto, introdotto da Schumann [41], più avanti. Per ora ci basti osservare che esso richiede che la soluzione del modello deve sempre avere significato fisico. Per esempio, l’energia cinetica turbolenta dovrà sempre essere positiva o al più nulla, in quanto valori negativi dell’energia cinetica non hanno significato fisico.
5. Linearità ed indipendenza degli scalari conservati passivi ³. Questa condizione si applica alle equazione per le grandezze scalari, per esempio temperatura, entalpia e composizioni chimiche (espresse sotto forma di frazioni di massa, o in forme equivalenti). Per quanto nel contesto di queste note ci interessi solo marginalmente, osserviamo che essa richiede che le equazioni modellate per una grandezza scalare, definita come combinazione lineare di scalari conservati passivi siano pari alla combinazione lineare delle equazioni per i singoli scalari conservati.

²Analogamente, d_{iT} , per come è stato definito (11.22), comprende anche il (piccolo) termine di trasporto molecolare, che non richiede modellizzazione.

³Cioè grandezze scalari nelle cui equazioni compaiono solo termini di convezione e diffusione, mentre il termine sorgente (p. es. dovuto a reazioni chimiche) è nullo. In più, l’ipotesi richiede che queste grandezze siano passive, cioè influenzino in modo trascurabile la densità del fluido. Tali grandezze possono essere p. es. le concentrazioni di specie chimiche inerti presenti a livello di tracce, come alcuni inquinanti nell’aria atmosferica.

6. Limitatezza delle composizioni. Anche questa condizione si riferisce alle equazioni per grandezze scalari. Queste sono di per sé inerentemente vincolate a spaziare in un intervallo limitato. Per esempio, per la concentrazione della i -esima generica specie chimica, espressa in termini di frazioni di massa (cioè massa della specie i contenuta in una massa unitaria di miscela gassosa), vale la limitazione

$$0 \leq Y_i \leq 1 \quad (11.54)$$

ed il modello deve ovviamente rispettare questa limitazione.

Per quanto i concetti espressi da questi principi appaiano abbastanza ovvii, e sembrano definire veramente il *minimo* che si possa richiedere ai modelli di turbolenza, dobbiamo invece osservare che spesso i modelli attualmente disponibili violano alcuni di questi principi (ad eccezione del primo, che deve ovviamente essere strettamente osservato). Questo aggiunge un ulteriore fattore di approssimazione alle soluzioni ottenute mediante questi modelli di turbolenza.

11.5.1 Osservazioni sulla notazione

Talvolta alcuni dei termini delle equazioni per i momenti secondi sono indicati in letteratura con simboli differenti da quelli qui adottati. Per esempio, il termine d_{ij} (11.16) di trasporto degli sforzi di Reynolds è talvolta indicato come

$$-\frac{\partial d_{ijk}}{\partial x_k} \quad (11.55)$$

con d_{ijk} ovviamente dato da

$$d_{ijk} = \overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{\overline{p' u'_i}}{\rho} \delta_{jk} + \frac{\overline{p' u'_j}}{\rho} \delta_{ik} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \quad (11.56)$$

per rimarcare espressamente che il termine d_{ij} è la divergenza di un tensore del terzo ordine.

Nella notazione largamente adottata negli USA (in particolare da Lumley e collaboratori), tale termine di trasporto è indicato come T_{ij} oppure come

$$-\frac{\partial T_{ijk}}{\partial x_k} \quad (11.57)$$

dove il simbolo T sta a richiamare il concetto di trasporto (mentre la d largamente adottata in Europa richiama il concetto di diffusione, che come vedremo è adottato per modellare tale termine).

Per le componenti turbolenta, e di deformazione media, del tensore pressione–deformazione, da noi indicate come ϕ_{ij1} e ϕ_{ij2} rispettivamente, negli USA si adotta prevalentemente la notazione Π_{2ij} e Π_{1ij} (si noti che gli indici sono stati invertiti), oppure $\pi_{ij}^{(2)}$, dove però che nella componente turbolenta viene conglobata la parte anisotropa del tensore di dissipazione viscosa:

$$\pi_{ij}^{(2)} = \frac{\overline{p'^{(1)} \partial u'_j}}{\rho \partial x_i} + \frac{\overline{p'^{(1)} \partial u'_i}}{\rho \partial x_j} + \epsilon_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\epsilon} \quad (11.58)$$

Analoghe notazioni sono adottate per i termini dell'equazione per i flussi di Reynolds. Per quanto riguarda invece l'equazione per la varianza della temperatura (11.31), spesso essa viene scritta in termini di $\overline{T'^2}/2$ anziché $\overline{T'^2}$, per analogia con l'equazione dell'energia cinetica turbolenta. In

tal caso il termine di dissipazione scalare è normalmente indicato come ϵ_T , ed è pari alla metà dell'espressione (11.25).

Altri autori poi adottano notazioni loro proprie, per esempio Speziale denota i termini di trasporto nell'equazione degli sforzi di Reynolds come $-\partial C_{ijk}/\partial x_k$.

Capitolo 12

Chiusura sui momenti secondi: modelli lineari

In questo capitolo diamo le linee generali della modellizzazione dei termini che appaiono in forma non chiusa nelle equazioni dei momenti secondi, cioè l'equazione degli sforzi di Reynolds (11.17), l'equazione dei flussi di Reynolds (11.23), e l'equazione della varianza della temperatura (11.24). Ci limitiamo per ora a considerare i modelli 'classici', in cui i termini non chiusi sono espressi tramite funzioni lineari degli sforzi, o equivalentemente del tensore anisotropia (10.77), e dei flussi di Reynolds. Inoltre, invochiamo l'ipotesi di flusso ad alto numero di Reynolds, il che comporta due conseguenze:

1. i moti su grande scala, ai quali è dovuta la gran parte del trasporto turbolento di quantità di moto e calore, non sono praticamente influenzati dalla diffusività (viscosità e conducibilità) molecolare del fluido;
2. i moti su piccola scala, responsabili della dissipazione viscosa, non sono direttamente influenzati dai moti su grande scala e dal moto medio, per cui sono isotropi.

Questo significa ovviamente che tali modelli non sono applicabili in prossimità di una parete, ove la turbolenza non è isotropa (in quanto sicuramente avverte la direzione normale alla parete come una direzione particolare). Per comodità di esposizione, raggruppiamo insieme la modellizzazione di termini di significato analogo nelle tre equazioni citate, specializzandola poi a ciascuna di esse.

12.1 Termini di trasporto turbolento

Questi termini, come osservato, hanno un effetto di redistribuzione spaziale dei momenti secondi. Hanno quindi un significato analogo ai termini nelle derivate spaziali degli sforzi e dei flussi di Reynolds, che compaiono nelle equazioni per i momenti primi. Nella chiusura sui momenti primi, questi termini sono stati modellati con l'ipotesi di trasporto secondo gradiente, in particolare, nei modelli lineari, nella forma (11.4,11.5).

Nei termini che abbiamo indicato come d_{ij} e d_{iT} , vedi eq. (11.16,11.22), e nell'ultimo termine dell'eq. (11.24), compaiono momenti tripli (cioè valori medi del prodotto di tre componenti fluttuanti) $\overline{u'_k u'_i u'_j}$, $\overline{u'_k u'_i T'}$ e $\overline{u'_k T'^2}$ rispettivamente. Nasce di conseguenza l'idea di modellarli in analogia con l'ipotesi di trasporto secondo gradiente, avanzata nella sez. 3.1 (per i momenti secondi). La disponibilità, nell'ambito del livello di chiusura in considerazione, dei valori dei momenti secondi, consente una formulazione più generale dell'ipotesi stessa. Adottiamo qui in particolare l'ipotesi di trasporto

secondo gradiente generalizzato nella forma suggerita da Daly e Harlow [42]. Indicando il prodotto di due generiche componenti fluttuanti fluttuanti come φ' (p. es $\varphi' = u'_i T'$), tale modello ipotizza

$$\overline{u'_i \varphi'} = -c_\varphi \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_k} \quad (12.1)$$

dove al solito l'indice tensoriale k indica sommatoria sulle tre direzioni coordinate; il valore di c_φ può dipendere dalla particolare grandezza φ considerata. Si osservi come questa forma richiami quella adottata per descrivere i flussi di Reynolds nei modelli considerati nel cap. 8.2. Specializziamo ora questo modello alle tre equazioni per i momenti secondi sotto esame.

12.1.1 Equazione degli sforzi di Reynolds

Secondo l'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato nella forma (12.1), il momento triplo che compare nella (11.5) può essere modellato come

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -c_s \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \quad (12.2)$$

dove l'indice s della costante di modellizzazione sta ad indicare che questa si riferisce all'espressione degli *sforzi* di Reynolds. Il valore suggerito è nel campo

$$c_s = 0.21 \div 0.22 \quad (12.3)$$

La forma (12.2) presenta tuttavia un difetto concettuale; si può facilmente constatare che mentre gli indici i, j, k che appaiono a primo membro possono essere permutati senza alterare la il prodotto, ciò non vale per il modello a secondo membro. In altre parole, non è rispettato il principio di indipendenza dal sistema di coordinate citato nella sez. 11.5. Un modello che rispetta invece tale principio è quello di Hanjalić e Launder [10]:

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} = -c_s \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \left(\overline{u'_i u'_l} \frac{\partial \overline{u'_j u'_k}}{\partial x_l} + \overline{u'_j u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_l} + \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right) \quad (12.4)$$

Questo secondo modello comporta ovviamente un numero di termini triplo rispetto a quello di Daly e Harlow; per la precisione, per ciascuno dei 10 distinti momenti tripli, il modello di Daly e Harlow comprende 3 termini, quello di Hanjalić e Launder 9. Tuttavia, occorre osservare che in realtà il momento triplo $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ che intendiamo modellare compare nell'equazione per gli sforzi di Reynolds (11.5) sotto il segno di derivata parziale rispetto a x_k , quindi la (12.2) compare nella forma

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k} = -c_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right) \quad (12.5)$$

e si constata facilmente che questa rispetta l'invarianza rispetto ad una permutazione degli indici i e j (k in questa espressione è un indice di sommatoria). In secondo luogo, occorre osservare che la modellizzazione dei momenti tripli, per quanto giochi un ruolo nelle equazioni per i momenti secondi, si riflette in misura contenuta sulle equazioni per i momenti primi; inoltre è stato ampiamente provato per via computazionale che soluzioni numeriche ottenute adottando il modello di Daly e Harlow, o in alternativa il modello più corretto (ma più complesso) di Hanjalić e Launder, non danno risultati apprezzabilmente differenti.

Il momento triplo considerato è tuttavia solo una delle componenti del termine d_{ij} da modellare; a parte il termine nella viscosità molecolare ν (che è chiuso a questo livello), rimangono i termini nella pressione fluttuante (anch'essi sotto derivata)

$$\frac{\overline{p'u'_i}}{\rho} \delta_{jk} + \frac{\overline{p'u'_j}}{\rho} \delta_{ik} \quad (12.6)$$

Questi termini sono generalmente trascurati poiché si ritiene siano di modesta importanza [10]. È tuttavia interessante osservare che questi termini *non* sono invarianti rispetto ad una permutazione degli indici i, j, k , il che offre qualche motivo per considerare la forma di Daly e Harlow (12.2) come un modello globale per il momento triplo *ed* i termini (12.6) stessi. In alternativa, per i termini nella pressione fluttuante un modello è stato proposto da Lumley [36].

In definitiva, adottiamo per il termine di trasporto turbolento dell'equazione degli sforzi di Reynolds, tenendo conto anche del termine molecolare (il quale è comunque generalmente trascurato del tutto, essendo come sempre di ordine di grandezza nettamente inferiore alla sua controparte turbolenta), la forma

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_s \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right] \quad (12.7)$$

12.1.2 Equazione dei flussi di Reynolds

L'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato nella forma (12.1), applicata al momento triplo $\overline{u'_i u'_k T'}$ che compare nel termine di trasporto (11.22) dell'equazione dei flussi di Reynolds, risulta in

$$\overline{u'_i u'_k T'} = -c_f \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_l} \quad (12.8)$$

dove l'indice f della costante di modellizzazione sta ad indicare che questa si riferisce all'espressione dei *flussi* di Reynolds. Il valore suggerito è

$$c_f = 0.15 \quad (12.9)$$

Anche in questo caso, il termine nella pressione fluttuante $\overline{p'T'} \delta_{ik} / \rho$ non è considerato esplicitamente, pur essendo stato proposto da Lumley [36] un modello.

Adottiamo quindi per il termine di trasporto turbolento dell'equazione di flussi di Reynolds, tenendo conto anche del termine molecolare (anch'esso generalmente trascurato del tutto), la forma

$$d_{iT} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_f \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \kappa \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_l} \right] \quad (12.10)$$

12.1.3 Equazione della varianza della temperatura

Il termine di trasporto turbolento dell'equazione della varianza della temperatura (11.24) può essere anch'esso modellato secondo la (12.1), che dà

$$\overline{u'_k T'^2} = -c_v \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_l} \quad (12.11)$$

dove l'indice v della costante di modellizzazione sta ad indicare che questa si riferisce all'espressione della *varianza* della temperatura. Il valore suggerito è

$$c_v = 0.20 \quad (12.12)$$

In questa equazione non si hanno termini nella pressione fluttuante. Il termine di trasporto turbolento (quello di trasporto molecolare è indicato separatamente nell'equazione per la varianza della temperatura) risulta perciò nel complesso

$$-\frac{\overline{\partial u'_k T'^2}}{\partial x_k} = c_v \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_l} \right) \quad (12.13)$$

Il (piccolo) termine di trasporto molecolare può eventualmente essere inglobato in esso, per dare

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_v \frac{\overline{k}}{\overline{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \frac{\nu}{\sigma} \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_l} \right] \quad (12.14)$$

12.2 Termini di dissipazione

Per modellare i termini di dissipazione (11.15,11.22,11.25) che compaiono nelle equazioni per i momenti secondi, faremo ricorso all'ipotesi di flusso ad alto numero di Reynolds avanzata all'inizio di questo capitolo. Le derivate spaziali dei valori fluttuanti che compaiono in questi termini sono infatti influenzate in misura preponderante dalle fluttuazioni che avvengono sulle più piccole scale (dette appunto anche scale dissipative); a queste scale la turbolenza è sostanzialmente isotropa. Trarremo vantaggio da questa osservazione per imporre le proprietà che il tensore di dissipazione ϵ_{ij} ed il vettore di dissipazione mista ϵ_{iT} devono soddisfare. Cominciamo, per semplicità espositiva, dall'equazione per i flussi di Reynolds.

12.2.1 Equazione dei flussi di Reynolds

Per quanto detto, il valore della dissipazione mista ϵ_{iT} deve risultare indipendente dall'orientamento degli assi, in quanto il flusso, alle piccole scale, non ha modo di riconoscere una direzione preferenziale. Analizziamo però cosa comporta un cambiamento del sistema di riferimento sul valore dell'espressione della dissipazione mista, data formalmente da

$$\epsilon_{iT} = \left(\nu + \frac{\nu}{\sigma} \right) \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k}} \quad (12.15)$$

Supponiamo per esempio che la direzione i coincida con quella dell'asse x_1 , e che ϵ_{iT} abbia un determinato valore. Consideriamo ora un nuovo sistema di riferimento, il cui asse x_1^* abbia la stessa direzione, ma verso opposto ad x_1 , mentre gli altri due assi conservano le direzioni ed i versi originari di x_2 e x_3 . Nel nuovo sistema, la velocità in direzione x_1^* , indicata come u_1^* , è evidentemente opposta a quella originaria u_1 , mentre per le altre due è $u_2^* = u_2$ e $u_3^* = u_3$. Allora, consideriamo l'effetto di questa 'riflessione' dell'asse x_1 su ϵ_{iT} , che esplicitiamo dalla (12.15), espandendo la sommatoria, come

$$\epsilon_{iT} = \left(\nu + \frac{\nu}{\sigma} \right) \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \frac{\partial T'}{\partial x_1}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_2} \frac{\partial T'}{\partial x_2}} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_3} \frac{\partial T'}{\partial x_3}} \right) \quad (12.16)$$

Assumendo per fissare le idee che sia $i = 1$, per il primo dei tre termini della sommatoria è

$$\frac{\partial u_i^{*'}}{\partial x_1^*} = \frac{\partial u_i'}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial T'}{\partial x_1^*} = -\frac{\partial T'}{\partial x_1} \quad (12.17)$$

per cui il primo termine della (12.16) cambia segno per effetto della riflessione; per il secondo ed il terzo termine è

$$\frac{\partial u_i^{*'}}{\partial x_2^*} = -\frac{\partial u_i'}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial T'}{\partial x_2^*} = \frac{\partial T'}{\partial x_2} \quad (12.18)$$

$$\frac{\partial u_i^{*'}}{\partial x_3^*} = -\frac{\partial u_i'}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial T'}{\partial x_3^*} = \frac{\partial T'}{\partial x_3} \quad (12.19)$$

per cui anche questi cambiano segno. Quindi, il valore di ϵ_{iT} nel nuovo sistema di riferimento è opposto a quello nel sistema originario. Tuttavia, come detto, il valore di ϵ_{iT} deve risultare indipendente dall'orientazione del sistema di riferimento, per cui l'unico valore possibile, per flussi ad alto numero di Reynolds, è

$$\epsilon_{iT} = 0 \quad (12.20)$$

12.2.2 Equazione degli sforzi di Reynolds

Per la definizione (1.72) di dissipazione meccanica, quest'ultima risulta essere la metà della contrazione del termine ϵ_{ij} che appare nell'equazione degli sforzi di Reynolds

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_{kk}}{2} \quad (12.21)$$

Per l'isotropia delle piccole scale delle fluttuazioni, ϵ_{ij} deve risultare indipendente dall'orientamento del sistema di coordinate. Ne segue che, nell'ipotesi adottata di flusso ad alto numero di Reynolds, ϵ_{ij} dovrà essere esprimibile come un tensore isotropo, e quindi avrà necessariamente la forma

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \bar{\epsilon} \delta_{ij} \quad (12.22)$$

per rispettare la (12.21). La dissipazione tensoriale ϵ_{ij} è quindi espressa in funzione di $\bar{\epsilon}$, per la quale deve quindi essere risolta, come nel modello k - ϵ , un'equazione di conservazione opportunamente modellata. Questa è un'opportuna generalizzazione della (5.60)

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = -c_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - \beta_k \overline{u'_k T'} \right) - c_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_\epsilon \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_l} \right] \quad (12.23)$$

dove i termini che moltiplicano $c_{\epsilon 1} \bar{\epsilon}/\bar{k}$ (che rappresentano i termini di produzione e galleggiamento nell'equazione per l'energia cinetica turbolenta) sono espressi direttamente tramite gli sforzi ed i flussi di Reynolds (noti a questo livello di chiusura); il termine di trasporto turbolento è stato espresso tramite l'ipotesi di trasporto secondo gradiente generalizzato, con

$$c_\epsilon = 0.18 \quad (12.24)$$

Per i valori delle costanti, nei modelli considerati in questo capitolo si assumono generalmente [43] valori assai vicini (anche se non esattamente uguali) a quelli del modello k - ϵ :

$$c_{\epsilon 1} = 1.44 \quad (12.25)$$

$$c_{\epsilon 2} = 1.90 \quad (12.26)$$

12.2.3 Equazione per la varianza della temperatura

Essendo la dissipazione scalare già di per sé indipendentemente dall'orientamento del sistema di riferimento, l'ipotesi di flusso ad alto numero di Reynolds non fornisce indicazioni. Non resta quindi che risolvere per essa un'equazione, di tipo algebrico, come la (9.36) che qui riportiamo

$$\bar{\chi} = c_{\chi} \frac{\overline{\epsilon T'^2}}{k} \quad (12.27)$$

con $c_{\chi} = 2.0$, oppure differenziale, di tipo quindi analogo alla (12.23). La seconda opzione è evidentemente coerente con il livello di modellizzazione adottata. Tuttavia, a causa delle notevoli incertezze nella modellizzazione dell'equazione per $\bar{\chi}$, questa seconda opzione non porta necessariamente a risultati migliori della più semplice relazione algebrica (12.27), che resta perciò in genere ancora preferita.

12.3 Componente turbolenta dei termini pressione–gradiente

In questa sezione introduciamo i modelli per la componente turbolenta dei termini pressione–deformazione e pressione–gradiente di temperatura che compaiono rispettivamente nelle equazioni per gli sforzi ed i flussi di Reynolds.

12.3.1 Equazione degli sforzi di Reynolds

Per studiare l'effetto della componente turbolenta, conviene porsi in condizioni di turbolenza isotropa, cioè in assenza di gradienti di velocità media, in un sistema di riferimento in cui la velocità media del flusso è nulla; supponiamo inoltre che non vi siano effetti di galleggiamento. Notiamo che in questa situazione non può aversi un flusso statisticamente stazionario (ipotesi che abbiamo sempre adottato in queste note), in quanto si annulla il termine di produzione che alimenta i moti fluttuanti, mentre resta attivo il termine di dissipazione. Nell'equazione (11.17) per gli sforzi di Reynolds dobbiamo allora ristabilire a primo membro un termine di transiente; il termine convettivo (derivata spaziale di valori medi) si annulla in quanto tutti i gradienti sono stati assunti nulli. In queste condizioni si ha allora

$$\frac{d\overline{u'_i u'_j}}{dt} = \phi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (12.28)$$

annullandosi, oltre al termine convettivo, quelli di produzione, trasporto e la componente di deformazione media dell'interazione pressione–deformazione, per l'assenza di gradienti dei valori medi; i termini di galleggiamento e la componente di galleggiamento fluttuante del termine pressione–deformazione sono anch'essi nulli per ipotesi.

Si vede quindi che restano attivi solo il termine sotto studio, e la dissipazione viscosa. Le condizioni di turbolenza omogenea possono essere riprodotte nel flusso dietro ad una griglia, vedi sez. 10.1, se consideriamo un sistema di riferimento in moto con la velocità media del flusso. L'effetto del

termine di dissipazione ϵ_{ij} nella (12.28) è chiaro dalla (12.22), la quale, incidentalmente, è esatta per turbolenza omogenea isotropa: il termine provoca un decadimento temporale delle componenti normali del tensore degli sforzi di Reynolds, mentre non ha effetto su quelle di taglio. Resta quindi da individuare l'effetto di ϕ_{ij1} , che sappiamo essere di redistribuzione direzionale dell'intensità delle fluttuazioni; tuttavia possiamo domandarci se questo effetto è tale da far tendere la turbolenza ad uno stato isotropo ($\overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2}$), o se invece sortisce l'effetto opposto. La risposta a questo quesito può essere data per via sperimentale, generando dapprima turbolenza fortemente anisotropa mediante un condotto di forma opportuna, e poi lasciandola decadere in assenza di gradienti di velocità media (p. es. mediante un condotto allungato che scarica in una camera di grande volume). Si trova allora che il termine in questione tende a far ritornare la turbolenza verso uno stato isotropo; il termine è perciò detto *redistributivo*¹.

Occorre quindi adottare un modello che rispetti questa caratteristica. Il modello classicamente adottato è quello proposto da Rotta nel 1951. Ricordiamo la definizione (10.77) del tensore anisotropia

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{\bar{k}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (12.29)$$

Il modello di Rotta è allora

$$\phi_{ij1} = -c_1 \bar{\epsilon} a_{ij} \quad (12.30)$$

od equivalentemente, in forma esplicita

$$\phi_{ij1} = -c_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{k} \right) \quad (12.31)$$

e di conseguenza la forma modellata della (12.28) è, anche in virtù della (12.22),

$$\frac{d\overline{u_i' u_j'}}{dt} = -c_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\epsilon} \delta_{ij} \quad (12.32)$$

La (12.32) può essere riscritta come un'equazione per l'anisotropia, per evidenziare l'effetto di ϕ_{ij1} su di essa. A tale scopo, esplicitiamo lo sforzo di Reynolds dalla definizione (12.29)

$$\overline{u_i' u_j'} = \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \bar{k} \quad (12.33)$$

La (12.32) si riscrive allora, espandendo la derivata a primo membro

$$\left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \frac{d\bar{k}}{dt} + \bar{k} \frac{da_{ij}}{dt} = -c_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} a_{ij} \bar{k} - \frac{2}{3} \bar{\epsilon} \delta_{ij} \quad (12.34)$$

Esplicitando la derivata temporale del tensore anisotropia

$$\frac{da_{ij}}{dt} = - \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \frac{1}{\bar{k}} \frac{d\bar{k}}{dt} - c_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} a_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \delta_{ij} \quad (12.35)$$

In turbolenza omogenea l'energia cinetica turbolenta decade per effetto della dissipazione viscosa come

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = -\bar{\epsilon} \quad (12.36)$$

¹In senso stretto; tutte le componenti dell'interazione pressione-deformazione hanno un effetto di redistribuzione spaziale, che tuttavia può ridurre, od al contrario esaltare l'anisotropia.

Allora sostituendo nella (12.35) si ha

$$\frac{da_{ij}}{dt} = \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} - c_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} a_{ij} - \frac{2}{3} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \delta_{ij} \quad (12.37)$$

ossia

$$\frac{da_{ij}}{dt} = -(c_1 - 1) a_{ij} \quad (12.38)$$

dove evidentemente il termine in c_1 è relativo al modello di Rotta per il termine in questione, ed il termine sottraendo al processo di dissipazione viscosa. Dalla (12.38) si vede che, per ottenere l'osservato decadimento dell'anisotropia, la costante di modellizzazione c_1 deve essere maggiore di uno. Infatti, se $c_1 - 1 > 0$, l'effetto della (12.38) nell'equazione degli sforzi di Reynolds è evidentemente quello di far tendere in ogni caso a_{ij} verso il valore zero. Launder [43] suggerisce il valore

$$c_1 = 1.5 \quad (12.39)$$

Il valore adottato per c_1 è comunque strettamente associato a quello di un'altra costante, c_2 , che introdurremo per modellare la componente di deformazione media.

12.3.2 Equazione dei flussi di Reynolds

Per modellare il termine ϕ_{iT1} ricorriamo ad una forma analoga alla (12.30), che per rispettare la consistenza dimensionale risulta

$$\phi_{iT1} = -c_{1T} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \overline{u_i' T'} \quad (12.40)$$

Questa forma dipende solo da grandezze fluttuanti, e quindi rispetta la natura del termine; si osservi inoltre l'ipotizzata dipendenza lineare dal flusso di Reynolds, analoga alla dipendenza lineare dal tensore anisotropia ipotizzata per la (12.30). Il valore della costante è preso pari

$$c_{1T} = 3.5 \quad (12.41)$$

Essendo questa costante positiva, l'effetto della (12.30) nell'equazione dei flussi di Reynolds è evidentemente quello di far tendere in ogni caso (cioè sia per $\overline{u_i' T'} > 0$ che $\overline{u_i' T'} < 0$) il flusso di Reynolds considerato verso il valore zero.

La scala dei tempi ipotizzata per modello (12.40) è la scala associata con il decadimento dell'energia cinetica turbolenta, che possiamo chiamare scala *dinamica*:

$$\frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \quad (12.42)$$

Alcuni autori hanno suggerito di sostituire a questa scala una scala dei tempi *termica*, basata sul tasso di dissipazione delle fluttuazioni di temperatura:

$$\frac{\overline{T'^2}}{\bar{\chi}} \quad (12.43)$$

oppure una scala dei tempi *mista termica/dinamica*:

$$\sqrt{\frac{\bar{k} \overline{T'^2}}{\bar{\epsilon} \bar{\chi}}} \quad (12.44)$$

12.4 Componente di deformazione media dei termini pressione–gradiente

La componente di deformazione media, o ‘rapida’ per concisione, dei termini pressione–deformazione delle equazioni degli sforzi di Reynolds è data, vedi (11.48), da

$$\phi_{ij2} = \frac{\overline{p^{(2)}}}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \quad (12.45)$$

Essa nasce quindi dall’interazione fra la componente appunto ‘rapida’ della pressione, il cui laplaciano per le (11.44,11.45) è esprimibile come

$$\frac{\partial^2 \overline{p^{(2)}}}{\partial x_k \partial x_k} = -2\rho \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \quad (12.46)$$

e le componenti del tensore della deformazione fluttuante.

Nelle equazioni dei flussi di Reynolds compaiono termini analoghi nella componente fluttuante del gradiente scalare, vedi (11.52):

$$\phi_{iT2} = \frac{\overline{p^{(2)}}}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i} \quad (12.47)$$

Questi termini sono i più difficili da modellare nella chiusura sui momenti secondi. Nel seguito riportiamo le linee generali dei modelli lineari di applicazione più sperimentata.

12.4.1 Equazione degli sforzi di Reynolds

Il modello che cerchiamo per ϕ_{ij2} dovrà ovviamente essere un tensore del second’ordine negli indici i e j , cioè dovrà essere esprimibile nella forma

$$\phi_{ij2} = (\dots)_{ij} \quad (12.48)$$

per rispettare il principio di indipendenza dal sistema di coordinate, vedi sez. 11.5. Per l’espressione (12.46) del laplaciano della componente rapida della pressione fluttuante, il modello dovrà presumibilmente prevedere una dipendenza dal tensore gradiente della velocità media $\partial \bar{u}_k / \partial x_l$, che a sua volta è un tensore del second’ordine; si noti inoltre che in tale laplaciano gli indici k ed l figurano come indici di sommatoria, per cui in ciascuna componente del tensore ϕ_{ij2} (cioè ogni coppia i, j) devono comparire tutte le nove componenti di $\partial \bar{u}_k / \partial x_l$. La forma più semplice ipotizzabile che soddisfi queste condizioni è

$$\phi_{ij2} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} a_{lkij} \quad (12.49)$$

dove con a_{lkij} abbiamo indicato un tensore del quart’ordine, ancora da definire. Si noti che il prodotto indicato tra un tensore del second’ordine ed uno del quarto, con k ed l come indici di sommatoria, dà appunto un tensore del second’ordine, come richiesto dalla (12.48). A questo punto, resta da individuare una dipendenza opportuna del tensore a_{lkij} dalle variabili rilevanti. Questa può essere individuata operando un’integrazione formale del laplaciano della componente di deformazione media della pressione fluttuante, e moltiplicando la risultante espressione di $p^{(2)}$ per il tensore di deformazione fluttuante (diviso per ρ), e successivamente mediando, al fine di recuperare l’espressione

a secondo membro della (12.45). Il risultato di questa derivazione, che incidentalmente si avvale della seconda identità di Green, è del tipo

$$\phi_{ij2}(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int \int \int_V \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right)^* \overline{\left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \right)^* \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \frac{dV}{\sqrt{x_k^* x_k^* - x_k x_k}} \quad (12.50)$$

In questa espressione l'integrale triplo denota un'integrale di volume, esteso a tutto il dominio del flusso, e dV indica l'elementino di volume. Le grandezze senza asterisco sono valutate nel punto di coordinate \underline{x} , mentre quelle con l'asterisco sono valutate in un punto distinto di coordinate \underline{x}^* , al centro del volumetto di integrazione dV ; quindi $\sqrt{x_k^* x_k^* - x_k x_k}$ indica la distanza tra i punti \underline{x} e \underline{x}^* . Aggiungiamo che in realtà il risultato dell'integrazione contempla un ulteriore termine, un integrale di superficie sul contorno; esso è comunque verosimilmente trascurabile ad una certa distanza dalle pareti (ne terremo invece conto quando studieremo il trattamento dello strato limite).

L'integrale (12.50) può essere usato per ricavare un'espressione formale per il tensore a_{lkij} , eguagliandolo alla posizione (12.49). L'espressione che se ne ricava è

$$a_{lkij} = -\frac{1}{2\pi} \int \int \int_V \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_l^* \bar{u}_i'}{\partial \xi_k \partial \xi_j} + \frac{\partial^2 \bar{u}_l^* \bar{u}_j'}{\partial \xi_k \partial \xi_i} \right) \frac{dV}{\sqrt{x_k^* x_k^* - x_k x_k}} \quad (12.51)$$

dove le ξ indicano le componenti cartesiane del vettore distanza $\underline{x} - \underline{x}^*$. In questa espressione figurano derivate seconde di qualcosa di simile ad uno sforzo di Reynolds (ancorché le fluttuazioni u'_i ed u'_i , od u'_j , siano valutate in due differenti punti del campo). Questo suggerisce di assegnare il tensore a_{lkij} come una funzione degli sforzi di Reynolds. La più semplice dipendenza ipotizzabile è quella lineare; tuttavia, essendo richiesto un tensore del quart'ordine, sarà necessario moltiplicare gli sforzi di Reynolds per un'altro tensore (costante) del second'ordine (senza indici ripetuti, per evitare sommatorie che ridurrebbero il rango del tensore). È indicato a tale scopo il delta di Kronecker, che è il più semplice tensore del second'ordine. La forma adottabile potrebbe allora essere del tipo

$$a_{lkij} = \alpha_1 \overline{u'_i u'_i} \delta_{kj} + \alpha_2 \overline{u'_i u'_k} \delta_{ij} + \alpha_3 \overline{u'_i u'_j} \delta_{ik} + \alpha_4 \overline{u'_i u'_j} \delta_{lk} + \alpha_5 \overline{u'_i u'_k} \delta_{lj} + \alpha_6 \overline{u'_k u'_j} \delta_{li} + \dots \quad (12.52)$$

e potrebbe anche includere termini nella grandezza scalare \bar{k} , l'energia cinetica turbolenta (che, si ricordi, deriva dalla contrazione degli sforzi normali di Reynolds), previa moltiplicazione per un tensore costante del quart'ordine, o più semplicemente, per due tensori costanti del second'ordine

$$a_{lkij} = \dots + \eta_1 \delta_{il} \delta_{kj} \bar{k} + \eta_2 \delta_{lj} \delta_{ik} \bar{k} + \eta_3 \delta_{lk} \delta_{ij} \bar{k} \quad (12.53)$$

Nelle espressioni (12.52,12.53) le α e le η sono costanti da determinare, per un totale di nove costanti; si osservi che tali costanti devono essere adimensionali, come si può facilmente dedurre confrontando le dimensioni della (12.51) e dei secondi membri delle (12.52,12.53). Queste tuttavia sono le più generali espressioni che soddisfino ai requisiti introdotti. Possiamo esaminare se il tensore a_{lkij} debba soddisfare qualche proprietà di simmetria, per tentare di limitare il numero di costanti di modellizzazione da determinare. Dalla (12.51) si osserva che il tensore a_{lkij} deve risultare simmetrico rispetto agli indici i ed l , ed anche rispetto agli indici j e k . Si può constatare che il primo termine della forma (12.52)

$$\overline{u'_i u'_i} \delta_{kj} \quad (12.54)$$

soddisfa tanto la simmetria rispetto agli indici i ed l , quanto quella rispetto agli indici j e k ; lo stesso vale per il sesto termine della (12.52)

$$\overline{u'_k u'_j} \delta_{li} \quad (12.55)$$

Al contrario, notiamo che nessuno dei quattro termini

$$\overline{u'_l u'_k} \delta_{ij} \quad (12.56)$$

$$\overline{u'_l u'_j} \delta_{ik} \quad (12.57)$$

$$\overline{u'_i u'_j} \delta_{lj} \quad (12.58)$$

$$\overline{u'_i u'_k} \delta_{lj} \quad (12.59)$$

soddisfa né l'una, né l'altra simmetria. Tuttavia, è possibile osservare che la loro somma

$$\overline{u'_l u'_k} \delta_{ij} + \overline{u'_l u'_j} \delta_{ik} + \overline{u'_i u'_j} \delta_{lk} + \overline{u'_i u'_k} \delta_{lj} \quad (12.60)$$

soddisfa ambedue le condizioni. Il termine (12.60) dovrà quindi necessariamente comparire nella (12.52) moltiplicato per una singola costante di modellizzazione (anziché attraverso quattro costanti distinte che moltiplicano ciascuno dei suoi termini individuali); questo permette già di ridurre di tre il numero delle costanti del modello da determinare. Per quanto riguarda i termini in \bar{k} che compaiono nella (12.53), osserviamo che il termine

$$\delta_{ii} \delta_{kj} \bar{k} \quad (12.61)$$

soddisfa entrambe le condizioni di simmetria, mentre i termini

$$\delta_{lj} \delta_{ik} \bar{k} \quad (12.62)$$

$$\delta_{lk} \delta_{ij} \bar{k} \quad (12.63)$$

non ne soddisfano alcuna. Tuttavia, se consideriamo la somma dei termini (12.62,12.63)

$$\delta_{lj} \delta_{ik} \bar{k} + \delta_{lk} \delta_{ij} \bar{k} \quad (12.64)$$

vediamo che essa soddisfa ancora sia la simmetria rispetto a i ed l che quella rispetto a j e k . Il termine (12.64) dovrà quindi anch'esso necessariamente comparire nella (12.53) moltiplicato per una singola costante di modellizzazione (anziché attraverso due costanti distinte), e questo permette di ridurre ancora di uno il numero delle costanti del modello da determinare. Quindi, il modello che soddisfa le proprietà di simmetria richieste è del tipo

$$\begin{aligned} a_{lkij} = & \alpha \overline{u'_l u'_i} \delta_{kj} + \beta (\overline{u'_l u'_k} \delta_{ij} + \overline{u'_l u'_j} \delta_{ik} + \overline{u'_i u'_j} \delta_{lk} + \overline{u'_i u'_k} \delta_{lj}) + \gamma \overline{u'_k u'_j} \delta_{li} + \\ & + [\eta \delta_{ii} \delta_{kj} + v (\delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{lk} \delta_{ij})] \bar{k} \end{aligned} \quad (12.65)$$

ed in esso compaiono quindi cinque costanti di modellizzazione. La (12.65) deve tuttavia soddisfare ulteriori condizioni. Sappiamo già infatti che ϕ_{ij2} è un tensore a traccia nulla, ossia, adottando in questo caso m come indice di sommatoria tensoriale

$$\phi_{mm2} = 0 \quad (12.66)$$

mentre il modello (12.49) dà

$$\phi_{mm2} = 2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} a_{lkmm} \quad (12.67)$$

che in generale non è nullo; dobbiamo perciò richiedere che sia

$$a_{lkmm} = 0 \quad (12.68)$$

Inoltre, attraverso l'integrazione diretta dell'equazione di Poisson per la contrazione formata ponendo $j = k$, si potrebbe dimostrare che deve essere

$$a_{lkik} = 2 \overline{u'_l u'_i} \quad (12.69)$$

Ognuno di questi due ultimi vincoli determina due condizioni che le cinque costanti del modello devono soddisfare. In particolare, la (12.68) richiede che, essendo la (12.65) scritta per $i = j = m$ (con m indice di sommatoria), sia

$$\begin{aligned} a_{lkmm} &= \\ &= \alpha \overline{u'_l u'_m} \delta_{km} + \beta (\overline{u'_l u'_k} \delta_{mm} + \overline{u'_l u'_m} \delta_{mk} + \overline{u'_m u'_m} \delta_{lk} + \overline{u'_m u'_k} \delta_{lm}) + \gamma \overline{u'_k u'_m} \delta_{lm} + \\ &\quad + [\eta \delta_{ml} \delta_{km} + v (\delta_{lm} \delta_{mk} + \delta_{lk} \delta_{mm})] \bar{k} = \\ &= \alpha \overline{u'_l u'_k} + \beta (3 \overline{u'_l u'_k} + \overline{u'_l u'_k} + 2 \bar{k} \delta_{lk} + \overline{u'_l u'_k}) + \gamma \overline{u'_k u'_l} + [\eta \delta_{kl} + 4 v \delta_{kl}] \bar{k} = \\ &= (\alpha + 5 \beta + \gamma) \overline{u'_l u'_k} + [2 \beta + \eta + 4 v] \delta_{kl} \bar{k} \end{aligned} \quad (12.70)$$

Nel secondo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che, p. es. nei termini in δ_{km} , l'unico termine della sommatoria rispetto ad m non nullo è quello per $k = m$; inoltre, $\delta_{mm} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$. Abbiamo poi fatto uso della definizione di $\bar{k} = \overline{u'_m u'_m}/2$. Ne segue che tra i coefficienti devono valere, per soddisfare la (12.68), le due seguenti relazioni:

$$\alpha + 5 \beta + \gamma = 0 \quad (12.71)$$

$$2 \beta + \eta + 4 v = 0 \quad (12.72)$$

Poi, la (12.69) richiede, essendo la (12.65) scritta per $j = k$ (con k indice di sommatoria)

$$\begin{aligned} a_{lkik} &= \\ &= 3 \alpha \overline{u'_l u'_i} + \beta (\overline{u'_l u'_k} \delta_{ik} + \overline{u'_l u'_k} \delta_{ik} + \overline{u'_l u'_k} \delta_{lk} + \overline{u'_l u'_k} \delta_{lk}) + \gamma \overline{u'_k u'_k} \delta_{li} + [3 \eta \delta_{il} + v (\delta_{lk} \delta_{ik} + \delta_{lk} \delta_{ik})] \bar{k} = \\ &= 3 \alpha \overline{u'_l u'_i} + \beta (\overline{u'_l u'_i} + \overline{u'_l u'_i} + \overline{u'_l u'_i} + \overline{u'_l u'_i}) + 2 \gamma \bar{k} \delta_{li} + [3 \eta \delta_{il} + 2 v \delta_{il}] \bar{k} = \end{aligned}$$

$$= (3\alpha + 4\beta)\overline{u'_i u'_i} + [2\gamma + 3\eta + 2v]\delta_{il}\overline{k} \quad (12.73)$$

che tra i coefficienti valgano le due seguenti relazioni:

$$3\alpha + 4\beta = 2 \quad (12.74)$$

$$2\gamma + 3\eta + 2v = 0 \quad (12.75)$$

Grazie alle quattro relazioni (12.71,12.72,12.74,12.75), dei cinque coefficienti originari ne rimane quindi uno solo indipendente da determinare, mentre i rimanenti possono essere espressi in funzione di esso. Scegliamo come coefficiente indipendente γ ; per gli altri coefficienti risulta allora

$$\alpha = \frac{4\gamma + 10}{11} \quad (12.76)$$

$$\beta = -\frac{3\gamma + 2}{11} \quad (12.77)$$

$$\eta = -\frac{50\gamma + 4}{55} \quad (12.78)$$

$$v = \frac{20\gamma + 6}{55} \quad (12.79)$$

Sostituendo nella (12.65), definendo il tensore

$$D_{ij} = -\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_i} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_j} \quad (12.80)$$

simile al tensore produzione (11.12), qui riportato

$$P_{ij} = -\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} \quad (12.81)$$

si ottiene infine la forma del modello per ϕ_{ij2}

$$\phi_{ij2} = -\left(\frac{8 + \gamma}{11}\right) \left(P_{ij} - \frac{2}{3}P\delta_{ij}\right) - \left(\frac{30\gamma - 2}{55}\right)\overline{k} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{8\gamma - 2}{11}\right)\overline{k} \left(D_{ij} - \frac{2}{3}P\delta_{ij}\right) \quad (12.82)$$

avendo posto

$$P = \frac{P_{kk}}{2} = \frac{D_{kk}}{2} \quad (12.83)$$

È interessante notare che ciascuno dei tre termini che costituiscono la (12.82), preso individualmente, soddisfa la condizione di annullamento per contrazione degli indici (cioè ponendo $i = j = k$, con k indice di sommatoria). Quindi ciascuno di essi soddisfa individualmente la proprietà essenziale di redistribuzione direzionale, tipica del termine da modellare. Il primo di questi termini risulta essere quello dominante; sulla base di questa constatazione, gli stessi Launder, Reece e Rodi [43] hanno tentato una forma semplificata del modello, che pertanto assume la forma

$$\phi_{ij2} = -\left(\frac{8 + \gamma}{11}\right) \left(P_{ij} - \frac{2}{3}P\delta_{ij}\right) \quad (12.84)$$

Indicando globalmente come c_2 il termine $(8 + \gamma)/11$, risulta l'espressione

$$\phi_{ij2} = -c_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \quad (12.85)$$

Resta ancora da determinare il valore della costante di modellizzazione γ . Occorre dire in proposito che vari modelli adottano una forma del tipo (12.82), differenziandosi per la scelta del valore di γ . Il modello di Launder–Reece–Rodi [43] determina il valore di γ sulla base del criterio di ottimizzare il livello dei differenti sforzi di Reynolds nel flusso in un canale, ottenendo

$$\gamma = 0.4 \quad (12.86)$$

Per il modello (12.85) il valore di γ adottato risulta essere un poco differente da quello (12.86) determinato per il modello completo, essendo il valore ottimo della costante determinato come

$$c_2 = 0.6 \quad (12.87)$$

Launder [44] osserva che la scelta del valore di γ (o equivalentemente c_2) nei diversi modelli che adottano la (12.82) è fortemente correlata alla scelta del valore di c_1 nel modello di Rotta per la componente turbolenta ϕ_{ij1} , vedi sez. 12.3.1. I valori proposti nei vari modelli appaiono essere localizzati in prossimità della retta

$$c_1 = 4.35 (1 - c_2) \quad (12.88)$$

Si può notare che la (12.85) modella ϕ_{ij2} come proporzionale alla componente anisotropa del tensore di produzione degli sforzi di Reynolds; poiché inoltre la costante di proporzionalità è negativa, il termine agisce nell'equazione (11.17) per gli sforzi di Reynolds in senso tale da compensare (parzialmente, perché il valore assoluto della costante di proporzionalità è minore di uno) l'effetto di un'anisotropia del tensore produzione. Per questo motivo il modello in questa forma ridotta è chiamato *isotropization of production* (IP, in breve).

L'esperienza sviluppata su quest'ultimo modello indica che esso fornisce prestazioni nel complesso addirittura superiori a quelle del modello completo (12.82), per cui è senz'altro da preferire, anche in vista della sua semplicità.

12.4.2 Equazione dei flussi di Reynolds

Il modello per ϕ_{iT2} dovrà essere un vettore di indice i , ossia

$$\phi_{iT2} = (\dots)_i \quad (12.89)$$

per rispettare il principio di indipendenza dal sistema di coordinate. Anche in questo caso il modello dovrà prevedere una dipendenza dal tensore gradiente della velocità media $\partial \bar{u}_k / \partial x_l$, come si può anche vedere da un'integrazione formale, analoga alla (12.50), del laplaciano della componente di deformazione media della pressione fluttuante, e moltiplicando la risultante espressione di $p^{(2)}$ per il vettore gradiente di temperatura fluttuante, e successivamente mediando, al fine di recuperare l'espressione a secondo membro della (12.47). Il risultato di questa derivazione è

$$\phi_{iT2}(\underline{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int \int \int_V \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right)^* \overline{\left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \right)^* \left(\frac{\partial T'}{\partial x_i} \right)} \frac{dV}{\sqrt{x_k^* x_k^* - x_k x_k}} \quad (12.90)$$

Anche in questo caso in realtà il risultato dell'integrazione contempla un ulteriore termine, un integrale di superficie sul contorno, il quale però è ancora verosimilmente trascurabile ad una certa distanza dalle pareti (ossia, al di fuori dello strato limite).

Ricerchiamo anche per questo termine una forma del tipo IP, cioè simile alla (12.85). L'espressione cercata dovrà quindi esibire una proporzionalità al termine di produzione del flusso di Reynolds considerato. Tale termine di produzione (11.18), che qui riportiamo

$$P_{iT} = P_{iT1} + P_{iT2} = -\overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_k} \quad (12.91)$$

consta tuttavia di due componenti, la prima che comprende gradienti di velocità media, e la seconda che esibisce gradienti di temperatura media. Per l'espressione (12.90), appare giustificata l'inclusione solo della prima di queste componenti. Il modello può quindi essere posto nella forma

$$\phi_{iT2} \propto -P_{iT1} \quad (12.92)$$

Introducendo una costante di modellizzazione c_{2T} si ha quindi la forma

$$\phi_{iT2} = -c_{2T} P_{iT1} = c_{2T} \overline{u'_k T'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \quad (12.93)$$

ed il valore ottimale della costante è determinato come

$$c_{2T} = 0.4 \quad (12.94)$$

Incidentalmente, talvolta è adottato invece il valore $c_{2T} = 0.5$; la differenza nei risultati è comunque presumibilmente lieve. Si può osservare che anche in questo caso la forma (12.93) adottata è lineare nei momenti secondi (i flussi di Reynolds).

12.5 Componente di galleggiamento dei termini pressione–gradiente

Abbiamo visto nella sez. 11.4 che il laplaciano della componente fluttuante della pressione (11.44) esibisce un contributo dovuto alle forze di galleggiamento:

$$\frac{\partial^2 p'^{(3)}}{\partial x_k \partial x_k} = -\rho \beta_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (12.95)$$

e che questo interagisce nell'equazione degli sforzi di Reynolds con il tensore della deformazione fluttuante, dando il termine (11.49)

$$\phi_{ij3} = \frac{p'^{(3)}}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \quad (12.96)$$

e nell'equazione dei flussi di Reynolds con il gradiente di temperatura fluttuante, risultando nel termine (11.53)

$$\phi_{iT3} = \frac{p'^{(3)}}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i} \quad (12.97)$$

Analizziamo nei successivi due paragrafi la modellizzazione dei termini ϕ_{ij3} e ϕ_{iT3} .

12.5.1 Equazione degli sforzi di Reynolds

Il termine ϕ_{ij3} può essere formalmente espresso operando un'integrazione della componente di galleggiamento del laplaciano della pressione fluttuante, moltiplicando per il tensore di deformazione fluttuante e quindi mediando, in maniera molto simile a quanto visto per il termine ϕ_{ij2} nella sez. 12.4.1; il risultato è

$$\phi_{ij3}(\underline{x}) = -\frac{\beta_l}{4\pi} \int \int \int_V \overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial x_l}\right)^* \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} \frac{dV}{\sqrt{x_k^* x_k^* - x_k x_k}} \quad (12.98)$$

Questa espressione presenta una qualche somiglianza con la (12.50)², il che suggerisce di adottare una modellizzazione simile a quella adottata per ϕ_{ij2} . Launder [45] suggerisce la forma, analoga alla (12.85)

$$\phi_{ij3} = -c_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G \delta_{ij} \right) \quad (12.99)$$

dove G_{ij} è il tensore galleggiamento definito dalla (11.13), che qui riportiamo

$$G_{ij} = -\beta_i \overline{u'_j T'} - \beta_j \overline{u'_i T'} \quad (12.100)$$

e lo scalare G è definito come

$$G = \frac{G_{kk}}{2} \quad (12.101)$$

mentre c_3 è una costante di modellizzazione. Considerazioni di ordine teorico indicano per questa costante il valore

$$c_3 = 0.3 \quad (12.102)$$

ma sono spesso adottati anche valori lievemente superiori, nel campo

$$c_3 = 0.3 \div 0.6 \quad (12.103)$$

Questi valori più alti sono generalmente adottati quando si tenta di estendere la validità del modello (12.99) per tener conto di altri tipi di campi di forza, non considerati nel presente contesto (per esempio, forze apparenti che si manifestano quando si adotta un sistema di riferimento non inerziale).

12.5.2 Equazione dei flussi di Reynolds

In analogia con il modello descritto nella sez. 12.5.1, per il termine corrispondente nell'equazione dei flussi di Reynolds si adotta il modello

$$\phi_{iT3} = -c_{3T} G_{iT} \quad (12.104)$$

dove G_{iT} è il vettore galleggiamento definito dalla (11.19), che qui riportiamo

$$G_{iT} = -\beta_i \overline{T'^2} \quad (12.105)$$

² Notiamo che invece l'analoga espressione formale per ϕ_{ij1} presenta una struttura significativamente differente, risultando $\phi_{ij1}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int_V \overline{\left(\frac{\partial^2 u'_i u'_m}{\partial x_l \partial x_m}\right)^* \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} \frac{dV}{\sqrt{x_k^* x_k^* - x_k x_k}}$

Il valore della costante di modellizzazione, per i flussi considerati, è determinato come

$$c_{3T} = 3 \quad (12.106)$$

12.6 Forma risultante delle equazioni per i momenti secondi

Sostituendo i modelli sopra indicati per i termini di pressione–deformazione [ossia (12.30,12.40) per la componente turbolenta, (12.85, 12.93) per la componente di deformazione media, (12.99, 12.104) per la componente di galleggiamento], per i termini di dissipazione (12.22, 12.20, 12.27), nonché per i termini di trasporto (12.7, 12.10, 12.14), si hanno le seguenti forme modellate delle equazioni per i momenti secondi:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} &= P_{ij} + G_{ij} - c_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} \right) - c_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - c_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\epsilon} \delta_{ij} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_s \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right] \end{aligned} \quad (12.107)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} &= P_{iT} + G_{iT} - c_{1T} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \overline{u'_i T'} + c_{2T} \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - c_{3T} G_{iT} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_f \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \kappa \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_l} \right] \end{aligned} \quad (12.108)$$

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k} = -2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - c_\chi \frac{\bar{\epsilon} \overline{T'^2}}{\bar{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_v \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \frac{\nu}{\sigma} \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_l} \right] \quad (12.109)$$

Esplicitando poi i termini di produzione e galleggiamento secondo le (12.81, 12.83, 12.100, 12.101, 12.91, 12.105), si ottiene per le equazioni degli sforzi e dei flussi di Reynolds la forma modellata

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} &= -c_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \overline{u'_i u'_j} + (1 - c_2) \left(-\overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) + (1 - c_3) \left(-\beta_i \overline{u'_j T'} - \beta_j \overline{u'_i T'} \right) + \\ &+ \frac{2}{3} \delta_{ij} \left[c_1 \bar{\epsilon} + c_2 \overline{u'_l u'_k} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - c_3 \beta_k \overline{u'_k T'} \right] + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_s \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right] \end{aligned} \quad (12.110)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k} &= -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - (1 - c_{2T}) \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - (1 - c_{3T}) \beta_i \overline{T'^2} - c_{1T} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \overline{u'_i T'} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_f \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \kappa \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_l} \right] \end{aligned} \quad (12.111)$$

A queste vanno poi aggiunte le equazioni per la varianza della temperatura (12.109), e l'equazione per il tasso di dissipazione meccanica (12.23), che qui riportiamo

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = -c_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - \beta_k \overline{u'_k T'} \right) - c_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon}^2}{\bar{k}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_\epsilon \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_l} \right] \quad (12.112)$$

Ricordiamo che per l'energia cinetica turbolenta vale la definizione

$$\bar{k} = \frac{\overline{u'_k u'_k}}{2} \quad (12.113)$$

e che per il tasso di dissipazione scalare abbiamo adottato il modello (9.36):

$$\bar{\chi} = c_\chi \frac{\overline{\bar{\epsilon} T'^2}}{\bar{k}} \quad (12.114)$$

12.7 Altri modelli

Altri modelli lineari con chiusura sui momenti secondi sono stati sviluppati, i quali tuttavia si discostano dal modello citato principalmente per la modellizzazione della componente di deformazione media dei termini pressione–deformazione o pressione–gradiente di temperatura. Tra essi vale la pena di citare il ‘basic model’ di Launder [46], che differisce dal modello qui esposto per la modellizzazione di ϕ_{ij2} (nel quale viene inclusa una componente proporzionale al termine convettivo), e che è stato ampiamente utilizzato; ed il modello di Jones e Musonge [47] che include in ϕ_{iT2} un termine proporzionale al gradiente di temperatura, per rendere conto di alcuni fenomeni che si verificano in presenza di *swirl*.

12.8 Modelli ASM/AFM (Algebraic Stress/Flux Models)

Le equazioni per i momenti secondi, riportate nella sez. 12.6, costituiscono un insieme di 10 equazioni differenziali, che vanno ad aggiungersi alle 5 equazioni per i momenti primi; occorre inoltre considerare l'equazione per la dissipazione meccanica $\bar{\epsilon}$. La complessità di questo sistema differenziale ha spinto alcuni ricercatori, per motivi analoghi a quelli citati all'inizio del cap. 7.2.2, a cercare una forma semplificata di questi modelli, basata sulla risoluzione di un sistema *algebrico* anziché *differenziale*. Notiamo a questo proposito che la natura differenziale delle equazioni per i momenti secondi riportate nella sez. 12.6 deriva dalla presenza dei termini convettivi e diffusivi. Se, per ipotesi, la somma (algebrica) di questi due termini risultasse nulla, le equazioni per i momenti secondi si ridurrebbero ad equazioni algebriche. Quindi per le equazioni per gli sforzi di Reynolds dovrebbe verificarsi la condizione

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_s \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right] \simeq 0 \quad (12.115)$$

Una simile condizione può effettivamente verificarsi nello strato limite per il flusso su una lastra infinita; incidentalmente, questa condizione è già stata incontrata nella sez. 4.1 relativamente all'equazione dell'energia cinetica turbolenta, vedi eq. (4.15). In queste condizioni, le equazioni per i sei sforzi di Reynolds si riducono ad un sistema algebrico. La condizione (12.115) è tuttavia

fortemente restrittiva; può essere allora più accettabile conservare un'equazione per l'energia cinetica turbolenta \bar{k} , ed introdurre l'ipotesi che la somma (algebraica) dei termini convettivi e diffusivi dell'equazione per lo sforzo di Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ sia proporzionale all'analogha somma per \bar{k} , moltiplicata per il rapporto $\overline{u'_i u'_j} / \bar{k}$:

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_s \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right] \simeq \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\bar{k}} \left\{ \bar{u}_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} \right] \right\} \quad (12.116)$$

con il termine a secondo membro valutato attraverso l'equazione di \bar{k} , come nel modello $k-\epsilon$, ossia

$$\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_s \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right] \simeq \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\bar{k}} (P - \bar{\epsilon}) \quad (12.117)$$

Questa ipotesi consente di ampliare la gamma di flussi ai quali il modello semplificato può essere applicato.

Un'ipotesi analoga alla (12.116) può essere avanzata per i flussi di Reynolds. Un'approssimazione algebrica dell'equazione per la varianza della temperatura è già stata discussa nella sez. 9.2.2, vedi eq. (9.39). In questo modo si ottiene un modello algebrico per gli sforzi (*Algebraic Stress Model*, ASM) e/o i flussi di Reynolds (*Algebraic Flux Model*, AFM), alquanto più semplice ed economico dei modelli completi analizzati sopra.

Nonostante l'apparente attrattiva di questi modelli, va detto che le risultanti equazioni algebriche sono alquanto complesse (qualcosa di simile era stato trovato nel cap. 8.2 per i modelli GGDH), per cui spesso la risoluzione di queste equazioni algebriche si rivela ancora più problematica che non quella delle equazioni differenziali originarie. Inoltre, è noto che questi modelli danno prestazioni mediocri in flussi con *swirl*, e secondo alcuni non assicurano l'unicità della soluzione in flussi con ricircolazione. Per questi motivi, questi modelli sono attualmente in larga misura abbandonati (anche per il parallelo sviluppo di modelli con chiusura sui momenti primi nonlineari, del tipo esaminato nel cap. 7.2.2, che presumibilmente forniscono prestazioni simili), anche se di tanto in tanto qualche autore li ripropone in forma a suo dire in grado di superarne i limiti citati [48].

Capitolo 13

Chiusura sui momenti secondi: modelli nonlineari (realizzabili)

13.1 Realizzabilità

I modelli con chiusura sui momenti secondi di tipo lineare, esaminati nel cap. 11.5.1, pur essendo in grado di rendere conto di tutta una gamma di fenomeni che non possono essere descritti dai modelli con chiusura sui momenti primi, presentano ancora alcuni inconvenienti, che si manifestano in alcune situazioni particolari.

Innanzitutto, mentre tali modelli in flussi complessi danno prestazioni decisamente superiori a quelle ottenibili con i modelli con chiusura sui momenti primi, in alcuni flussi semplici (ad esempio flusso in un canale, o in un condotto circolare) essi risultano in prestazioni non significativamente migliori. Questo fatto tra l'altro ha inizialmente generato un certo scetticismo nei riguardi dei modelli con chiusura sui momenti secondi.

Inoltre, in alcune situazioni i modelli di turbolenza, tanto con chiusura sui momenti primi che sui momenti secondi, possono produrre valori non fisicamente accettabili delle grandezze calcolate. Questo inconveniente può verificarsi per grandezze che sono intrinsecamente definite come non negative, per esempio gli sforzi normali di Reynolds, per i quali deve quindi risultare

$$\overline{u_i'^2} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.1)$$

o la varianza della temperatura

$$\overline{T'^2} \geq 0 \quad (13.2)$$

od ancora i tassi di dissipazione meccanica (1.72)

$$\bar{\epsilon} \geq 0 \quad (13.3)$$

e scalare (9.25)

$$\bar{\chi} \geq 0 \quad (13.4)$$

Sarà parimenti necessario che gli sforzi ed i flussi di Reynolds soddisfino le disequaglianze di Schwarz:

$$|\overline{u_i' u_j'}| \leq \sqrt{\overline{u_i'^2}} \sqrt{\overline{u_j'^2}} \quad (13.5)$$

$$|\overline{u'_i T'}| \leq \sqrt{\overline{u'^2_i}} \sqrt{\overline{T'^2}} \quad (13.6)$$

Incidentalmente, osserviamo che nella (13.5) vale evidentemente il segno di eguaglianza quando $i = j$. Le condizioni (13.1–13.6) assicurano la *realizzabilità* della soluzione, concetto al quale era stato già dedicato un accenno nella sez. 11.5. In particolare, la condizione (13.6) definisce la cosiddetta *realizzabilità congiunta*. Come detto, i modelli esaminati fin qui in alcune condizioni possono portare a soluzioni numeriche non realizzabili. Queste condizioni possono verificarsi con maggiore facilità nei cosiddetti *stati estremi della turbolenza*, cioè in situazioni limite. La principale di questa situazione limite è il caso di turbolenza bidimensionale, che come abbiamo già discusso nella sez. 7.1.2, si verifica nelle immediate vicinanze di una parete.

Esaminiamo quindi cosa accade in prossimità della parete; sia x_2 la direzione normale alla parete. La componente per $i = j = 2$ del termine pressione–deformazione (11.14) si riduce a

$$\phi_{22} = 2 \frac{\overline{p'}}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_2}}{\partial x_2} = 0 \quad (13.7)$$

essendo $\partial \overline{u'_2} / \partial x_2 = 0$ per l'equazione di continuità, vedi (7.24). Ne consegue che è quantomeno auspicabile che i sottomodelli per le tre componenti (11.46) del termine pressione–deformazione si annullino per turbolenza bidimensionale. I modelli che abbiamo visto sinora non sono tuttavia in grado di soddisfare questa condizione. Il modello di Rotta per la componente turbolenta ('lenta') (12.30) assume ϕ_{ij1} proporzionale al tensore anisotropia (12.29), quindi in particolare per il termine in questione

$$\phi_{221} = -c_1 \bar{\epsilon} a_{22} \quad (13.8)$$

Il fattore a_{22} è tanto più grande (in modulo) quanto maggiore è l'anisotropia della turbolenza. Il valore massimo viene raggiunto per turbolenza bidimensionale, cioè alla parete, ove si ha, essendo le velocità nulle

$$a_{22} = \frac{\overline{u'_2 u'_2}}{k} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \quad (13.9)$$

Sostituendo nella (13.8), si trova

$$\phi_{221} = \frac{2}{3} c_1 \bar{\epsilon} \quad (13.10)$$

che è appunto il valore *massimo* di questo termine, anziché il valore *nullo* richiesto dalla (13.7).

Dobbiamo quindi aspettarci che i modelli lineari esaminati nel cap. 11.5.1 non siano affidabili in prossimità di una parete; vedremo infatti che per poter descrivere lo strato limite è necessario aggiungere un'ulteriore componente ai termini pressione–deformazione, che rappresenta una correzione per gli effetti di parete.

Tuttavia, questa ulteriore correzione in prossimità della parete, che esamineremo in dettaglio nel cap. 14, non risolve completamente il problema. Infatti, la condizione di turbolenza bidimensionale può verificarsi, oltre che in prossimità di una parete, anche in altre condizioni: per esempio in un sistema di riferimento (non inerziale) soggetto a rotazione, la forza centrifuga tende ad avvicinare la turbolenza ad uno stato bidimensionale. Appare perciò preferibile, per correggere il comportamento non corretto dei modelli lineari in condizioni di turbolenza bidimensionale, introdurre una correzione che sia funzione di un qualche parametro che identifichi il grado di 'bidimensionalità' della turbolenza, anziché p. es. della distanza dalla parete. Abbiamo già introdotto l'anisotropia, la quale però essendo

una grandezza tensoriale è di difficile uso; cerchiamo invece un indicatore scalare, per esempio un indicatore che assuma il valore unitario per turbolenza isotropa ed il valore zero per turbolenza bidimensionale. Allora, moltiplicando la (13.8) per tale indicatore, o più in generale per una sua opportuna potenza (per assicurare un adeguato andamento), si ottiene che il modello riproduce un comportamento sostanzialmente corretto.

Per individuare il parametro cercato torniamo al tensore anisotropia (12.29)

$$a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\overline{k}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (13.11)$$

I valori dei singoli elementi a_{ij} saranno ovviamente dipendenti dall'orientamento del sistema di riferimento cartesiano scelto; esistono però alcune combinazioni di tali elementi che risultano indipendenti dall'orientamento, e che sono perciò chiamate *invarianti* del tensore anisotropia [35]. Esse sono

$$A_1 = a_{kk} \quad (13.12)$$

$$A_2 = a_{kl} a_{lk} \quad (13.13)$$

$$A_3 = a_{kl} a_{lm} a_{mk} \quad (13.14)$$

con k, l ed m indici di sommatoria. Per quanto riguarda il primo invariante, osserviamo tuttavia che per la definizione (13.11) è

$$A_1 = a_{kk} = \frac{\overline{u'_1 u'_1}}{\overline{k}} - \frac{2}{3} + \frac{\overline{u'_2 u'_2}}{\overline{k}} - \frac{2}{3} + \frac{\overline{u'_3 u'_3}}{\overline{k}} - \frac{2}{3} = 0 \quad (13.15)$$

in virtù della definizione di energia cinetica turbolenta. Restano il secondo ed il terzo invariante; Lumley [36] ha dimostrato che la combinazione

$$A = 1 - \frac{9}{8} (A_2 - A_3) \quad (13.16)$$

varia tra il valore zero per turbolenza bidimensionale, ed il valore unitario per turbolenza isotropa, per cui può essere efficacemente usato come un indicatore *scalare* del grado di anisotropia della turbolenza. La grandezza A è spesso chiamata '*flatness factor*' (fattore di piattezza), per quanto a rigore questo nome sia riservato ad un altro concetto statistico (il rapporto $\overline{\varphi'^4}/\overline{\varphi'^2}^2$ per le fluttuazioni di una grandezza φ).

Nella sez. 13.2 vedremo come questi concetti sono applicati per elaborare un modello di turbolenza con chiusura sui momenti secondi più potente di quello analizzato nel cap. 11.5.1.

13.1.1 Osservazioni sulla notazione

Nella notazione adottata da Lumley [36] il tensore anisotropia è definito come

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{2} \quad (13.17)$$

ed inoltre gli invarianti che qui abbiamo designato come A_2 ed A_3 sono invece indicati come *II* e *III*.

13.2 Il ‘new model’ di Launder

Launder [46] ha elaborato sulla base dei concetti introdotti nella sez. 13.1 un modello nonlineare, semplicemente chiamato ‘new model’, inteso ad assicurare la realizzabilità della soluzione numerica. Tale modello è stato successivamente esteso a flussi con galleggiamento [49]. Mentre esso adotta la stessa modellizzazione dei modelli lineari per i termini di trasporto turbolento ed, in parte, di dissipazione, se ne differenzia invece per quanto riguarda la modellizzazione dei termini di pressione–gradiente, cioè pressione–deformazione (per le equazioni degli sforzi di Reynolds) e pressione–gradiente scalare (per le equazioni dei flussi di Reynolds). Nelle successive sottosezioni analizziamo la forma dei modelli per le diverse componenti (turbolenta, di deformazione media, di galleggiamento), nonché il trattamento dei termini dissipativi.

13.2.1 Componente turbolenta del termine pressione–deformazione

Per correggere l’inconveniente citato nella sez. 13.1, Launder adotta un coefficiente c_1 funzione di A , anziché costante come nel modello originario di Rotta (12.30), ed inoltre una forma quadratica (anziché lineare) per ϕ_{ij1} :

$$\phi_{ij1} = -c_1 \bar{\epsilon} \left[a_{ij} + c'_1 \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{A_2}{3} \delta_{ij} \right) \right] \quad (13.18)$$

dove c_1 è un’opportuna funzione definita come

$$c_1 = 3.1 (A_2 A)^{1/2} \quad (13.19)$$

che quindi si annulla nel limite di turbolenza bidimensionale (perché si annulla A). Per l’altra costante è invece

$$c'_1 = 1.2 \quad (13.20)$$

13.2.2 Componente turbolenta del termine pressione–gradiente scalare

La parte turbolenta del termine pressione–gradiente di temperatura è descritta nel nuovo modello tramite il termine

$$\begin{aligned} \phi_{iT1} = & -1.7 \left(1 + 1.2 \sqrt{A_2 A} \right) \sqrt{R} \frac{\bar{\epsilon}}{k} \left[(1 + 0.6 A_2) \overline{u'_i T'} - 0.8 a_{ik} \overline{u'_k T'} + 1.1 a_{ik} a_{kj} \overline{u'_j T'} \right] - \\ & - 0.2 \sqrt{A} R \bar{k} a_{ik} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (13.21)$$

dove R è definito come

$$R = \frac{3}{2} (1 + A_{2T}) \quad (13.22)$$

essendo A_{2T} (notare il parallelismo con la definizione (13.13) di A_2 , facendo però comparire i flussi di Reynolds, anziché gli sforzi)

$$A_{2T} = \frac{\overline{u'_i T'} \overline{u'_i T'}}{\bar{k} \bar{T}^2} \quad (13.23)$$

Si osservi che nella (13.21) compare un ultimo termine proporzionale al gradiente di temperatura media; la giustificazione per questo è ancora quella data alla fine della sez. 12.7.

13.2.3 Componente di deformazione media del termine pressione—deformazione

Il modello per tale componente è cubico, e risulta particolarmente complesso (k, l ed m rappresentano indici di sommatoria):

$$\begin{aligned}
\phi_{ij2} = & -0.6 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) + 0.6 a_{ij} P - 0.2 \left[\frac{\overline{u'_k u'_j u'_l u'_i}}{\bar{k}} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\overline{u'_l u'_k u'_i u'_k}}{\bar{k}} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} - \frac{\overline{u'_l u'_k u'_j u'_k}}{\bar{k}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \right] - c_2 [A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{mi} a_{nj} (P_{mn} - D_{mn})] + \\
& + c'_2 \left\{ \left(\frac{7}{15} - \frac{A_2}{4} \right) (P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}) + 0.1 \left[2 a_{ij} - \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right] P - 0.05 a_{ij} a_{lk} P_{kl} + \right. \\
& + 0.1 \left[\left(\frac{\overline{u'_i u'_m}}{\bar{k}} P_{mj} + \frac{\overline{u'_j u'_m}}{\bar{k}} P_{mi} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\overline{u'_l u'_m}}{\bar{k}} P_{ml} \right] + \\
& + 0.1 \left[\frac{\overline{u'_l u'_i u'_k u'_j}}{\bar{k}^2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\overline{u'_l u'_m u'_k u'_m}}{\bar{k}^2} \right] \left[6 D_{lk} + 13 \bar{k} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) \right] + \\
& \left. + 0.2 \frac{\overline{u'_l u'_i u'_k u'_j}}{\bar{k}^2} (D_{lk} - P_{lk}) \right\}
\end{aligned} \tag{13.24}$$

dove al solito $P = P_{kk}/2$, ed il tensore D_{ij} è definito dalla (12.80); c_2 è una costante del modello, identificata come

$$c_2 = 0.6 \tag{13.25}$$

L'ultimo termine, che moltiplica la costante c'_2 , ha un'importanza molto limitata in flussi semplici quali *free shear flows* (per esempio, getti piani od assialsimmetrici); Launder consiglia comunque di conservarlo per applicazioni a flussi più complessi, e per l'estensione a flussi a basso numero di Reynolds che sarà considerata nel capitolo seguente. Il valore consigliato per la costante relativa è

$$c'_2 = 0.6 \tag{13.26}$$

13.2.4 Componente di deformazione media del termine pressione—gradiente scalare

Parimenti complessa è l'espressione del corrispondente termine nel gradiente scalare [49]:

$$\begin{aligned}
\phi_{iT2} = & 0.8 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - 0.2 \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \frac{P}{\bar{k}} \overline{u'_i T'} - \\
& - 0.4 a_{il} \overline{u'_k T'} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) + 0.1 a_{ik} a_{ml} \overline{u'_k T'} \left(\frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_m} \right) - \\
& - 0.1 \frac{\overline{u'_k T'}}{\bar{k}} (a_{im} P_{mk} + 2 a_{mk} P_{im}) + 0.15 a_{ml} (a_{mk} \overline{u'_i T'} - a_{mi} \overline{u'_k T'}) \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} \right) - \\
& - 0.05 a_{ml} \left[7 a_{mk} \left(\overline{u'_i T'} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \right) - \overline{u'_k T'} \left(a_{ml} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + a_{mk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \right) \right]
\end{aligned} \tag{13.27}$$

Si noti che non compaiono costanti di modellizzazione, in quanto tutti i coefficienti sono univocamente determinati.

13.2.5 Componente di galleggiamento del termine pressione–deformazione

Anche in questo termine non compaiono costanti di modellizzazione da determinare [49]:

$$\begin{aligned}
\phi_{ij3} = & - \left(\frac{4}{10} - \frac{3A_2}{80} \right) \left(G_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} G \right) + \frac{1}{2} a_{ij} G + \\
& + \frac{3}{20} \left(\beta_i \frac{\overline{u'_m u'_j}}{\bar{k}} + \beta_j \frac{\overline{u'_m u'_i}}{\bar{k}} \right) \overline{u'_m T'} - \frac{1}{10} \delta_{ij} \beta_k \frac{\overline{u'_m u'_k}}{\bar{k}} \overline{u'_m T'} - \\
& - \frac{1}{4} \beta_k \left(\frac{\overline{u'_k u'_i u'_j T'}}{\bar{k}} + \frac{\overline{u'_k u'_j u'_i T'}}{\bar{k}} \right) + \frac{1}{20} \delta_{ij} \beta_k \frac{\overline{u'_m u'_l u'_m u'_k}}{\bar{k}^2} \overline{u'_l T'} - \\
& - \frac{1}{8} \beta_k \left(\frac{\overline{u'_l u'_j u'_i T'}}{\bar{k}} + \frac{\overline{u'_l u'_i u'_j T'}}{\bar{k}} \right) \frac{\overline{u'_l u'_k}}{\bar{k}} + \frac{1}{8} \beta_k \left(\frac{\overline{u'_k u'_i u'_l u'_j}}{\bar{k}^2} + \frac{\overline{u'_k u'_j u'_l u'_i}}{\bar{k}^2} \right) \overline{u'_l T'} - \\
& - \frac{3}{40} \left(\beta_i \frac{\overline{u'_l u'_j}}{\bar{k}} + \beta_j \frac{\overline{u'_l u'_i}}{\bar{k}} \right) \frac{\overline{u'_l u'_m}}{\bar{k}} \overline{u'_m T'} + \frac{1}{4} \beta_k \frac{\overline{u'_k u'_l u'_i u'_j}}{\bar{k}^2} \overline{u'_l T'}
\end{aligned} \tag{13.28}$$

13.2.6 Componente di galleggiamento del termine pressione–gradiente scalare

Il corrispondente termine scalare è dato da [49]:

$$\phi_{iT3} = \frac{1}{3} \beta_i \overline{T'^2} - \beta_k a_{ik} \overline{T'^2} \tag{13.29}$$

ed anche qui non compaiono costanti di modellizzazione.

13.2.7 Termini di dissipazione

Il tensore di dissipazione che compare nelle equazioni degli sforzi di Reynolds è ancora modellato come nella (12.22), e l'equazione per la dissipazione meccanica ha ancora la forma (12.23), ma diversi sono i valori attribuiti ai coefficienti $c_{\epsilon 1}$ e $c_{\epsilon 2}$. Per il primo si assume il valore

$$c_{\epsilon 1} = 1.0 \tag{13.30}$$

mentre il secondo è ora una funzione

$$c_{\epsilon 2} = \frac{1.92}{1 + 0.7 A_2^{1/2} A} \tag{13.31}$$

Per la dissipazione mista che compare nelle equazioni dei flussi di Reynolds vale sempre la (12.20)

Per quanto riguarda l'espressione del termine di dissipazione scalare che compare nell'equazione della varianza della temperatura, la (12.27) è sostituita dalla

$$\bar{\chi} = R \frac{\overline{\epsilon T'^2}}{\bar{k}} \tag{13.32}$$

dove R è definito dalla (13.22).

13.3 Altri modelli realizzabili

Altri modelli realizzabili sono stati proposti da Lumley, Shih e collaboratori [50, 51]. Essi in particolare osservano che il ‘new model’ di Launder non soddisfa la condizione di realizzabilità congiunta, definita dalla (13.6), mentre questa è assicurata nel loro modello.

Durbin e Speziale [52] operano una differente analisi del problema della realizzabilità, secondo la quale la condizione di realizzabilità è verificata non solo dal ‘new model’, ma anche dal modello di Launder–Reece–Rodi esaminato nel cap. 11.5.1. Altri modelli intesi a garantire soluzioni realizzabili risulterebbero invece insoddisfacenti secondo il criterio adottato da questi autori.

È necessario a questo punto riportare che il concetto di realizzabilità ha completamente diviso la comunità della modellizzazione della turbolenza. Alcuni autori sostengono che richiedere la realizzabilità è un vincolo inutile ed eccessivo imposto ai modelli di turbolenza, vista la trascurabile probabilità che i modelli risultino effettivamente in valori che violano le condizioni (13.1–13.6). Alcuni cambiamenti di campo che si sono verificati nel corso degli anni sono significativi. Launder stesso ad esempio fino alla metà degli anni ’80 sosteneva che richiedere che i modelli di turbolenza non possano generare valori irrealizzabili sarebbe come richiedere che tutti gli edifici di Parigi siano resistenti ai terremoti quanto quelli di San Francisco; tuttavia, come abbiamo visto, egli ha più tardi cambiato idea.

Non è possibile nell’ambito di queste note prendere posizione a favore dell’uno o dell’altro fronte. È però interessante osservare che, mentre i modelli realizzabili richiedono, a causa della loro maggiore complessità rispetto ai modelli lineari, un tempo di calcolo superiore *per passo di integrazione* (Launder cita circa il 25% in più), il tempo di calcolo *globale* può risultare ridotto di circa il 20%, appunto perché i modelli realizzabili, evitando l’insorgere di situazioni non fisiche, portano ad una più rapida convergenza alla soluzione stazionaria.

13.4 Modelli ellittici

Dall’analisi dei modelli esaminati nei capp. 11.5.1 e 12.8 si evince chiaramente come i termini di modellizzazione più problematica siano quelli di pressione–deformazione (e quelli paralleli di pressione–gradiente scalare in flussi con galleggiamento). Durbin [53, 54] ha perciò pensato di definire un modello più accurato introducendo un’equazione di conservazione per questo termine, la cui forma è assegnata su basi intuitive. Più precisamente, Durbin considera un’equazione per la grandezza \mathcal{P}_{ij} , legata al termine pressione–deformazione dalla relazione

$$\mathcal{P}_{ij} = \phi_{ij} - \left(\epsilon_{ij} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\bar{\epsilon}}{k} \right) \quad (13.33)$$

La forma dell’equazione è di tipo ellittico, cioè non comprende termini di convezione, in analogia con l’espressione per il laplaciano della pressione fluttuante (11.43), ed è assegnata come

$$L^2 \nabla^2 \left(\frac{\mathcal{P}_{ij}}{k} \right) = \frac{\mathcal{P}_{ij} - \phi_{ij1}^h - \phi_{ij2}^h}{k} \quad (13.34)$$

dove i termini ϕ_{ij1}^h e ϕ_{ij2}^h sono ripresi dal ‘new model’ di Launder (la h sta per *homogeneous*). In particolare, ϕ_{ij1}^h è molto simile alla espressione (13.18)

$$\phi_{ij1}^h = -c_1 \frac{\bar{k}}{\mathcal{T}} \left[a_{ij} + c'_1 \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{A_2}{3} \delta_{ij} \right) \right] \quad (13.35)$$

ma $\bar{\epsilon}$ è sostituito dal rapporto tra \bar{k} ed una scala dei tempi definita come

$$\mathcal{T} = \max \left[\frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}}, 6 \left(\frac{\nu}{\bar{\epsilon}} \right)^{1/2} \right] \quad (13.36)$$

ϕ_{ij2}^h è invece definito esattamente come nella (13.24). La L che compare nella (13.34) è una scala delle lunghezze definita come

$$L = c_L \cdot \max \left[\frac{\bar{k}^{3/2}}{\bar{\epsilon}}, c_\eta \left(\frac{\nu^3}{\bar{\epsilon}} \right)^{1/4} \right] \quad (13.37)$$

dove

$$c_L = 0.15 \quad (13.38)$$

$$c_\eta = 80 \quad (13.39)$$

È comunque il caso di osservare che l'equazione (13.34) è *totalmente* modellata, a differenza delle equazioni per i momenti primi e secondi fin qui analizzate, in cui alcuni termini sono esatti, ed altri modellati.

Capitolo 14

Chiusura sui momenti secondi: trattamento dello strato limite

14.1 Introduzione

In questo capitolo esaminiamo i modelli per trattare lo strato limite nell'ambito della chiusura sui momenti secondi. Nella sez. 14.2 illustriamo il trattamento 'sintetico' (in cui cioè per economia computazionale lo strato limite non è risolto, ma si trae vantaggio dalle *wall functions* per individuare il valore della velocità media – ed eventualmente della temperatura media – nel punto di calcolo più prossimo alla parete), analogo a quello esposto nei capp. 3.4.1 e 5.6 per i modelli con chiusura sui momenti primi. Nella sez. 14.3 analizziamo invece il trattamento a basso numero di Reynolds, analogo a quello riportato nel cap. 9.4.

14.2 Modelli sintetici

Nel trattamento sintetico dello strato limite, l'ubicazione del punto di calcolo più vicino alla parete è scelta in modo tale che esso si trovi ancora nello strato limite turbolento, quindi la sua distanza adimensionalizzata dalla parete deve essere nel campo $30 \leq y^+ \leq 100$, vedi sezz. 4.1, 4.2. Nella chiusura sui momenti secondi è immediato ricavare la velocità d'attrito u_τ : supposto che gli assi siano orientati in modo tale che x_1 sia la direzione del flusso che lambisce la parete, ed x_2 sia la direzione normale alla parete stessa, u_τ si ricava semplicemente come

$$u_\tau = \sqrt{|\overline{u'_1 u'_2}|} \quad (14.1)$$

per la definizione (4.12), ricordando che lo sforzo totale (molecolare più turbolento) è costante nello strato limite, quindi in particolare si identifica con lo sforzo molecolare nel sottostrato laminare, e con lo sforzo turbolento nella parte turbolenta dello strato limite.

Noto quindi u_τ , le tre componenti degli sforzi normali di Reynolds nel punto di calcolo in questione sono assegnate in modo tale da rispettare grossolanamente il livello di anisotropia che si riscontra nella parte turbolenta dello strato limite (anche se la ripartizione nelle tre componenti dipende in realtà dal particolare valore di y^+ corrispondente al punto più prossimo alla parete). Si può ad esempio specificare [55]:

$$\overline{u_1'^2} \simeq 5 u_\tau^2 \quad (14.2)$$

$$\overline{u_2'^2} \simeq u_\tau^2 \quad (14.3)$$

$$\overline{u_3'^2} \simeq 2 u_\tau^2 \quad (14.4)$$

La condizione per lo sforzo di taglio $\overline{u_1' u_2'}$ può posta in forma analoga alla (4.31), ricordando ancora che nello strato limite τ_{tot} è pressoché costante, e nella sua parte turbolenta è $\tau_{tot} \simeq -\overline{u_1' u_2'}$, per cui si può scrivere

$$\frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_2} = 0 \quad (14.5)$$

Sempre per effetto della scelta della direzione degli assi x_1 e x_2 , gli altri sforzi di taglio di Reynolds risultano nulli:

$$\overline{u_1' u_3'} = 0 \quad (14.6)$$

$$\overline{u_2' u_3'} = 0 \quad (14.7)$$

Per la velocità (componente parallela alla parete) e la temperatura media nel punto di calcolo più prossimo alla parete si utilizzano le (4.23,6.43), che grazie alla (4.24) si possono riscrivere

$$\frac{\bar{u}_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \log \left(E \frac{y u_\tau}{\nu} \right) \quad (14.8)$$

$$\frac{\rho c_p u_\tau}{q_w} (T_w - \bar{T}_0) = \frac{1}{\tilde{\kappa}} \log \left(\tilde{E} \frac{y u_\tau}{\nu} \right) \quad (14.9)$$

con u_τ in questo caso dato direttamente dalla (14.1).

14.3 Modelli a basso numero di Reynolds

Nelle due successive sezioni esaminiamo le modifiche che occorre apportare ai modelli esaminati nei capp. 11.5.1 e 12.8 per estenderne la validità a flussi a basso numero di Reynolds.

Ovviamente la condizione da imporre alla parete per gli sforzi ed i flussi di Reynolds è che essi siano tutti nulli, poiché le velocità (fluttuanti) che in essi compaiono sono nulle.

14.3.1 Modelli a basso numero di Reynolds ‘classici’

Abbiamo osservato nella sez. 13.1 che i modelli con chiusura sui momenti secondi di tipo lineare, esaminati nel cap. 11.5.1, non riproducono un comportamento corretto in prossimità di una parete solida. Questo inconveniente è dovuto a due fatti:

1. nel derivare le espressioni per le componenti dei termini pressione–deformazione, abbiamo fatto uso di un integrale di volume che risulta da un’integrazione formale; abbiamo tuttavia citato nella sez. 12.4.1 che è stata in realtà trascurata la presenza di un ulteriore termine, un integrale di superficie, che diventa significativo in prossimità di una parete;

2. l'espressione (12.22) adottata per il tensore dissipazione ϵ_{ij} prevede la sua isotropia, ossia che esso non avverta alcuna direzione preferenziale, ipotesi ovviamente non verificata in prossimità di una parete.

Per ovviare alla prima incongruenza, nel modello esaminato nel cap. 11.5.1 si aggiunge alle tre componenti del termine pressione–deformazione (11.46) un'ulteriore componente, che tenga conto dell'effetto trascurato (cosiddetto 'effetto eco')

$$\phi_{ij} = \phi_{ij1} + \phi_{ij2} + \phi_{ij3} + \phi_{ij}^w \quad (14.10)$$

dove la w sta per *wall*. Riportiamo qui la forma di ϕ_{ij}^w suggerita da Launder [56]:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^w = & \frac{\bar{k}^{3/2}}{c_l \bar{\epsilon} x_n} \left[c'_1 \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\overline{u'_k u'_l} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u'_i u'_k} n_j n_k - \frac{3}{2} \overline{u'_j u'_k} n_i n_k \right) + \right. \\ & \left. + c'_2 \left(\phi_{kl2} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik2} n_j n_k - \frac{3}{2} \phi_{jk2} n_i n_k \right) + c'_3 \left(\phi_{kl3} n_k n_l \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik3} n_j n_k - \frac{3}{2} \phi_{jk3} n_i n_k \right) \right] \end{aligned} \quad (14.11)$$

dove n_i indica la i -esima componente del versore normale alla parete, ed x_n indica la distanza normale alla parete. Per quanto riguarda i valori delle costanti, si ha

$$c'_1 = 0.5 \quad (14.12)$$

$$c'_2 = 0.3 \quad (14.13)$$

$$c'_3 = 0 \quad (14.14)$$

$$c_l = 2.5 \quad (14.15)$$

Essendo il valore suggerito di c'_3 nullo secondo la (14.14), l'ultimo termine tra parentesi quadre della (14.11) può in effetti essere ommesso del tutto.

Per porre rimedio alla seconda incongruenza elencata sopra, occorre adottare un modello per il tensore dissipazione che, mentre lontano dalla parete conservi la forma (12.22), in prossimità della parete si avvicini all'espressione suggerita da Rotta per tenere conto dell'anisotropia:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\bar{k}} \bar{\epsilon} \quad (14.16)$$

Un modello che soddisfa questi due limiti può quindi avere la forma

$$\epsilon_{ij} = \bar{\epsilon} \left[\frac{2}{3} (1 - f_s) \delta_{ij} + f_s \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\bar{k}} \right] \quad (14.17)$$

dove il fattore f_s deve essere una funzione del numero di Reynolds turbolento Re_t che vari opportunamente tra uno e zero al variare di Re_t tra zero e l'infinito (cioè, all'allontanarsi dalla parete). Hanjalic e Launder [34] suggeriscono l'espressione

$$f_s = \frac{1}{1 + 0.1 Re_t} \quad (14.18)$$

che soddisfa i limiti citati. L'equazione di $\bar{\epsilon}$ deve essere anch'essa adattata, con modifiche analoghe a quelle suggerite nelle sez. 10.2.3, 10.3.2:

$$\begin{aligned} \bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = & -c_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - \beta_k \overline{u'_k T'} \right) - c_{\epsilon 2} f_\epsilon \frac{\bar{\epsilon} \tilde{\epsilon}}{\bar{k}} + 2c_{\epsilon 3} \nu \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial^2 \bar{u}_m}{\partial x_k \partial x_n} \frac{\partial^2 \bar{u}_m}{\partial x_l \partial x_n} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_\epsilon \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_l} \right] \end{aligned} \quad (14.19)$$

con k, l, m ed n come indici di sommatoria. Il fattore f_ϵ che moltiplica la costante $c_{\epsilon 2}$ ha la forma

$$f_\epsilon = 1 - \frac{0.4}{1.8} \exp \left[- \left(\frac{Re_t}{6} \right)^6 \right] \quad (14.20)$$

Nel termine relativo compare la grandezza $\tilde{\epsilon}$ già definita nella (10.31)

$$\tilde{\epsilon} = \bar{\epsilon} - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{\bar{k}}}{\partial x_n} \right)^2 \quad (14.21)$$

la quale, come abbiamo osservato nella sez. 10.2.2, si annulla alla parete. In questo caso si risolve però ancora un'equazione per $\bar{\epsilon}$, anziché per $\tilde{\epsilon}$. La condizione al contorno per $\bar{\epsilon}$ può essere posta nelle forme (10.30,10.20)

$$\bar{\epsilon} = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{\bar{k}}}{\partial x_n} \right)^2 = \nu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_n^2} \quad (14.22)$$

dove evidentemente le derivate di \bar{k} (o della sua radice quadrata) sono calcolate tramite le equazioni degli sforzi (normali) di Reynolds. Spesso è però imposta la più semplice condizione che il il gradiente di $\bar{\epsilon}$ normale alla parete si annulli:

$$\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_n} = 0 \quad (14.23)$$

anche se questa non appare consistente con la (10.14).

Un inconveniente di questo modello è che i versori che figurano nella (14.11) rappresentano quei parametri topologici della parete, la cui indesiderabilità è stata sottolineata nella sez. 10.4.4.

14.3.2 Modelli a basso numero di Reynolds realizzabili

Abbiamo visto nelle sez. 13.2.1, 13.2.3, 13.2.5 che il modello realizzabile di Launder ('new model') introduce correzioni alle tre componenti del termine pressione-deformazione per tener conto di situazioni in cui la turbolenza si avvicina ad uno stato bidimensionale, come p. es. si verifica in prossimità di una parete solida. Quindi l'estensione del 'new model' a flussi a basso numero di Reynolds [57, 24] comporterà prevedibilmente solo minori correzioni per il termine pressione-deformazione, mentre rimane la necessità di operare una correzione sul tensore dissipazione, cioè l'altro aspetto citato all'inizio della sez. 14.3.1.

Per le componenti ϕ_{ij1} , ϕ_{ij2} , ϕ_{ij3} rimangono validi i modelli (13.18,13.24,13.28), ma alcuni fattori che vi figurano sono ridefiniti come segue:

$$c_1 = 6.3 A \sqrt{F} (1 - f) \quad (14.24)$$

essendo

$$F = \min(0.6, A_2) \quad (14.25)$$

$$f = \max\left(1 - \frac{Re_t}{140}, 0\right) \quad (14.26)$$

poi

$$c'_1 = 0.7 \quad (14.27)$$

$$c_2 = \min(0.55, A) \quad (14.28)$$

$$c'_2 = 0.6 \quad (14.29)$$

dove A_2 e A sono definite dalle (13.13,13.16). Inoltre, i valori dei gradienti di velocità media che compaiono nell'espressione (13.24) per ϕ_{ij2} sono sostituiti con valori 'efficaci' definiti come

$$\left[\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \right]_{eff} = \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} + c_I l^{*2} \frac{\partial [l^* f(A)]}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial x_l \partial x_m} \quad (14.30)$$

dove la sommatoria è solo sull'indice (ripetuto) m , e

$$l^* = \frac{\bar{k}^{3/2}}{\bar{\epsilon}} \quad (14.31)$$

$$f(A) = A^{0.3} (1 + 0.25 A^3) \quad (14.32)$$

$$c_I = 0.07 \quad (14.33)$$

Per quanto riguarda invece l'espressione del tensore dissipazione, si adotta, per sopperire ad alcune carenze del modello di Rotta (14.16), la forma

$$\epsilon_{ij} = f_\epsilon \epsilon_{ij}^* + (1 - f_\epsilon) \frac{2}{3} \bar{\epsilon} \delta_{ij} \quad (14.34)$$

avendo definito

$$f_\epsilon = \exp(-20 A^2) \quad (14.35)$$

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \frac{\overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_i u'_k} n_j n_k + \overline{u'_j u'_k} n_i n_k + \overline{u'_k u'_l} n_k n_l n_i n_j}{1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u'_p u'_q}}{\bar{k}} n_p n_q} \quad (14.36)$$

L'equazione per la dissipazione meccanica $\bar{\epsilon}$ prende la forma

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_k} = -c_{\epsilon 1} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{k}} \left(\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - \beta_k \overline{u'_k T'} \right) - c_{\epsilon 2} \frac{\bar{\epsilon} \tilde{\epsilon}}{\bar{k}} + 2 c_{\epsilon 3} \nu \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial^2 \bar{u}_m}{\partial x_k \partial x_n} \frac{\partial^2 \bar{u}_m}{\partial x_l \partial x_n} +$$

$$+ c_{\epsilon 4} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\tilde{\epsilon}}{k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(c_{\epsilon} \frac{\bar{k}}{\bar{\epsilon}} \overline{u'_k u'_l} + \nu \delta_{kl} \right) \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_l} \right] \quad (14.37)$$

sempre con k, l, m ed n come indici di sommatoria. Mentre $c_{\epsilon 1}$ mantiene il valore originario (13.30), $c_{\epsilon 2}$ assume una forma lievemente diversa

$$c_{\epsilon 2} = \frac{1.92}{1 + 0.63 (A_2 A)^{1/2}} \quad (14.38)$$

ed inoltre

$$c_{\epsilon 3} = 0.43 \quad (14.39)$$

$$c_{\epsilon 4} = 0.92 \quad (14.40)$$

Osserviamo che in questo modello i parametri topologici, mentre sono eliminati dall'espressione dei termini pressione–deformazione, sono invece reintrodotti nell'espressione della dissipazione attraverso la (14.36). Tuttavia, il termine ϵ_{ij}^* dà un contributo significativo alla dissipazione, vedi (14.34), solo nel sottostrato laminare, nell'ambito del quale i versori possono in genere identificati senza ambiguità [24], grazie all'estrema prossimità alla parete.

Bibliography

- [1] Favre, A., “Equations de gaz turbulent compressible”, *J. Mecanique* 4:361–421, 1965.
- [2] Lumley, J.L., “Pressure–strain correlation”, *Phys. Fluids* 18:750, 1975.
- [3] Jimenez, J., Wray, A.A., Saffman, P.G. e Rogallo, R.S., “The structure of intense vorticity in isotropic turbulence”, *J. Fluid Mech.* 255:65–90, 1993.
- [4] Rodi, W., *Turbulence models and their application in hydraulics – a state of the art review*, Int. Ass. Hydr. Research, Delft, 1980.
- [5] Cebeci, T. e Smith, A.M.O., *Analysis of turbulent boundary layers*, Academic Press, New York, 1974.
- [6] Wilcox, D.C., *Turbulence modeling in CFD*, DCW Industries, La Cañada, 1993.
- [7] Sai, V.A. e Lufty, F.M., “Analysis of the Baldwin–Barth and Spalart–Allmaras one–equation turbulence models”, *AIAA J.* 33:1971–1974, 1995.
- [8] Jones, W.P. e Launder, B.E. “The prediction of laminarization with a 2–equation model of turbulence”, *Int. J. Heat Mass Transf.* 15:301–314, 1972.
- [9] Launder, B.E. e Spalding, D.B., “The numerical computation of turbulent flows”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 3:269–289, 1974.
- [10] Hanjalić, K. e Launder, B.E., “A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows”, *J. Fluid Mech.* 52:609–638, 1972.
- [11] Orszag, S.A., “Renormalization group modelling and turbulence simulations”, in *Near–Wall Turbulent Flows* (So, R.M.C., Speziale, C.G. e Launder, B.E., ed.), Elsevier, Amsterdam, 1993.
- [12] Libby, P.A., *An introduction to turbulence*, Taylor & Francis, Washington, 1996.
- [13] Durbin, P.A., Mansour, N.N. e Zang, Y., “Eddy viscosity transport model for turbulent flow”, *Phys. Fluids* 6:1007, 1994.
- [14] Speziale, C.G., “On turbulent secondary flows in pipes of non–circular cross–section”, *Int. J. Eng. Sci.* 20:863, 1982.
- [15] Speziale, C.G., “On the origin of turbulent secondary flows in non–circular ducts”, in *ASME FED* 14:101–107, 1984.

- [16] Shih, T.-H., “Constitutive relations and realizability of single-point turbulence closures”, in *Turbulence and Transition Modelling* (Hallböck, M., Henningson, D.S., Johansson, A.V. e Alfredsson, H.P., ed.), Kluwer, Dordrecht, 1996, pp. 155–192.
- [17] Speziale, C.G., “On nonlinear $K-l$ and $K-\epsilon$ models of turbulence”, *J. Fluid Mech.* 178:459–475, 1987.
- [18] Speziale, C.G., “Some interesting properties of two-dimensional turbulence”, *Phys. Fluids* 24:1425–1427, 1981.
- [19] Nisizima, S. e Yoshizawa, A., “Turbulent channel and Couette flows using an anisotropic $k-\epsilon$ model”, *AIAA J.* 25:414–420, 1987.
- [20] Rubinstein, R. e Barton, J.M., *Phys. Fluids A* 2:1472–1476, 1990.
- [21] Myong, H.K. e Kasagi, N., “Prediction of anisotropy of the near-wall turbulence with an anisotropic low-Reynolds-number $k-\epsilon$ turbulence model”, *J. Fluids Eng.* 112:521–524, 1990.
- [22] Shih, T.-H., Zhu, J. e Lumley, J.L., “A realizable Reynolds stress algebraic equation model”, NASA TM 105993, 1993.
- [23] Craft, T.J., Launder, B.E. e Suga, K., “Extending the applicability of eddy viscosity models through the use of deformation invariants and non-linear elements”, in *5th IAHR Symp. Refin. Flow Modell. and Turb. Measur.*, Presse Ponts et Chaussées, Paris, 1993, pp. 125–132.
- [24] Launder, B.E., “An introduction to single-point closure methodology”, in *Turbulence and Transition Modelling* (Hallböck, M., Henningson, D.S., Johansson, A.V. e Alfredsson, H.P., ed.), Kluwer, Dordrecht, 1996, pp. 193–231.
- [25] Craft, T.J., Launder, B.E. e Suga, K., “Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence”, *Int. J. Heat Fluid Flow* 17:116–123, 1996.
- [26] Hanjalić, K., “Achievements and limitations in modelling and computation of buoyant turbulent flows and heat transfer”, *10th Int. Heat Transfer Conf.*, Brighton, 1994.
- [27] Hanjalić, K., comunicazione personale, 1996.
- [28] Launder, B.E., “On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows”, *J. Heat Transfer* 110:1112–1128, 1988.
- [29] Launder, B.E., “On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows: physical issues”, in *Turbulence, Heat and Mass Transfer* (K. Hanjalić e J.C.F. Pereira, ed.), Begell House, New York, 1995.
- [30] Jones, W.P. e Launder, B.E. “The calculation of low-Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence”, *Int. J. Heat Mass Transf.* 16:1119–1129, 1973.
- [31] Patel, V.C., Rodi, W. e Scheurer, G., “Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review”, *AIAA J.* 23:1308–1319, 1985.
- [32] Lam, C.K.G. e Bremhorst, K.A., “Modified form of the $k-\epsilon$ -model for predicting wall turbulence”, *J. Fluid Eng.* 103:456–460, 1981.

- [33] Launder, B.E. e Sharma, B.I., “Application of the energy–dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc”, *Lett. Heat Mass Transf.* 1:131–138, 1974.
- [34] Hanjalić, K. e Launder, B.E., “Contribution towards a Reynolds–stress closure for low–Reynolds–number turbulence”, *J. Fluid Mech.* 74:593–610, 1976.
- [35] Aris, R., *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [36] Lumley, J.L., “Computational modeling of turbulent flows”, *Adv. Appl. Mech.* 18:123–176, 1978.
- [37] Durbin, P.A., “Analyses and modeling of evolving turbulent flow”, *CTR Annual Research Briefs*, Stanford Univ./NASA Ames, 1991.
- [38] Cotton, M. e Ismael, J., in *Turbulence, Heat and Mass Transfer* (K. Hanjalić e J.C.F. Pereira, ed.), Begell House, New York, 1995.
- [39] Cho, J.R., Craft, T.J., Launder, B.E. e Suga, K., “Development of turbulence models for transition prediction”, *ERCRAFTAC Bull.* 24:26–30, 1995.
- [40] Craft, T.J., Launder, B.E. e Suga, K., “A non–linear eddy viscosity model including sensitivity to stress anisotropy”, *10th Symp. Turb. Shear Flows* 23:19–24, 1995.
- [41] Schumann, U., “Realizability of Reynolds–stress turbulence models”, *Phys. Fluids* 20:721–725, 1977.
- [42] Daly, B.J. e Harlow, F.H., “Transport equations in turbulence”, *Phys. Fluids* 13:2634–2649, 1970.
- [43] Launder, B.E., Reece, G.J. e Rodi, W., “Progress in the development of a Reynolds–stress turbulence closure”, *J. Fluid Mech.* 68:537–566, 1975.
- [44] Launder, B.E., “An introduction to single–point closure methodology”, in *Introduction to the modelling of turbulence*, VKI Lecture Series 1993–02, 1993.
- [45] Launder, B.E., “On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum”, *J. Fluid Mech.* 67:569–581, 1975.
- [46] Launder, B.E., “Second–moment closure: present... and future?”, *Int. J. Heat and Fluid Flow* 10:282–300, 1989.
- [47] Jones, W.P. e Musonge, P., “Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations”, *Phys. Fluids* 31:3589–3604, 1988.
- [48] Girimaji, S.S., “Fully–explicit and self–consistent algebraic Reynolds stress model”, *NASA CR 198243*, 1995.
- [49] Craft, T.J., Ince, N.Z. e Launder, B.E., “Recent developments in second–moment closure for buoyancy–affected flows”, *4th Int. Symp. Stratified Flows*, Grenoble, 1995.
- [50] Shih, T.–H., Lumley, J.L. e Janicka, J., “Second–order modelling of a variable–density mixing layer”, *J. Fluid Mech.* 180:93–116, 1987.

- [51] Shih, T.-S., Chen, J.-Y. e Lumley, J.L., “Second-order modeling of boundary-free turbulent shear flows”, *AIAA J.* 30:1553–1560, 1992.
- [52] Durbin, P.A. e Speziale, C.G., “Realizability of second-moment closure via stochastic analysis”, *J. Fluid Mech.* 280:395–407, 1994.
- [53] Durbin, P.A., “Reynolds stress closure modeling in wall-bounded flows”, *Annual Research Briefs 1992*, pp. 185–197, Center for Turbulence Research, Stanford Univ., 1992
- [54] Laurence, D. e Durbin, P., “Modelling near wall effects in second moment closures by elliptic relaxation”, *Proc. Summer Program 1994*, pp. 323–338, Center for Turbulence Research, Stanford Univ., 1994
- [55] Hallbäck, M., Johansson, A.V. e Burden, A.D., “The basics of turbulence modelling”, in *Turbulence and Transition Modelling* (Hallbäck, M., Henningson, D.S., Johansson, A.V. e Alfredsson, H.P., ed.), Kluwer, Dordrecht, 1996, pp. 81–154.
- [56] Launder, B.E., “Turbulence modelling for the nineties: second-moment closure..... and beyond?”, *12th Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.*, pp. 1–12, 1990.
- [57] Launder, B.E. e Li, S.-P., “On the elimination of wall-topography parameters from second-moment closure”, *Phys. Fluids* 6:999–1006, 1994.