CAPITOLO ELEMENTI FINITI

1. Generalità

Con l'avvento degli elaboratori elettronici si è avuto un enorme sviluppo di tutte quelle tecniche in grado di generare modelli matematici in termini di un numero, anche molto elevato, di *variabili discrete*.

Fin verso la metà degli anni '50 il progetto strutturale veniva condotto facendo largo uso di teorie semplificate in grado di produrre modelli matematici di agevole soluzione analitica.

Lo studio di strutture elementari quali aste, travi ad asse rettilineo o curvo, membrane, piastre, gusci, ... condotto con modelli matematici formulati in termini di equazioni differenziali e le tecniche di risoluzione analitica hanno consentito indiscutibili progressi e conoscenze più che sufficienti per valutare il comportamento di tali elementi strutturali.

Quando poi fosse stato necessario l'uso di tecniche numeriche per la risoluzione delle equazioni differenziali, ci si limitava a "discretizzare" il modello con un numero limitato di parametri in modo da avere modelli che i mezzi di calcolo del tempo consentivano di trattare.

L'avvento degli elaboratori elettronici ha rivoluzionato le metodologie di analisi e verifica privilegiando i modelli "discreti" anche con un gran numero di variabili.

Nel filone delle tecniche di discretizzazione enorme rilievo ha oggi il metodo degli elementi finiti (M.E.F.) per la capacità di consentire, attraverso processi tipici da elaboratore elettronico, l'esame di strutture comunque complesse e con la precisione voluta.

Pur risultando difficile precisare la data in cui il metodo degli E.F. è stato "inventato"¹, possiamo dire che inizialmente è stato sviluppato su base fisica per l'analisi dei problemi della meccanica delle strutture.

Comunque il metodo è applicabile anche in altri settori ed oggi il concetto di elemento finito ha assunto un significato ben più ampio di quello esposto nelle presenti note. Il M.E.F. può essere considerato una generalizzazione del metodo matriciale utilizzato per l'analisi di strutture discrete.



¹ Le basi affondano in tre distinti settori: della matematica applicata [1,2,3], della fisica[4] e dell'ingegneria[5,6] e la dizione "Elemento Finito" è stata coniata da Clough [7].

L'idea fondamentale del metodo è quella di pensare un continuo, che di per sè non possiede divisioni naturali, come un mosaico realizzato con "tessere" che sono elementi strutturali di dimensioni ridotte.

Le tessere costituiscono un reticolo i cui punti di intersezione vengono detti "nodi"; ogni tessera è di per sè un continuo ma il suo comportamento, date le ridotte dimensioni, può essere rappresentato con un numero discreto di parametri definiti ai suoi nodi.

In altri termini ogni elemento strutturale viene "discretizzato" e considerato collegato nei nodi agli elementi circostanti.

L'elemento di continuo così discretizzato prende il nome di "elemento finito" ed il numero di parametri nodali che lo descrivono definiscono i "gradi di libertà" dell'elemento. Il numero dei parametri discreti in grado di rappresentare il singolo elemento finito dipende dal tipo di elemento strutturale e dalla precisione voluta per rappresentare la realtà del continuo dell'elemento.

Se indichiamo con $N^{(e)}$ il numero dei nodi del generico elemento e con g_n gradi di libertà dell'*n*-esimo nodo, l'elemento possiede un numero di gradi

di libertà pari a
$$G^{(e)} = \sum_{n=1}^{N^{(e)}} g_n^{(e)}$$
.

Se indichiamo con *N* il numero dei nodi dell'intera struttura ed al generico nodo 1,..., *n*, ..., *N* sono associati g_n gradi di libertà, diremo che la struttura è stata schematizzata con $G = \sum_{n=1}^{N} g_n$ gradi di libertà.

Il continuo è così riportato ad un sistema discreto il cui comportamento è descritto da un insieme di variabili discrete ovvero da un numero G di parametri o gradi di libertà.

Il numero di elementi finiti con cui rappresentare l'intera struttura dipende dal tipo e dalla precisione richiesta per rappresentare la realtà del continuo. In generale, l'impiego di pochi elementi finiti di grandi dimensioni permette una valutazione rapida ma alquanto approssimata del comportamento della struttura reale, mentre un numero maggiore di elementi finiti porta a risultati più attendibili ma ad un costo computazionale certamente maggiore.

L'ovvio compromesso porta frequentemente ad una griglia di schematizzazione i cui elementi sono di dimensioni diverse, utilizzando elementi di dimensioni ridotte nelle parti che richiedono una analisi più accurata ed elementi di dimensioni più grandi nelle altre parti.

Nel condurre la discretizzazione dovrà essere garantita l'attendibilità della rappresentazione discreta di un continuo, sia per quanto riguarda il comportamento del singolo elemento sia per quanto riguarda l'ipotesi che gli elementi finiti contigui vengono considerati uniti unicamente nei loro nodi, mentre nella realtà sono uniti su tutto il loro contorno¹.

In merito alla scelta dei parametri discreti per definire lo stato del sistema è naturale pensare, in similitudine al metodo degli spostamenti o degli sforzi, che essi possano essere le variabili cinematiche o quelle cinetiche che vengono genericamente indicate come "spostamenti" e "forze".

Nel metodo delle forze è necessario individuare un sistema primario di forze interne staticamente compatibile, in particolare:

-se la struttura è staticamente determinata, le equazioni di equilibrio sono sufficienti a determinare il sistema di forze staticamente compatibile.

-se la struttura è staticamente indeterminata, le forze interne oltre all'equilibrio debbono soddisfare anche la compatibilità. Nel metodo delle forze occorre quindi un primo e non sempre facile esame per ridurre la struttura ad un sistema primario staticamente determinato; inoltre la ricerca della matrice di flessibilità ed il conseguente "assemblaggio" non è facilmente "meccanizzabile".

Nel metodo degli spostamenti, per ogni elemento sono definiti gli spostamenti nodali in modo da formare un sistema primario geometricamente determinato; si determinano quindi le forze dovute ai carichi e gli spostamenti nodali unitari (le rigidezze) del sistema primario ed infine si calcolano i valori degli sforzi necessari ad assicurare l'equilibrio.

Nel metodo degli spostamenti, si lavora su una struttura primaria cineticamente determinata che di per sè permette un procedimento "automatico".

Risulta quindi evidente il vantaggio del metodo degli spostamenti rispetto al metodo delle forze.

Alla base del metodo degli elementi finiti c'è la scelta dei parametri che caratterizzano il comportamento dell'elemento e i criteri con cui ricercare il modello discreto.. Procedimento questo legato alla schematizzazione di elementi strutturali continui (quindi ad infiniti gradi di libertà) con elementi il cui comportamento è descritto con un numero finito di gradi di libertà.

Una volta determinata la matrice di rigidezza o flessibilità dell'elemento si utilizzano le metodologie classiche dei metodi matriciali.

¹ Senza le necessarie garanzie, elementi bi-tri-dimensionali contigui potrebbero aprirsi o sovrapporsi lungo il contorno compreso tra i punti nodali.

2. Metodi Matriciali

A)–Se il sistema è di per sè già un discreto, il metodo matriciale è una tecnica molto utile per definirne il modello matematico in forma semplice e di pratico impiego per l'analisi numerica con l'impiego del calcolatore.

Lo scopo è quello di descrivere le proprietà di ogni singolo componente discreto attraverso matrici che vengono poi assemblate con tecniche facilmente generalizzabili e programmabili su elaboratore elettronico¹.

Si consideri come primo esempio un sistema composto da un certo numero di molle di rigidezza assiale $k^{(n)}$ e si prenda in esame la singola molla. u_1, F_1 k $u_2, F_2 \xrightarrow{2}$

I suoi estremi, nodi naturali indicati con 1 e 2, possono subire gli spostamenti u_1, u_2 dovuti all'applicazione delle forze² F₁, F₂. Le equazioni di equilibrio si possono ottenere dalla stazionarietà dell'energia potenziale:

(2.1)
$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}k(u_2 - u_1)^2 - F_1u_1 - F_2u_2$$

da cui, derivando parzialmente rispetto ad u₁, u₂, si hanno le equazioni:

(2.2)
$$\begin{cases} ku_1 - ku_2 = F_1 \\ -ku_1 + ku_2 = F_2 \end{cases}$$

ovvero in forma matriciale:

(2.3)
$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \text{ cioè } [K] \{U\} = \{F\}$$

La matrice [K] che trasforma gli spostamenti in forze è la *matrice di rigidezza* e rappresenta in termini esatti il "legame costitutivo" della molla.

Poiché la molla possiede due gradi di libertà u_1,u_2 , la matrice [K] ha dimensioni (2•2). In particolare se $u_1=u_2$, la molla ha un moto rigido di traslazione e le (2.3) sono identicamente soddisfatte quando $F_1=F_2$ sono equilibrate dalle forze d'inerzia; quindi uno dei gradi di libertà è relativo al moto rigido di traslazione e l'altro al moto di deformazione elastica; questo è evidente anche dal fatto che il determinante della [K] è nullo, |K| = 0.

La matrice [K] è simmetrica, rappresentando un sistema elastico ovvero di natura conservativa, e semidefinita (|K| = 0).

¹ Ci limitiamo ad esaminare il metodo matriciale più diffuso nell'analisi strutturale senza dimenticare che ne esistono altri quali la matrice di trasferimento, ...

² Si noti che, F_1 ed F_2 hanno lo stesso verso.

Consideriamo il sistema di figura costituito da due molle.

per ciascuna delle due molle considerate separatamente, vale la (2.3):

che, per il momento scriviamo nella forma:

(2.4)
$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1} \\ u_{2a} \\ u_{2b} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1} \\ u_{2a} \\ u_{2b} \\ u_{3} \end{bmatrix} = \begin{cases} F_{1} \\ F_{2a} \\ F_{2b} \\ F_{3} \end{cases}$$

Unendo le due molle, nel nodo 2 deve essere garantita la congruenza $u_{2a}=u_{2b}$ e l'equilibrio $F_{2a}+F_{2b}=F_2$, pertanto:

(2.5)
$$\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0\\ -k^{(1)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)}\\ 0 & -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} F_1\\ F_2\\ F_3 \end{bmatrix} \text{ cioè } [K]\{U\} = \{F\}$$

formalmente analoga alla (2.3) salvo le dimensioni (3•3) di [K] perchè ora il sistema ha tre gradi di libertà u_1 , u_2 , u_3 .

Nel caso di un numero elevato di molle, il processo esposto potrebbe diventare noioso ma può essere facilmente "automatizzato" con meccanismi tipici da elaboratore elettronico.

Scrivendo la [K] che compare nella (2.5) nella forma generale:

(2.6)
$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}$$

ed indicando la [K^(e)] dell'e-esimo elemento come:

(2.7)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

si può facilmente verificare che i coefficienti della (2.6) si ottengono dai coefficienti delle (2.7) nel modo seguente:

(2.8)
$$k_{ij} = k_{ij}^{(1)} + k_{ij}^{(2)}$$

In sostanza è come se le due sottomatrici della (2.4) si sovrappongono al nodo 2 dove confluiscono le due molle. Il processo può quindi essere così generalizzato: i termini sulla diagonale principale k_{ii} si ottengono sommando tutte le rigidezze degli elementi strutturali che confluiscono sul nodo i-esimo, i termini fuori diagonale k_{ij} si ottengono sommando tutti i termini degli elementi che legano il nodo i-esimo con quello j-esimo.

La matrice di rigidezza (2.6) possiede le stesse proprietà delle (2.7):

- [K] è una matrice quadrata (N•N) con N numero di gradi di libertà;
- [K] è simmetrica;
- il determinante |K|=0, indice di presenza di moto rigido.

oltre quella di risultare "bandata" ovvero con i termini che si addensano nell'intorno della diagonale principale.

Vediamo ora come interpretare il sistema (2.5):

(2.9)
$$[K]{U} = {F}$$

In ciascun nodo, se è dato lo spostamento si ha come incognita la forza e viceversa, se è data la forza si ha come incognita lo spostamento. Pertanto la (2.9) è un sistema di tante equazioni in altrettante incognite.

Così nel caso in cui fosse impedito lo spostamento nel nodo 1 mentre nei nodi 2,3 ci fossero applicate le forze F_2,F_3 , indicando con R_1 la reazione vincolare, si ha:

(2.10)
$$\begin{cases} -k^{(1)}u_2 = R_1 \\ (k^{(1)} + k^{(2)})u_2 - k^{(2)}u_3 = F_2 \\ -k^{(2)}u_2 + k^{(2)}u_3 = F_3 \end{cases}$$

le ultime due sono un sistema di due equazioni nelle due incognite u₂,u₃:

(2.11)
$$\begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{cases} u_2 \\ u_3 \end{cases} = \begin{cases} F_2 \\ F_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} K^* \end{bmatrix} \{ U \} = \{ F \}$$

La matrice $[K^*]$ nella (2.11) è quella originaria (2.5) senza la prima riga e la prima colonna; in pratica imporre u₁=0, equivale ad eliminare nella (2.5) la corrispondente riga e colonna. Naturalmente, avendo eliminato il moto rigido, il determinante della $[K^*]$ è $\neq 0$, quindi il sistema (2.11) è invertibile:

(2.12)
$$\begin{cases} u_2 \\ u_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} F_2 \\ F_3 \end{cases}$$

Noti gli spostamenti, la prima delle (2.10) consente di determinare l'ultima incognita, la reazione vincolare R_1 .

Come si vede, una volta nota la $[K^{(e)}]$ dell'elemento, è tutto estremamente semplice con processi tipici da calcolatore elettronico che riassumiamo:

1)–Si assemblano le $[K^{(e)}]$ utilizzando la (2.8):

(2.13)
$$k_{ij} = \sum_{e} k_{ij}^{(e)}$$

2)–Si riorganizza il vettore $\{U\}$ accorpando in un sottovettore $\{U^N\}$ gli spostamenti nodali assegnati ed in $\{U^I\}$ quelli incogniti, quindi:

$$(2.14) \qquad \left[\frac{\mathbf{K}^{\mathrm{NN}}}{\mathbf{K}^{\mathrm{NI}}} + \frac{\mathbf{K}^{\mathrm{NI}}}{\mathbf{K}^{\mathrm{II}}}\right] \left\{\frac{\mathbf{U}^{\mathrm{N}}}{\mathbf{U}^{\mathrm{I}}}\right\} = \left\{\frac{\mathbf{R}^{\mathrm{I}}}{\mathbf{F}^{\mathrm{N}}}\right\} \implies \left\{\begin{bmatrix}\mathbf{K}^{\mathrm{NN}}\\\mathbf{K}^{\mathrm{NI}}\end{bmatrix} \left\{\mathbf{U}^{\mathrm{N}}\right\} + \begin{bmatrix}\mathbf{K}^{\mathrm{NI}}\\\mathbf{K}^{\mathrm{II}}\end{bmatrix} \left\{\mathbf{U}^{\mathrm{I}}\right\} = \left\{\mathbf{R}^{\mathrm{I}}\right\}$$

3)-Dalla seconda delle (2.14), si ricava il vettore degli spostamenti incogniti:

(2.15)
$$\{U^{I}\} = [K^{II}]^{-1}(\{F^{N}\} - [K^{NI}]\{U^{N}\})$$

4)–Dalla prima delle (2.14), si ricava il vettore delle reazioni vincolari:

(2.16)
$$\{F^{I}\} = [K^{NN}]\{U^{N}\} + [K^{NI}][K^{II}]^{-1}(\{F^{N}\} - [K^{NI}]\{U^{N}\})$$

B)–Anche per un continuo è possibile, *in particolari casi*, realizzare un modello matematico esatto in termini di un numero di finito parametri.

B1)–Si consideri una *travatura reticolare* piana composta da aste unite agli estremi da cerniere. I carichi siano applicati *solo agli estremi* (nodi) delle singole aste.



I singoli elementi sono quindi soggetti solo a carichi assiali e si comportano come "aste" sollecitate lungo il proprio asse.

Esaminiamo la singola asta in un sistema di riferimento ortogonale x, y, z, con x coincidente con l'asse dell'asta, che indichiamo come sistema di riferimento locale, per distinguerlo da quello globale X,Y,Z.

Indichiamo, per la generica asta, come nodo i-esimo l'estremo di sinistra e nodo j-esimo quello di destra.. A detti nodi sono applicate le forze assiali F_i, F_i L \widehat{U}^{u_j,F_j}

e sono possibili gli spostamenti u_i, u_i.

L'equazione nel campo, u''(x)=0, ha come soluzione:

(2.17)
$$u(x)=c_0+c_1x$$

funzione delle due costanti c_0,c_1 . Per uno specifico problema, tali costanti dipendono dalle specifiche condizioni agli estremi. Volendo caratterizzare il comportamento dell'elemento in termini generali diciamo che lo spostamento al nodo i-esimo vale ui e quello al nodo j-esimo ui. Possiamo quindi esprimere c_1 , c_2 in funzione di u_i , u_j , imponendo le condizioni

(2.18)
$$u(0)=u_i$$
; $u(L)=u_j$

e quindi:

$$u(\xi) = (1 - \xi)u_i + \xi u_j \quad \text{dove} \quad \xi = \frac{x}{L}$$

che, in forma matriciale, si scrive:

(2.19)
$$u(\xi) = \{(1-\xi) ; \xi\} \begin{cases} u_i \\ u_j \end{cases}$$

Per il principio dei lavori virtuali¹, per cui il lavoro virtuale delle forze interne è uguale a quello delle forze esterne:

(2.20)
$$L \iint_{A} dA \int_{0}^{1} \sigma \delta \varepsilon d\xi = F_{i} \delta u_{i} + F_{j} \delta u_{j}$$

Ricordando le relazioni costitutive e cinematiche e la (2.19):

$$\delta \varepsilon = \frac{1}{L} \frac{d\delta u}{d\xi} = \frac{1}{L} \{-1 \mid 1\} \left\{ \frac{\delta u_i}{\delta u_j} \right\} \quad ; \quad \sigma = \frac{E}{L} \frac{du}{d\xi} = \frac{E}{L} \{-1 \mid 1\} \left\{ \frac{u_i}{u_j} \right\}$$

¹ Si lascia al lettore l'utilizzazione del principio di stazionarietà dell'energia.

la (2.20) si scrive:

(2.21)
$$\left\{\delta u_1; \delta u_2\right\} \left[\frac{EA}{L} \int_{0}^{1} \begin{cases} -1\\ 1 \end{cases} \left\{-1 & 1\right\} d\xi \left[\begin{matrix} u_i\\ u_j \end{matrix}\right] = \left\{\delta u_1; \delta u_2\right\} \left\{\begin{matrix} F_i\\ F_j \end{matrix}\right\}$$

Dovendo la (2.21) valere per qualsiasi scelta di δu_1 , δu_2 , e ponendo:

(2.22)
$$[K] = \frac{AE}{L} \left[\int_{0}^{1} \left\{ -1 \\ 1 \right\} \left\{ -1 \quad 1 \right\} d\xi \right] = \frac{AE}{L} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right]$$

la (2.21), si scrive:

(2.23)
$$\left[\overline{\mathbf{K}}^{(e)}\right]\left\{\overline{\mathbf{U}}^{(e)}\right\} = \left\{\overline{\mathbf{F}}^{(e)}\right\}$$

Dove le grandezze sono riportate con la soprallineatura per ricordare che sono valutate rispetto al sistema locale, mentre l'apice (e) indica che la (2.23) vale per l'elemento e-esimo. Ovviamente prima di procedere all'assemblaggio dei vari elementi della struttura reticolare dovremo trasformare la (2.23) nel sistema di riferimento globale X,Y,Z.

B2)–Si consideri il *telaio (o portale) piano* di figura, simile al caso B1) dove ora gli elementi, uniti non da cerniere

ma rigidamente, sono "travi", soggetta a forze e momenti applicati solo agli estremi.

Nel sistema di riferimento locale x,y,z, il comportamento assiale della trave è descritto dalle (2.23); ci limitiamo quindi a considerarne il solo comportamento

flessionale¹. Al nodo i-esimo di sinistra e al nodo j-esimo di destra sono cinematiche sono gli spostamenti w_i, w_i e le rotazioni θ_i , θ_j . La convenzione sui segni di forze, momenti, spostamenti e rotazioni è quella riportata in figura.



applicate le forze F_i, F_i ed i momenti M_i, M_i; le corrispondenti variabili $\mathbf{A} \theta_i M_i$



Il lettore ponga attenzione ai versi assunti per le forze ed i momenti. Tradizionalmente si adottano due distinte convenzioni: la prima utilizzata per la formulazione analitica e l'altra per l'analisi numerica agli elementi finiti.

¹ Chiaramente, data la linearità di comportamento i due effetti sono poi sommabili.

La tabella mette a confronto le due convenzioni, evidenziandone le differenze di segno.



Poiché spostamenti e rotazioni rimangono inalterate in ambedue le convenzioni, non

occorrono per esse trasformazioni speciali. Il perché di questa nuova convenzione è evidente se si pensa al momento dell'assemblaggio delle matrici in cui momenti e forze nello stesso nodo vanno sempre a sommarsi pur provenendo da elementi diversi.

L'equazione nel campo, $w^{IV}(\xi)=0$, ha soluzione:

(2.24)
$$w(\xi)=c_0+c_1\xi+c_2\xi^2+c_3\xi^3$$

In similitudine a quanto fatto in B1) imponendo:

$$\xi = 0 \quad \begin{cases} w(0) = w_i \\ w'(0) = -L\theta_i \end{cases} ; \quad \xi = 1 \quad \begin{cases} w(1) = w_j \\ w'(1) = L\theta_j \end{cases}$$

si ha:

(2.25)
$$\mathbf{w}(\xi) = \left\{ \left(1 - 3\xi^{2} + 2\xi^{3} \right); \left(-\xi + 2\xi^{2} - \xi^{3} \right); \left(3\xi^{2} - 2\xi^{3} \right); \left(\xi^{3} - \xi^{2} \right) \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{w}_{i} \\ \mathbf{L}\theta_{i} \\ \mathbf{w}_{j} \\ \mathbf{L}\theta_{j} \end{matrix} \right\}$$

 $= \left\{ \mathbf{N}(\xi) \right\} \left\{ \Delta \right\}$

Per il principio dei lavori virtuali:

(2.26)
$$\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{L}^{3}}\int_{0}^{1} \delta \mathbf{w}^{''} \mathbf{w}^{''} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \delta \mathbf{w}_{\mathrm{i}} \mathbf{F}_{\mathrm{i}} + \delta \theta_{\mathrm{i}} \mathbf{M}_{\mathrm{i}} + \delta \mathbf{w}_{\mathrm{j}} \mathbf{F}_{\mathrm{j}} + \delta \theta_{\mathrm{j}} \mathbf{M}_{\mathrm{j}}$$

poiché:

$$\mathbf{w}^{"} = \left\{ \left(-6 + 12\xi \right) ; \left(4 - 6\xi \right) ; \left(6 - 12\xi \right) ; \left(6\xi - 2 \right) \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{w}_{i} \\ \mathbf{L}\theta_{i} \\ \mathbf{w}_{j} \\ \mathbf{L}\theta_{j} \end{matrix} \right\} = \left\{ \mathbf{B}(\xi) \right\} \left\{ \Delta \right\}$$

la (2.26) si scrive:

$$(2.27)\left\{\delta\Delta\right\}^{\mathrm{T}}\left[\int_{0}^{1}\left\{B\right\}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{L}^{3}}\left\{B\right\}\mathrm{d}\xi\right]\left\{\Delta\right\}=\left\{\delta\Delta\right\}^{\mathrm{T}}\left\{F\right\}\Longrightarrow\left\{\delta\Delta\right\}^{\mathrm{T}}\left[K\right]\left\{\Delta\right\}=\left\{\delta\Delta\right\}^{\mathrm{T}}\left\{F\right\}$$

Quindi, nel sistema locale e per la generica trave, analogamente alla (2.23):

(2.28)
$$\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{L}^{3}} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathrm{w}}_{i} \\ \mathrm{L}\overline{\theta}_{i} \\ \mathrm{\overline{w}}_{j} \\ \mathrm{L}\overline{\theta}_{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathrm{F}}_{i} \\ \overline{\mathrm{M}}_{i}/\mathrm{L} \\ \overline{\mathrm{F}}_{j} \\ \overline{\mathrm{M}}_{j}/\mathrm{L} \end{bmatrix}$$

in cui le componenti del vettore $\{\overline{\Delta}\}$ hanno tutte le dimensioni di una lunghezza e quelle e del vettore $\{\overline{F}\}$ di una forza. Volendo mantenere alle singole componenti le dimensioni del significato fisico che gli compete:

(2.29)
$$\frac{\mathrm{EI}}{\mathrm{L}^{3}}\begin{bmatrix} 12 & -6\mathrm{L} & -12 & -6\mathrm{L} \\ -6\mathrm{L} & 4\mathrm{L}^{2} & 6\mathrm{L} & 2\mathrm{L}^{2} \\ -12 & 6\mathrm{L} & 12 & 6\mathrm{L} \\ -6\mathrm{L} & 2\mathrm{L}^{2} & 6\mathrm{L} & 4\mathrm{L}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathrm{w}}_{i} \\ \overline{\mathrm{\theta}}_{i} \\ \overline{\mathrm{w}}_{j} \\ \overline{\mathrm{\theta}}_{j} \end{bmatrix} = \begin{cases} \overline{\mathrm{F}}_{i} \\ \overline{\mathrm{M}}_{i} \\ \overline{\mathrm{F}}_{j} \\ \overline{\mathrm{M}}_{j} \end{bmatrix}$$

C)–Trave tirata ed inflessa. Nel caso in cui la trave si considera con capacità sia estensionali che flessionali, la matrice di rigidezza si ottiene dalla sovrapposizione dell'elemento "asta" e "trave inflessa", ovvero:

EA/L	0	0	-EA/L	0	0]	$\left(\overline{\mathbf{u}}_{i}\right)$	$\left(\overline{F}_{x,i}\right)$
0	12 EI/L^3	$-6 \text{EI}/\text{L}^2$	0	-12 EI/L^3	-6EI/L^2	w _i	$\overline{F}_{z,i}$
0	$-6 \text{EI}/\text{L}^2$	$4 \mathrm{EI/L}$	0	$6 \text{EI}/\text{L}^2$	2 EI/L	$\overline{\theta}_{i}$	$\overline{M}_{y,i}$
-EA/L	0	0	EA/L	0	0	$\left \overline{\mathbf{u}}_{j} \right ^{=}$	$\overline{\overline{F}}_{x,j}$
0	$-12 \text{EI}/\text{L}^3$	$6 \text{EI}/\text{L}^2$	0	$12 \text{ EI}/\text{L}^3$	$6 \text{EI}/\text{L}^2$	$\overline{\mathbf{W}}_{j}$	$\overline{F}_{z,j}$
0	$-6 \text{EI}/\text{L}^2$	$2 \mathrm{EI/L}$	0	$6 \text{EI}/\text{L}^2$	4 EI/L	$\left[\overline{\Theta}_{j} \right]$	$\overline{\mathbf{M}}_{y,j}$

3. Trasformazione di coordinate nel piano

A)–Consideriamo la struttura reticolare *piana* di fig. a) composta di elementi "aste". Per la generica asta i,j di fig. b) valgono le (2.22,23) nel sistema di riferimento locale x,y,z.



Tra i due sistemi, quello globale XYZ e quello locale xyz, vige la trasformazione:

(3.1)
$$\begin{cases} X \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

e quella inversa:

(3.2)
$$\begin{cases} x \\ z \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}$$

Relazione valida anche per i vettori forza e spostamento in ciascun nodo e per qualsiasi vettore sia esso forza o spostamento. Quindi:

(3.3)
$$\begin{cases} F_x \\ F_z \end{cases} = [T] \begin{cases} F_x \\ F_z \end{cases} ; \begin{cases} u_x \\ w_z \end{cases} = [T] \begin{cases} u_x \\ w_z \end{cases}$$

ovvero:

(3.4)
$$\begin{cases} F_{x,i} \\ F_{z,i} \\ F_{x,j} \\ F_{z,j} \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \frac{\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x,i} \\ F_{z,i} \\ F_{x,j} \\ F_{z,j} \end{bmatrix}$$

che, indicando soprallineate le grandezze nel sistema locale, si scrive:

$$(3.5) \qquad \qquad \left\{\overline{\mathbf{F}}\right\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{F}\}$$

Una relazione analoga vige per gli spostamenti:

$$(3.6) \qquad {\overline{\mathbf{U}}} = [\mathbf{R}]{\mathbf{U}}$$

E' evidente che, mentre nel riferimento locale l'unica componente non nulla dello spostamento è la u_x lungo l'asse dell'asta, nel riferimento globale sono genericamente presenti ambedue le componenti u_x , w_z . Pertanto per utilizzare le (3.5,6) le relazioni nel sistema locale (2.22,23) devono essere scritte prevedendo, anche se nulle, le componenti in direzione y, cioè nella forma:

$$(3.7) \qquad \qquad \frac{\mathbf{EA}}{\mathbf{L}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ -1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{u}}_i \\ \overline{\mathbf{w}}_i \\ \overline{\mathbf{w}}_j \\ \mathbf{w}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{x},i} \\ \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{x},j} \\ \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{x},j} \\ \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{x},j} \\ \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{x},j} \end{bmatrix} \Rightarrow [\overline{\mathbf{K}}] \{\overline{\mathbf{U}}\} = \{\overline{\mathbf{F}}\}$$

che, utilizzando le (3.5,6), nel sistema globale si scrive:

(3.8)
$$[\overline{\mathbf{K}}][\mathbf{R}]{\mathbf{U}} = [\mathbf{R}]{\mathbf{F}} \implies [\mathbf{R}]^{\mathsf{T}}[\overline{\mathbf{K}}][\mathbf{R}]{\mathbf{U}} = {\mathbf{F}}$$

in definitiva:

(3.9)
$$[K]{U} = {F} \text{ dove } [K] = [R]^{T} [\overline{K}][R]$$

Così, nel caso specifico, la matrice di rigidezza dell'asta ij di fig.b) nel sistema globale XZ, ponendo $c=\cos\theta$, $s=sen\theta$, risulta:

(3.12)
$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Solo ora, che conosciamo la [K] nel sistema globale, possiamo procedere all'assemblaggio delle varie aste che costituiscono il sistema strutturale di fig. a), utilizzando le relazioni (2.8).

B)–Nel caso di trave inflessa, possiamo fare considerazioni analoghe notando che mentre tra le componenti delle forze e degli spostamenti tra sistema globale e locale vigono le (3.3), per quanto riguarda rotazioni e momenti queste rimangono invariate a seguito della trasformazione. Quindi:

$$(3.13) \qquad \begin{cases} F_{x} \\ F_{z} \\ \overline{M}_{y} \end{cases} = \begin{bmatrix} c & -s & | & 0 \\ s & c & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x} \\ F_{z} \\ \overline{M}_{y} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{cases} u_{x} \\ w_{z} \\ \overline{\theta}_{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & | & 0 \\ s & c & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x} \\ w_{z} \\ \overline{\theta}_{y} \end{bmatrix}$$

Ricordando la (2.29) ed espandendo la matrice di rigidezza in modo da prevedere anche la componente u:

$$(3.14) \qquad \qquad \underbrace{\mathrm{EI}}_{L^{3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L & | & 0 & -12 & -6L \\ 0 & -6L & 4L^{2} & | & 0 & 6L & 2L^{2} \\ 0 & -12 & 6L & | & 0 & 12 & 6L \\ 0 & -6L & 2L^{2} & | & 0 & 6L & 4L^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_{i} \\ \overline{w}_{i} \\ \overline{\theta}_{i} \\ \overline{u}_{j} \\ \overline{w}_{j} \\ \overline{\theta}_{j} \end{bmatrix} = \begin{cases} \overline{F}_{x,i} \\ \overline{F}_{x,j} \\ \overline{F}_{x,j} \\ \overline{F}_{x,j} \\ \overline{F}_{x,j} \\ \overline{F}_{x,j} \\ \overline{M}_{y,j} \end{bmatrix}$$

quindi la matrice di trasformazione che consente di passare dal sistema globale a quello locale:

(3.15)
$$\left\{\overline{\mathbf{F}}\right\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{F}\} ; \left\{\overline{\Delta}\right\} = [\mathbf{R}]\{\Delta\}$$

risulta:

(3.16)
$$[R] = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per cui la matrice di rigidezza nel sistema globale si ottiene utilizzando una relazione analoga alla (3.9).

4. L'elemento finito

Nella realtà, aste, travi, piastre, gusci, ... non sono sollecitati solo con carichi applicati ai loro estremi ed il loro comportamento non può essere rappresentato in modo esatto solo da due o quattro parametri come visto precedentemente.

Così nel caso di trave inflessa con carichi distribuiti lungo l'asse la (2.25) non rappresenta la soluzione esatta del problema dell'intera trave.

Se però immaginiamo di dividere idealmente la trave di lunghezza L in elementi di trave lunghi l_n ed immaginiamo di concentrare il carico solo ai nodi, la (2.25) rappresenta una soluzione valida nell'ambito di ogni elemento l_n . Per ciascuno di essi il comportamento elastico è descritto dalla matrice di rigidezza (2.29). Il modello ad E.F. dell'intera trave sarà dato assemblando le [K^(e)] dei vari elementi.



Nel caso di figura, considerando 7 nodi, in ognuno dei quali sono possibili due G.L., il modello matematico del continuo trave è dato da un sistema discreto a 14 G.L., salvo i vincoli.

In tale modo di procedere notiamo:

a)–che abbiamo assunto che la struttura è una trave a comportamento flessionale;

b)–che, nell'ambito della teoria della trave, le variabili cinematiche sono lo spostamento fuori del piano w(x) e la rotazione $\theta(x)$;

c)-che lo spostamento w(x), in ogni elemento piccolo ma continuo, viene

approssimato con un numero finito di parametri utilizzando la (2.24). Ne consegue, nell'ipotesi di Kirchoff, la rotazione $\theta(x) = -\partial w/\partial x$;

d)-che i parametri con cui esprimere lo spostamento w(x) sono gli spostamenti e le rotazioni ai nodi dell'elemento;

e)-che il carico distribuito q(x) è ad un sistema di forze e momenti concentrati ed applicati solo ai nodi.

I passi c),d),e) fanno sì che un elemento continuo sia modellizzato in termini discreti. Il modello discreto dell'elemento è detto *elemento finito*.

Con questa serie di ipotesi si realizza un modello approssimato del comportamento della struttura. L'importante è fissare i criteri con cui si effettua la "discretizzazione" e capire il tipo e l'ordine di approssimazione introdotto. Questo consente di poter raffinare il modello fino a tendere alla soluzione esatta del problema.

Vediamo i vari passi da fare in generale per arrivare al modello "discreto".

1)–Innanzi tutto la struttura reale, continua, viene idealmente tagliata da superfici e linee in modo da pensarla costituita da elementi. I punti estremi o di spigolo dell'elemento sono i "nodi".

2)–Si identifica il comportamento di ogni elemento (o classe di elementi) della struttura con il comportamento di un elemento tipico nell'ambito di una certa teoria dell'elasticità. Si avranno così elementi tipo asta, trave, ... In funzione del tipo di elemento si individuano le variabili cinematiche, che indicheremo genericamente come vettore "spostamento" {S(x,y,z)}, le variabili di "deformazione" { $\epsilon(x,y,z)$ } e di "sforzo" { $\sigma(x,y,z)$ }¹.

3)–Si discretizza il comportamento dell'elemento rappresentando le variabili cinematiche {S} attraverso un numero discreto di parametri, definiti solo ed unicamente ai nodi. Tali parametri { Δ } sono indicati come "spostamenti nodali". Il numero *g* delle componenti il vettore { Δ }, indica il numero di variabili con cui è discretizzato l'elemento e diremo che l'elemento finito (E.F.) possiede *g* "gradi di libertà (G.L.)". Quindi:

(4.1)
$$\{S(x,y,z)\} = [N(x,y,z)] \{\Delta\}$$

Ovviamente la (4.1) può risultare esatta solo nel caso di analisi statica e per elementi che siano connessi ad altri in un numero discreto di punti. Nel caso generale di elemento unito con continuità a quelli circostanti e di analisi dinamica la (4.1) rappresenta solo una espressione approssimata degli spostamenti. La matrice [N] è l'insieme delle funzioni che consente di esprimere, punto per punto, lo spostamento all'interno dell'elemento in funzione di { Δ }. Possiamo quindi pensare ed indicare le componenti di [N(x,y,z)] come funzioni di interpolazione degli spostamenti nodali.

4)–Esprimere le deformazioni in termini degli spostamenti nodali. Ricordando le relazioni cinematiche, che legano le deformazioni agli spostamenti ed utilizzando le (4.1):

(4.2) $\{\varepsilon\} = \left[B(x, y, z)\right] \{\Delta\}$

¹ Si noti: 1)-{S},{ ϵ },{ σ } sono funzioni di x,y,z, cioè l'elemento è ancora un continuo;

²⁾⁻i nomi di tali vettori sono posti tra "" ad indicare che non sempre le dimensioni fisiche corrispondono al nome.

5)–Attraverso i legami costitutivi del materiale possiamo esprimere gli sforzi in termini di $\{\Delta\}$:

(4.3)
$$\{\sigma\} = [\mathbf{C}]\{\varepsilon\} = [\mathbf{C}][\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})]\{\Delta\}$$

6)–Si esprimono le forze elastiche in termini degli spostamenti nodali $\{\Delta\}$. A tale scopo si possono impiegare varie tecniche: minimizzazione dell'energia elastica, principio dei lavori virtuali, equazioni di Lagrange... Per la sua completa generalità e possibilità di utilizzo indipendentemente dalla natura delle forze in esame utilizziamo il principio dei lavori virtuali, per cui il lavoro virtuale delle forze elastiche risulta:

(4.4)
$$\delta \mathbf{L} = \int_{\mathbf{V}} \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{\sigma}\} d\mathbf{V}$$

che, ricordando le (4.2,3), si scrive:

(4.5)
$$\delta \mathbf{L} = \{\delta \Delta\}^{\mathrm{T}} \left[\int_{\mathbf{V}} [\mathbf{B}]^{\mathrm{T}} [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] d\mathbf{V} \right] \{\Delta\} = \{\delta \Delta\}^{\mathrm{T}} [\mathbf{K}] \{\Delta\}$$

avendo indicato con [K] la matrice di rigidezza:

(4.6)
$$[K] = \int_{V} [B]^{T} [C] [B] dV$$

Pertanto le forze elastiche sono espresse come:

(4.7)
$$\left[\mathbf{F}_{\mathrm{E}} \right] = \left[\mathbf{K} \right] \left\{ \Delta \right\}$$

Si noti come per ottenere la (4.6) si siano utilizzate sia le relazioni cinematiche che quelle costitutive. Inoltre, integrando su tutto il volume, nella [K] compaiono anche le dimensioni geometriche oltre ai moduli elastici del materiale con cui è realizzato l'elemento.

7)-Si concentrano ai nodi le eventuali forze distribuite.

Le forze (generalizzate), sia esterne che quelle dovute alle reazioni vincolari, che risultano concentrate in alcuni punti, non meritano una particolare analisi. Infatti possiamo sempre assumere i punti dove le forze sono applicate come nodi della struttura; in caso di forze distribuite, queste vanno opportunamente riportate come carichi concentrati applicati ai nodi.

Invece nel caso di forze (generalizzate) distribuite, si deve provvedere a sostituirle con un sistema di forze (generalizzate) staticamente equivalente

applicato ai nodi. Chiaramente maggiore è il numero di nodi scelti, più accurata è l'analisi ma maggiore il lavoro da eseguire. Una tale discretizzazione può prescindere dalla (4.1) ma in una ottica più rigorosa nell'ambito della teoria degli E.F. è opportuno che anche la "discretizzazione" dei carichi segua la stessa logica seguita per valutare la (4.6). In quest'ultimo caso si parla di matrice dei carichi "consistente".

Un modo semplice ma efficace per trovare il sistema di forze nodali consistente è quello di imporre che il lavoro virtuale delle forze ai nodi sia uguale al lavoro virtuale delle forze realmente applicate.

Nel caso generale di forze per unità di volume $\{f_V\}$, forze per unità di superficie $\{f_S\}$, e forze concentrate ai nodi $\{f_N\}$, si scrive:

(4.8)
$$\int_{V} \{\delta S\}^{T} \{f_{V}\} dV + \int_{A} \{\delta \overline{S}\}^{T} \{f_{S}\} dA + \{\delta \Delta\}^{T} \{f_{N}\} = \{\delta \Delta\}^{T} \{F\}$$

8)–Si scrive l'equazione di equilibrio dell'elemento. A tal fine è sufficiente uguagliare il lavoro virtuale delle forze interne espresso dalla (4.5) a quello delle forze esterne espresso dalla (4.8):

(4.9)
$$\{\delta\Delta\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}]\{\Delta\} = \{\delta\Delta\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{F}\}$$

che, dovendo valere per qualsiasi $\{\delta\Delta\}\neq 0$ porta alla classica relazione:

(4.10)
$$[K]{\Delta} = {F}$$

5. Requisiti dell'Elemento Finito

Nei vari passi precedentemente esposti abbiamo sicuramente soddisfatto, avendole impiegate, alcune delle relazioni fondamentali alla base della teoria dell'elasticità, quali:

– Le relazioni cinematiche (4.2).

– I legami costitutivi (4.3).

– Le condizioni (4.9) che garantiscono l'equilibrio.

Inoltre abbiamo tenuto conto della geometria dell'elemento integrando su tutto il volume dello stesso.

Il tutto partendo con l'assumere il campo degli "spostamenti" nella forma (4.1), dove niente si è detto circa la scelta delle funzioni interpolanti [N]. Sempre nell'ambito della teoria dell'elasticità, gli spostamenti devono risultare continui e derivabili. Pertanto la [N(x,y,z)] deve essere scelta in modo da garantire spostamenti $\{S(x,y,z)\}$ continui in ogni punto dell'elemento, contorno compreso.

Altri requisiti imposti alle funzioni interpolanti derivano dal garantire che nel processo di discretizzazione non vengano perse alcune caratteristiche proprie del continuo. Solo in tale caso si è garantiti che aumentando il numero di G.L. la struttura tende nuovamente al continuo e la soluzione tende alla soluzione esatta.

Per avere convergenza monotona, l'elemento finito deve risultare *completo e compatibile*. Proprietà che possono essere garantite solo attraverso una idonea scelta delle funzioni interpolanti [N].

A–Un elemento gode della proprietà di completezza se soddisfa ai due seguenti requisiti:

A1. Capacità di compiere "spostamenti" rigidi.

La necessità di una tale proprietà è evidente dalla figura che riporta una trave prima e dopo la deformazione conseguente all'applicazione del carico P.



Tutti gli elementi, indipendentemente dal

fatto che subiscano deformazioni a seguito della sollecitazione, devono poter seguire il moto derivante da chi li precede e/o segue. A tali moti rigidi negli elementi 1,2,3,4 si vanno a sommare quelli conseguenti allo stato di sollecitazione. Gli elementi 5,6,7, pur non sollecitati, traslano e ruotano rigidamente.

Il numero dei modi rigidi possibili per un elemento può essere analizzato attraverso l'analisi degli autovalori della relativa matrice di rigidezza:

$$(5.1) \qquad [K]{X} = \lambda{X}$$

da cui, indicando con [W], la matrice degli autovettori e $[\Lambda]$ la corrispondente matrice diagonale degli autovalori:

$$(5.2) \qquad \qquad [W]^{T}[K][W] = [\Lambda]$$

pertanto possiamo interpretare l'autovalore come la rigidezza generalizzata relativa al corrispondente autovettore. In altri termini λ_1 , λ_2 , ..., indica quanto è rigido l'elemento nel modo corrispondente. Qualora si abbia $\lambda=0$, la rigidezza corrispondente è nulla e quindi la struttura si muove rigidamente. La trasformazione (5.2) consente pertanto di individuare i modi rigidi rispetto a quelli di deformazione elastica.

A2. Capacità di garantire uno stato di deformazione costante al tendere a zero delle dimensioni dell'E.F. Infatti lo stato di deformazione di un elemento che tende a zero tende a diventare costante e poichè un elemento finito può essere piccolo quanto si desidera, nella sua rappresentazione discreta deve essere implicita tale capacità.

B–Un elemento gode della proprietà di compatibilità se gli "spostamenti" sono continui non solo al suo interno ma anche al suo contorno, ovvero lungo i bordi di elementi contigui.

Fisicamente la condizione di compatibilità garantisce che non vi siano lacerazioni e/o compenetrazioni tra elementi contigui una volta assemblati.

La compatibilità è automaticamente soddisfatta tra elementi aste e travi, dal momento che sono uniti solo ai nodi dove si impone l'uguaglianza degli "spostamenti" tra elementi che convergono sullo stesso nodo.

Nel caso di elementi nello stato di sollecitazione o deformazione piana, elementi di lastra piana, elementi tridimensionali in cui le componenti di $\{S\}$ sono u,v,w, la continuità è assicurata assumendo [N] lineare in x,y,z.

Più difficile è garantire la compatibilità per elementi non monodimensionali soggetti a flessione, dove in [N] compaiono termini nelle potenze di x,y,z.

Un modo di procedere per ottenere delle [N] che garantiscono i requisiti indicati in A,B è di scegliere le [S(x,y,z)] come combinazione lineare di funzioni $[\Phi(x,y,z)]$ continue e derivabili.

Una classe di funzioni $\Phi(x,y,z)$ molto utilizzate sono i polinomi, che sono funzioni continue e facilmente differenziabili.

Indichiamo con {A} il vettore dei coefficienti della combinazione lineare:

(5.3)
$$\{S(x,y,z)\} = [\Phi(x,y,z)]\{A\}$$

Tali coefficienti incogniti sono scelti in numero pari ai gradi di libertà g dell'elemento, per cui il vettore {A} ha le stesse dimensioni del vettore { Δ }.

I coefficienti {A} possono essere espressi in termini degli spostamenti nodali ricordando che ai nodi deve risultare $\{S\}_n = \{\Delta\}$, quindi:

(5.4)
$$[\Phi(x_n, y_n, z_n)]\{A\} = \{\Delta\}$$

da cui:

(5.5)
$$\{A\} = [\Phi(x_n, y_n, z_n)]^{-1} \{\Delta\}$$

pertanto i coefficienti del polinomio non rappresentano uno spostamento fisico ma una combinazione lineare dei reali spostamenti nodali e per questo sono indicati come *coordinate generalizzate*.

Elementi finiti la cui formulazione è basata assumendo per gli spostamenti espressioni che sono funzioni di coefficienti incogniti considerati come coordinate generalizzate sono detti modelli finiti in coordinate generalizzate.

Sostituendo la (5.5) nella (5.3):

(5.6)
$$\{S\} = [\Phi(x,y,z)] [\Phi(x_n,y_n,z_n)]^{-1} \{\Delta\} = [(N(x,y,z)] \{\Delta\}$$

ovvero la (4.1). Ovviamente, oltre ai polinomi possono essere usate altre funzioni, impiegando la stessa tecnica.

6. Elemento finito di asta

Per l'asta si ha:

- lo spostamento:

$$(6.1) \qquad \{S(x)\} \Rightarrow u(x)$$

- la deformazione:

(6.2)
$$\{\epsilon(\mathbf{x})\} \Rightarrow \epsilon_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$$

– lo sforzo:

(6.3)
$$\{\sigma(x)\} \Rightarrow \sigma_x(x)$$

L'elemento finito è quello di figura a due G.L., per cui lo spostamento (6.1) può essere approssimato con un polinomio in due soli parametri:



$$(6.4) \qquad \qquad \{S(x)\} \Rightarrow \ u(x) = a_1 + a_2 x$$

ovvero, in forma matriciale:

(6.5)
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left\{ 1 \mid \mathbf{x} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{matrix} \right\}$$

Imponendo le (5.4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

che sostituita nella (6.5):

(6.6)
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{L} \left\{ 1 \quad \mathbf{x} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{\mathbf{x}}{L} \right) \Delta_1 + \frac{\mathbf{x}}{L} \Delta_2$$

Poichè:

(6.7)
$$\{\varepsilon\} \Longrightarrow \varepsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{L} \{-1 \ 1\} \{ \begin{array}{c} \Delta_{1} \\ \Delta_{2} \\ \end{array} \}$$

per cui, confrontata con la (4.2):

(6.8)
$$\{B\} = \frac{1}{L} \{-1 \ 1\}$$

Dalla Tabella 2 si ha che [C]=E, quindi applicando la (4.6):

(6.9)
$$[K] = \frac{EA}{L^2} \int_0^L { \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}} { \{ -1 \ 1 \}} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il lettore può constatare che l'E.F. di asta è:

–completo, dal momento che è consentito il moto rigido di traslazione (presenza del termine a_1 nella (6.4)) ed indipendentemente dalla dimensioni la deformazione è costante;

-compatibile, perchè unito ad altri solo ai nodi dove è definito lo spostamento.

7. Elemento finito di trave inflessa

Per la trave inflessa si ha:

- le variabili cinematiche del moto sono spostamento e rotazione, quindi il vettore "spostamento" risulta:

(7.1)
$$\left\{ \mathbf{S}(\mathbf{x},\mathbf{z}) \right\} = \begin{cases} \mathbf{w} \\ \mathbf{\theta} \end{cases}$$

– la deformazione conseguente è la curvatura:

(7.2)
$$\{\epsilon(\mathbf{x})\} \Rightarrow \partial^2 \mathbf{w} / \partial \mathbf{x}^2$$

– lo sforzo è il momento:

(7.3)
$$\{\sigma(x)\} \Rightarrow M_x(x)$$

L'elemento finito è quello di figura a quattro G.L. Considerando valide l'ipotesi di Kirchoff per cui la rotazione è

la derivata dello spostamento, lo spostamento w può essere approssimato con un polinomio con quattro coordinate generalizzate:

(7.4)
$$w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3; \theta = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

ovvero, in forma matriciale:

(7.5)
$$\begin{cases} \mathbf{w}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{\theta}(\mathbf{x}) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} & \mathbf{x}^2 & \mathbf{x}^3 \\ 0 & 1 & 2\mathbf{x} & 3\mathbf{x}^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{cases}$$

Imponendo le (5.4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^{2} & L^{3} \\ 0 & 1 & 2L & 3L^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1} \\ a_{2} \\ a_{3} \\ a_{4} \end{bmatrix} = \begin{cases} w_{1} \\ \theta_{1} \\ w_{2} \\ \theta_{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{1} \\ a_{2} \\ a_{3} \\ a_{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^{3}} \begin{bmatrix} L^{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^{3} & 0 & 0 \\ -3L & -2L^{2} & 3L & -L^{2} \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1} \\ \theta_{1} \\ w_{2} \\ \theta_{2} \end{bmatrix}$$

che sostituita nella (7.5):

(7.6)
$$\begin{cases} \mathbf{w} \\ \mathbf{\theta} \end{cases} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} & \mathbf{x}^2 & \mathbf{x}^3 \\ 0 & 1 & 2\mathbf{x} & 3\mathbf{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{\theta}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Poichè:

$$(7.7) \{ \varepsilon \} \Rightarrow \varepsilon_{x} = \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} = \frac{1}{L^{3}} \{ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x \} \begin{bmatrix} L^{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^{3} & 0 & 0 \\ -3L & -2L^{2} & 3L & -L^{2} \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1} \\ \theta_{1} \\ \\ w_{2} \\ \theta_{2} \end{bmatrix}$$

per cui, confrontata con la (4.2):

(7.8) {B} =
$$\frac{1}{L^3} \left\{ -6L + 12x; -4L^2 + 6Lx; 6L - 12x; -2L^2 + 6Lx \right\}$$

Dalla Tabella 2 si ha che per la trave inflessa [C]=EI, quindi applicando la (4.6) si ottiene la (2.29).

Il lettore può constatare che l'E.F. di trave è:

-*completo*, dal momento che è consentito il moto rigido di traslazione (presenza del termine a_1) e di rotazione (presenza del termine a_2) ed per L \rightarrow 0 la deformazione (7.7) risulta costante;

-compatibile, perchè unito ad altri solo ai nodi dove è definito lo spostamento e la rotazione.

BIBLIOGRFIA

- [1] Courant, "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations" Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, 1943, pp.1-23.
- [2] R.Courant and D.Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1953.
- [3] J.L.Synge, "The Hypercircle in Mathematical Physics", Cambridge University Press, London, 1957.
- [4] S.G.Mikhlin, "Variational Methods in Mathematical Physics", Pergamon Press, Inc., Elmsford, N.Y., 1964.
- [5] M.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martin, and L.J.Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", Journal of Aeronautical Science, Vol. 23, 1956, pp. 805-823.
- [6] J.H.Argyris and S.Kelsey, "Energy Theorems and Structural Analysis", Aircraft Engineering, Vols. 26 and 27, 1955.
- [7] W.Clough, "The Finite Element in Plane Stress Analysis", Proceedings, 2nd A.S.C.E. Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
- [8] O.C.Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y., 1977.
- [9] J.S.Przemieniecki, Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, N.Y., 1968.