

CAPITOLO X

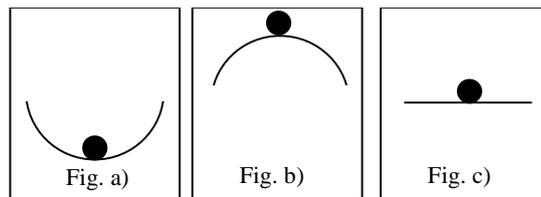
STABILITA' DEI SISTEMI ELASTICI

1. Introduzione

La parola stabilità è usata quasi quotidianamente ed in settori non necessariamente della fisica. Così si parla di stabilità o instabilità politica, economica... basandosi sul concetto intuitivo che un sistema è stabile se non subisce sostanziali alterazioni a seguito di fattori perturbativi.

Nell'ambito della meccanica dei corpi rigidi, il concetto di stabilità è spesso associato a considerazioni di carattere geometrico, legate alla posizione del centro di gravità. Così un pendolo, soggetto alla forza di gravità, risulta stabile o instabile a seconda che il punto in cui è fissato risulti sopra o sotto il proprio baricentro. Nel caso in cui il punto di sospensione coincida con il baricentro si ha il caso limite di equilibrio "neutro": il pendolo soggetto ad un piccolo disturbo perde la posizione originaria ma si mantiene "vicino" ad essa.

Più generale del criterio geometrico, è il criterio cinematico che esamina il moto del corpo. Criterio peraltro, anch'esso familiare nella meccanica dei corpi rigidi. Consideriamo i casi di figura:



–nel caso di figura a), a seguito di una perturbazione, la pallina ritorna nella posizione iniziale;

–nel caso di figura b), a seguito di una perturbazione, la pallina si allontana dalla posizione iniziale;

–nel caso di figura c), a seguito di una perturbazione, la pallina subisce uno spostamento finito.

Pertanto, si dice che *la posizione di equilibrio* della pallina è:

- stabile** nel caso a) poiché tale posizione è mantenuta,
- instabile** nel caso b) poiché tale posizione è irrimediabilmente perduta,
- indifferente** nel caso c) poiché la pallina rimane in un intorno dell'ordine di grandezza della perturbazione.

Purtroppo tali definizioni non riescono sempre a caratterizzare in termini sufficientemente esaustivi il comportamento di un sistema.

Così nell'esempio di figura, la posizione A risulta stabile solo se la perturbazione data è sufficientemente piccola, per perturbazioni maggiori la stessa posizione risulterebbe instabile. Occorre quindi precisare l'entità della perturbazione per capire se il sistema è stabile "localmente o in piccolo" o è stabile "globalmente o in grande".



Se poi consideriamo il classico sistema massa-molla, il sistema una volta perturbato oscilla con moto armonico, per cui la posizione di equilibrio non è mantenuta né mai riassunta né ci si allontana indefinitamente da essa.

Infine nella pratica è di fondamentale interesse sapere anche se, a seguito della perturbazione, si ritorna o meno nella posizione di equilibrio iniziale.

In queste note ci limitiamo a richiamare alcuni concetti fondamentali ed alcune definizioni classiche soprattutto nell'ottica delle applicazioni nel settore della stabilità delle costruzioni aerospaziali.

2. Stabilità secondo Liapunov

Consideriamo un sistema definito dal sistema di N equazioni differenziali:

$$(2.1) \quad \dot{Y}(t) = F(Y(t), t)$$

con le condizioni iniziali:

$$(2.2) \quad Y(t_0) = Y_0^*$$

Se si indica come soluzione non perturbata $Y^*(t)$, la soluzione del sistema (2.1,2) e soluzione perturbata $Y(t)$ la soluzione del sistema (2.1) con le condizioni iniziali:

$$(3.3) \quad Y(t_0) = Y_0^* + \eta_0$$

1)–Il moto non perturbato Y^* è detto *stabile* se comunque si fissi un $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tale che per:

$$(2.4) \quad \|\eta_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$$

risulti, per qualsiasi $t > t_0$:

$$(2.5) \quad \|Y(t) - Y^*(t)\| < \varepsilon$$

2)–Il moto non perturbato Y^* è detto *asintoticamente stabile* se, oltre a risultare stabile, è anche tale che:

$$(2.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|Y - Y^*\| = 0$$

3)–Il moto non perturbato $\{Y^*\}$ è detto *instabile* se per un $\delta > 0$ arbitrariamente piccolo per cui ad un dato istante:

$$(2.7) \quad \|\eta_0\| < \delta$$

corrisponde un altro istante t_1 tale che:

$$(2.8) \quad \|Y - Y^*\| > \varepsilon \text{ per } t_0 < t_1 < \infty$$

In altri termini moto non perturbato è detto instabile se non è stabile.

3. Stabilità di un punto d'equilibrio

Un problema di stabilità è in genere ricondotto all'esame della stabilità di una posizione di equilibrio che, con una opportuna trasformazione, può identificarsi con l'origine. Infatti ponendo:

$$(3.1) \quad Y = Y^* - X$$

il sistema (2.1) si scrive:

$$(3.2) \quad \dot{X} = F[X + Y^*, t] - \dot{Y}^* = f(X, t)$$

che ha come soluzione $X=0$. Studiare le proprietà del moto non perturbato equivalente quindi a studiare le proprietà dell'origine.

In termini generali indichiamo come *punto di equilibrio*¹ una soluzione costante con il tempo. Un punto di equilibrio viene poi detto *isolato* se c'è una sola soluzione costante nelle sue vicinanze.

Per esaminare le proprietà di un punto di equilibrio $X=0$, perturbiamo il sistema. Questo significa risolvere il sistema (3.2) con le condizioni:

$$(3.3) \quad X(t_0) = X_0$$

A seconda del tipo di soluzione, si ha la seguente classificazione di un punto di equilibrio:

¹ Detto anche punto singolare o punto di stazionarietà.

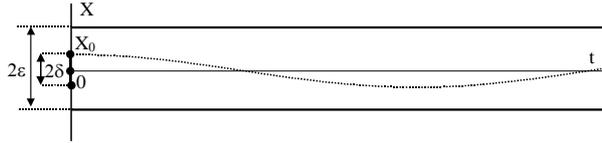
1)–Un punto di equilibrio è detto stabile se comunque si fissi un $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tale che per:

$$(3.4) \quad \|X_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$$

per qualsiasi $t > t_0$ risulti:

$$(3.5) \quad \|X(t)\| < \varepsilon$$

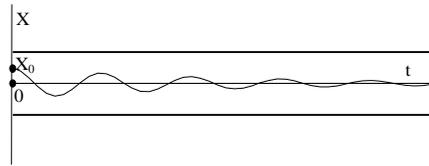
Alla proprietà di stabilità si può dare una immediata interpretazione geometrica. Consideriamo la soluzione $X(t)$ come una curva nello spazio ad $(N+1)$ dimensioni X, t . La disuguaglianza (3.5) fissa una superficie cilindrica di raggio ε intorno all'asse t e la disuguaglianza (3.4) un insieme di punti nell'iperpiano $t=t_0$.



Affinché il moto sia stabile tutte le soluzioni che originano da punti dell'iperpiano sufficientemente vicini a t_0 devono rimanere all'interno della superficie cilindrica. Ne consegue che, se un moto è stabile per perturbazioni date in t_0 , è stabile anche per perturbazioni date in un generico punto $t_n > t_0$, anche se è necessario un diverso valore di δ poiché $\delta = \delta(\varepsilon, t_n)$. Qualora δ non dipende da t ma risulta $\delta = \delta(\varepsilon)$ la stabilità è detta *uniforme*. Se poi δ non risulta funzione neppure di ε , la stabilità è una proprietà che non dipende dall'intensità della perturbazione e viene detta *globale*.

2)–Un punto di equilibrio isolato è detto asintoticamente stabile se è stabile ed è tale che:

$$(3.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0$$



Anche in questo caso l'interpretazione geometrica è immediata ed evidente in figura.

3)–Un punto di equilibrio è detto instabile se per un arbitrariamente piccolo $\delta > 0$ ed un generico istante t_0 nel quale

$$(3.7) \quad \|X_0\| < \delta$$

si ha un altro istante t_1 dove:

$$(3.8) \quad \|X(t)\| > \varepsilon \text{ per } t_0 < t_1 < \infty$$

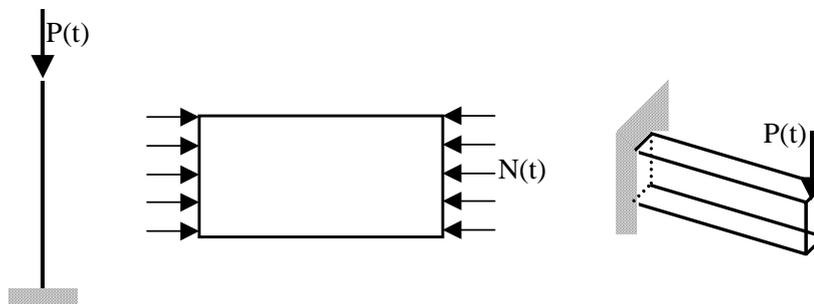
In altri termini una posizione di equilibrio è instabile se non è stabile.

4. Stabilità dei sistemi elastici

Una struttura soggetta ad uno stato di sollecitazione può presentare un comportamento che non garantisce la sua integrità e/o funzionalità anche perché la posizione di equilibrio statica acquisita risulta instabile. In questo caso infatti, anche se la deformata all'equilibrio garantisce l'integrità della struttura, l'ampiezza della deformazione crescerebbe indefinitamente provocando il collasso della struttura.

Una possibile classificazione dei problemi di stabilità elastica può essere fatta distinguendoli in due grandi classi:

A)–Problemi di stabilità dinamica in cui le sollecitazioni sono di natura dinamica ed in particolare periodiche del tipo mostrato in figura.



Nel caso della trave, per determinati valori del carico $P(t)$ la struttura è soggetta solo a vibrazioni assiali, mentre per altri valori di $P(t)$ possono innescarsi delle vibrazioni trasversali. Lo studio delle zone di stabilità al variare di $P(t)$ in intensità e frequenza ricade nel campo dell'analisi della stabilità dinamica.

Anche nel caso della piastra, forze periodiche nel piano possono eccitare vibrazioni flessionali.

Infine forze periodiche applicate trasversalmente ad una trave di piccola sezione trasversale possono eccitare, sotto determinate condizioni, vibrazioni flesso-torsionali.

In queste note, tali problemi non vengono presi in considerazione.

B)–Problemi di stabilità statica: in cui le sollecitazioni sono considerate costanti nel tempo. Il problema consiste nel determinare il valore della sollecitazione che induce instabilità delle possibili posizioni di equilibrio (statico).

Lo studio della *stabilità di una posizione di equilibrio (statico)* in campo strutturale è condotta attraverso due distinti tipi di analisi:

B1)–Calcolo della sollecitazione critica. E' la ricerca dei valori della sollecitazione, o dei valori di parametri caratteristici della sollecitazione, per i quali una posizione di equilibrio da stabile diviene instabile.

Una tale analisi viene condotta attraverso i seguenti passi:

a)–determinando le posizioni di equilibrio della struttura soggetta alla sollecitazione assegnata;

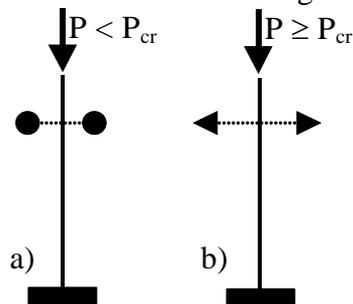
b)–perturbando la e/o le posizioni di equilibrio trovate, “linearizzando” il problema intorno alla posizione di equilibrio e studiando il moto che ne consegue. Per certi tipi di sollecitazione il moto dipende dall’intensità del carico: indicheremo come *parametro critico* il valore più piccolo del parametro di sollecitazione per il quale il moto da stabile diventa instabile.

Un classico esempio è quello della trave in posizione verticale di figura soggetta a un carico P di compressione:

1)–la posizione di equilibrio è $w_0=0$;

2)–si perturba il sistema e si studia il moto “perturbato” ovvero le piccole oscillazioni nell’intorno della posizione di equilibrio.

2a)–Per valori del carico $P < P_{cr}$ (fig. a), la struttura oscilla intorno alla posizione di equilibrio che pertanto risulta stabile.



2b)–Per valori del carico $P \geq P_{cr}$ (fig. b), la struttura oscilla con ampiezze che crescono nel tempo ed il moto risulta pertanto instabile.

Il moto quindi dipende dall’intensità del carico e la sua ampiezza¹ massima rimane dell’ordine della perturbazione fino ad un certo valore del carico ($P < P_{cr}$) dopo il quale ($P > P_{cr}$) il moto diventa amplificato.

B2)–Studio del comportamento post–critico. Il modello linearizzato è utilizzabile per $P < P_{cr}$ ed il moto è nell’intorno della posizione di equilibrio. Per $P > P_{cr}$ le ampiezze crescono, la linearizzazione non è più accettabile e si deve utilizzare il modello non linearizzato.

Nello studio post-critico si determina in ogni caso la deformata² al variare del carico e se lo stato di tensione e/o di deformazione conseguente implica o meno il collasso della struttura.

¹ Se si tenesse conto degli smorzamenti, del materiale, dell’aria, ..., le oscillazioni risulterebbero smorzate e la stabilità risulterebbe asintotica secondo Lyapunov.

² Un problema omogeneo non lineare non è più un problema di autovalori potendo avere, oltre la soluzione banale, anche soluzioni non identicamente nulle.

In generale le due suddette analisi B1), B2) richiedono lo studio del moto e quindi la presenza delle forze d'inerzia. Tuttavia per i sistemi di forze conservative, per il principio del minimo dell'energia potenziale, l'analisi di stabilità può essere condotta attraverso la semplice analisi statica.

Indicheremo come *criterio dinamico* quello in cui la determinazione del carico critico è fatta tenendo in conto le forze d'inerzia.

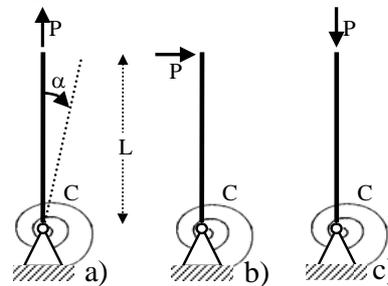
Indicheremo come *criterio statico* quello in cui la valutazione della stabilità è fatta senza tenere in conto le forze d'inerzia.

In questo capitolo viene affrontato il problema B1) della ricerca del carico critico, rinviando al successivo l'analisi del comportamento post-critico.

5. Sistema ad un grado di libertà con molla torsionale

Si consideri il sistema elastico ad un solo grado di libertà α di figura, costituito da un'asta rigida di lunghezza L incernierata ad un estremo, dove è presente la molla di rigidità torsionale C .

Per la ricerca dell'eventuale P_{cr} verrà impiegato dapprima il criterio più generale, quello dinamico. Una volta accertata l'applicabilità del criterio statico si impiegano vari metodi di analisi statica per determinare l'eventuale carico critico.



5.1. Criterio Dinamico.

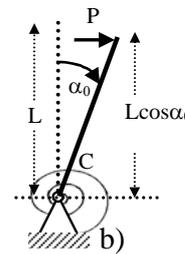
1)–Si determina la posizione di equilibrio α_0 imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto ad un generico polo, ad esempio rispetto alla cerniera.

Nei casi a), c) il momento rispetto la cerniera della forza P è nullo, quindi:

$$(5.1.1) \quad \alpha_0 = 0$$

Nel caso b):

$$(5.1.2) \quad C\alpha_0 = PL \cos \alpha_0$$



2)–Si perturba il sistema in equilibrio dando una “piccola” variazione α^* :

$$(5.1.3) \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha^*$$

dove α^* è considerata “piccola” nel senso che:

$$(5.1.4) \quad \text{sen} \alpha^* = \alpha^* - \frac{\alpha^{*3}}{3!} + \frac{\alpha^{*5}}{5!} \dots \cong \alpha^* ; \quad \text{cos} \alpha^* = 1 - \frac{\alpha^{*2}}{2!} + \frac{\alpha^{*4}}{4!} \dots \cong 1$$

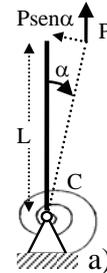
e si studia il moto del sistema perturbato, ovvero per i tre differenti casi:

Caso a)–Trazione: l’equilibrio dinamico, per la (5.1.4), è:

$$(5.1.5) \quad J\ddot{\alpha} + C\alpha + PL\text{sen} \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\alpha}^* + (C + PL)\alpha^* = 0$$

Risultando il termine in parentesi positivo possiamo porre $(C+PL)/J=\omega^2$, e scrivere la soluzione della (5.1.6):

$$(5.1.6) \quad \alpha^* = c_1 e^{j\omega t} + c_2 e^{-j\omega t} = A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t$$



che descrive un moto armonico intorno alla posizione di equilibrio; il sistema risulta quindi stabile per qualsiasi valore del carico P.

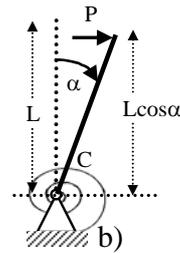
Caso b)–Carico laterale: l’equilibrio dinamico si scrive:

$$(5.1.7) \quad J\ddot{\alpha}^* + C(\alpha_0 + \alpha^*) = PL \cos(\alpha_0 + \alpha^*)$$

ovvero, ricordando la (5.1.2) e le (5.1.4,5):

$$(5.1.8) \quad J\ddot{\alpha}^* + (C + PL \text{sen} \alpha_0)\alpha^* = 0$$

la cui soluzione ponendo $(C+PL \text{sen} \alpha_0)/J=\omega^2$, è ancora la (5.1.6); il sistema risulta quindi stabile per qualsiasi valore del carico P.



Caso c)–Compressione: vale la (5.1.6) cambiando segno a P:

$$(5.1.9) \quad J\ddot{\alpha}^* + (C - PL)\alpha^* = 0$$

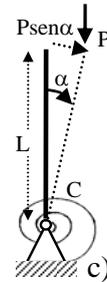
il termine in parentesi $(C-PL)$ risulta:

c1)–positivo per $PL < C$, nel qual caso il sistema è stabile;

c2)–nullo per $PL=C$ e la soluzione della (5.1.9) si scrive:

$$(5.1.10) \quad \alpha^* = c_1 + c_2 t$$

il moto è un moto amplificato; quindi sistema instabile. Si nota peraltro che quando $PL=C$ dalla (5.1.9) $J\ddot{\alpha}^* = 0$ ovvero le forze d’inerzia sono nulle.



c3)–negativo per $PL > C$. Ponendo $C-PL = -\zeta^2$ la (5.1.9) si scrive:

$$(5.1.11) \quad J\ddot{\alpha}^* - \zeta^2 \alpha^* = 0$$

la cui soluzione risulta:

$$(5.1.12) \quad \alpha^* = c_1 e^{\zeta t} + c_2 e^{-\zeta t} = A \cosh(\zeta t) + A \sinh(\zeta t)$$

il moto è quindi un moto amplificato che porta il sistema ad allontanarsi dalla posizione di equilibrio; quindi sistema instabile. Il valore più piccolo del carico per cui si ha instabilità, è indicato come carico critico e risulta:

$$(5.1.13) \quad P_{cr} = \frac{C}{L}$$

Sulla base dei tre casi esaminati possiamo fare le seguenti considerazioni:

- 1) Innanzitutto si *trovano le posizioni di equilibrio* α_0 .
- 2) Si perturba il sistema intorno alle posizioni di equilibrio; questo equivale a dare una piccola variazione α^* rispetto alla posizione di equilibrio α_0 e *scrivere l'equazione di equilibrio nella configurazione deformata*.
- 3) Il carico P è inteso come un parametro in funzione del quale varia il moto del sistema. Quindi possiamo definire “*carico critico il più piccolo valore finito del carico applicato al di sopra del quale il moto si amplifica*”.
- 4) Notiamo che ora a differenza di quanto avveniva nei problemi di risposta statica, in cui il carico laterale q compariva come termine noto, per cui l'equazione di equilibrio risultava non omogenea, *le equazioni perturbate (5.1.5,8,9) risultano omogenee* e questo per due ragioni:
 - a)–le (5.1.5,8,9) sono espresse in termini della perturbazione α^* ;
 - b)–il “carico” cui è soggetta l'asta non è “ P ” ma il momento “ $PL\alpha$ ” che dipende dalla deformazione α .

I casi esposti sono quindi ricondotti allo studio delle piccole oscillazioni libere di un problema formalmente equivalente al sistema massa–molla, salvo che ora il sistema presenta una “rigidezza equivalente” ($C-PL$) che è funzione del carico. Rigidezza questa che all'aumentare del carico:

- aumenta nei casi a), b);
- diminuisce fino ad annullarsi nel caso c) di carico di compressione. Nel qual caso, fin quando la rigidezza equivalente è positiva, il sistema ha ancora capacità di sostenere il carico e si mantiene nell'intorno della configurazione di equilibrio; quando la rigidezza equivalente è nulla il sistema non è più in grado di reggere il carico e diventa instabile.

5) Dei tre tipi di carico esaminati quello che induce instabilità nel sistema è solo il carico di compressione. In questo caso:

5a) si ha instabilità quando il carico P supera un certo determinato valore che dipende dalle caratteristiche elastiche e geometriche del sistema (nel caso specifico dalla rigidezza C e lunghezza L), oltre naturalmente che dal tipo di vincolo implicito nell'equazione di equilibrio;

5b) partendo da $P=0$, all'aumentare di P , la frequenza di oscillazione ω decresce ed è uguale a zero quando il carico raggiunge il valore critico. Poiché le forze di inerzia sono proporzionali alla frequenza, queste sono nulle quando $\omega=0$. In altri termini il P_{cr} non è influenzato dalla presenza delle forze d'inerzia, quindi per l'analisi della stabilità del sistema si possono *non tenere in conto*¹ le forze d'inerzia ed usare il criterio statico²;

5c) quando $P > P_{cr}$, considerata l'amplificazione del moto, non sono più valide le approssimazioni (5.1.4) ed il conseguente modello linearizzato.

5.2. Criterio statico

La considerazione 5b) precedente evidenzia che il P_{cr} non dipende dalle forze di inerzia. Questo consente di semplificare la ricerca del carico critico studiando il problema dal punto di vista statico; in questo caso, la ricerca del P_{cr} può essere indifferentemente condotto con uno dei seguenti metodi:

A)–Metodo energetico: per sistemi conservativi vale il principio per cui una posizione di equilibrio è stabile (instabile) se, in detta posizione, la derivata seconda dell'energia è positiva (negativa). Il P_{cr} è il più piccolo valore di P per cui derivata seconda dell'energia diventa negativa.

B)–Metodo della biforcazione: si calcolano le posizioni di equilibrio del sistema omogeneo. Se per uno stesso valore del carico si hanno più soluzioni, significa che per tale carico il sistema può indifferentemente porsi su ciascuna di esse. Il valore del carico a partire dal quale le soluzioni sono multiple, individua un punto critico ed è detto punto di biforcazione.

C)–Metodo delle imperfezioni: il sistema considerato è non omogeneo e si ha un problema di risposta dove per carico critico si intende quel valore finito del carico per il quale la deformata tende a diventare infinita.

¹ Questo non significa *trascurare* le forze d'inerzia, nel qual caso si deve precisare rispetto quali altre forze sono trascurabili, ma più semplicemente che esse sono nulle quando $P=P_{cr}$.

² Non sempre la transizione da stabile ad instabile si ha per $\omega=0$; qualora questo avvenisse per $\omega \neq 0$ nella ricerca del carico critico non è corretto non tenere in conto le forze d'inerzia.

5.2.1. Metodo energetico

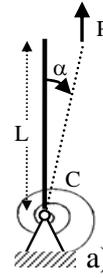
Riprendiamo in esame i tre casi precedentemente visti:

Caso a)–Trazione: l’energia del sistema risulta:

$$(5.2.1) \quad E = \frac{1}{2}C\alpha^2 + PL(1 - \cos \alpha) \cong \frac{1}{2}C\alpha^2 + \frac{1}{2}PL\alpha^2$$

che può essere scritta in termini adimensionali¹ dividendo per C:

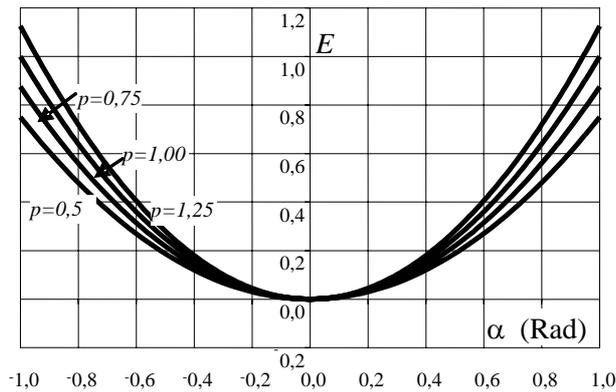
$$(5.2.2) \quad E = \frac{E}{C} = \frac{1}{2}(1+p)\alpha^2 \quad \text{dove} \quad p = \frac{PL}{C}$$



La figura riporta l’energia in funzione di α per alcuni valori di p e da essa è possibile valutare:

–la posizione α_e di equilibrio, che corrisponde ai punti in cui l’energia ha tangente orizzontale:

$$\frac{dE}{d\alpha} = (1+p)\alpha = 0$$

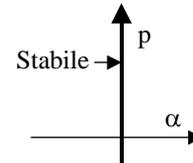


da cui:

$$(5.2.3) \quad \alpha_e = 0$$

–la stabilità delle posizioni di equilibrio: la posizione di equilibrio è stabile (instabile) se ad essa corrisponde un minimo (massimo) dell’energia. In altri termini la posizione di equilibrio è stabile (instabile) se la derivata seconda dell’energia è positiva (negativa). Poiché nel caso in esame:

$$(5.2.3) \quad \left[\frac{d^2E}{d\alpha^2} \right]_{\alpha=0} = 1+p > 0$$



la posizione di equilibrio è mantenuta per qualsiasi carico.

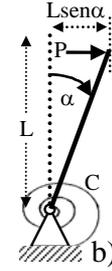
¹ L’adimensionalizzazione non altera l’equazione di equilibrio che si ottiene annullando la derivata prima di E, e non modifica neppure il segno della derivata seconda di E.

Caso b)–Carico laterale: l'energia del sistema risulta:

$$E = \frac{1}{2} C \alpha^2 - PL \sin \alpha$$

che può essere scritta in termini adimensionali:

$$(5.2.4) \quad E \cong \frac{1}{2} \alpha^2 - p \alpha$$

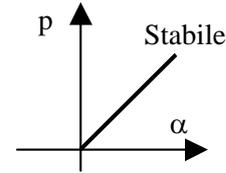


Dalla (5.2.4) si ottiene l'equazione di equilibrio:

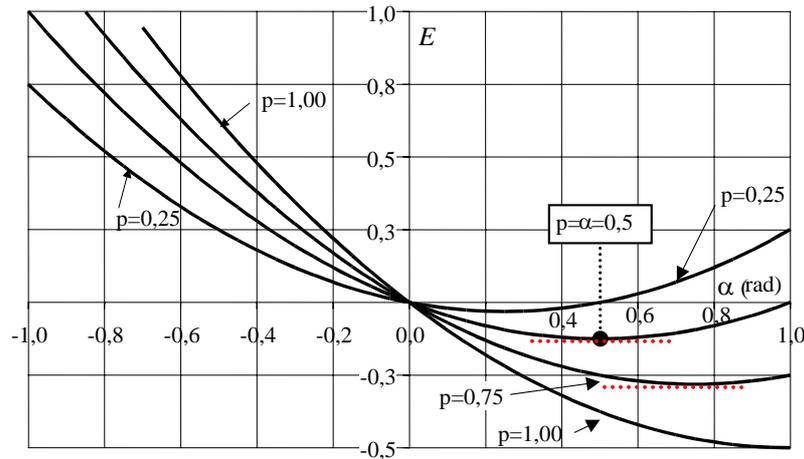
$$(5.2.5) \quad \frac{dE}{d\alpha} = \alpha - p = 0 \Rightarrow \alpha_e = p$$

e le posizioni di equilibrio che risultano stabili, infatti:

$$(5.2.6) \quad \left[\frac{d^2 E}{d\alpha^2} \right]_{\alpha=\alpha_e} = 1 > 0$$



Quindi l'asta mantiene la posizione di equilibrio per qualsiasi valore di p . Tutto questo è evidente dal grafico seguente che riporta l'energia al variare dell'angolo α . L'energia ha tangente orizzontale quando $p=\alpha$ cui corrisponde un punto di equilibrio stabile poiché l'energia ha un minimo¹.



¹ Il grafico è costruito sulla base della (8.2.4) linearizzata che nell'intervallo considerato di α approssima bene la relazione non lineare.

Caso c)–Compressione: l'energia del sistema risulta:

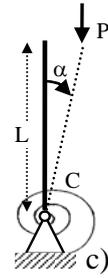
$$(5.2.7) \quad E = \frac{1}{2}C\alpha^2 - \frac{1}{2}PL\alpha^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}(1-p)\alpha^2$$

Da cui si ottiene l'equazione di equilibrio:

$$(5.2.8) \quad \frac{dE}{d\alpha} = (1-p)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_e = 0$$

e si ha:

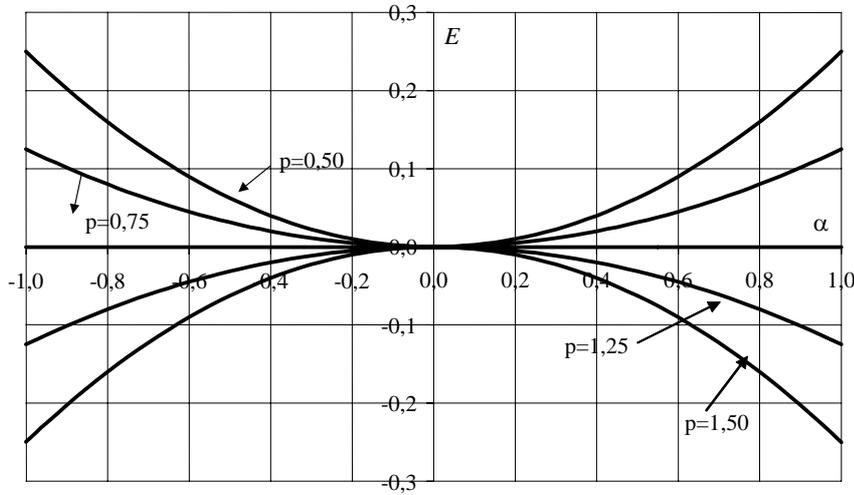
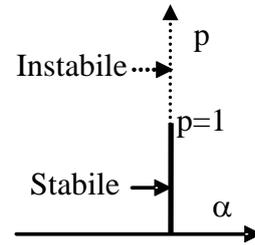
$$(5.2.9) \quad \left[\frac{d^2 E}{d\alpha^2} \right]_{\alpha=0} = 1-p \quad \begin{cases} > 0 & \text{per } p < 1 & \text{quindi stabile} \\ < 0 & \text{per } p > 1 & \text{quindi instabile} \end{cases}$$



Per $p=1$ la derivata seconda si annulla e tutte le derivate successive sono identicamente nulle.

Come mostrato nella figura a lato, il valore limite del carico per il quale il sistema da stabile diviene instabile è $p_{cr}=1$.

Tutto questo è evidente dal grafico seguente dell'energia, dal quale risulta che l'unica posizione di equilibrio possibile si ha per $\alpha=0$ che è un punto di minimo solo per valori del carico $p < 1$.



5.2.2. Significato fisico della derivata seconda dell'energia

Alla derivata seconda dell'energia possiamo associare il significato fisico di “*rigidezza equivalente di tutto il sistema molla più carico applicato*”. Fintanto che tale rigidezza equivalente è positiva il sistema è in grado di equilibrare il carico applicato, capacità questa che si perde quando la rigidezza equivalente è negativa ed al limite nulla.

A)–Infatti per il sistema di figura, risulta:

$$(5.2.10) \quad E = \frac{1}{2}C\alpha^2 - M\alpha$$

da cui l'equazione di equilibrio:

$$(5.2.11) \quad \frac{dE}{d\alpha} = C\alpha - M = 0$$

e quindi:

$$(5.2.12) \quad \alpha = \frac{M}{C} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dM} = \frac{1}{C}$$

da cui è evidente che finché $C > 0$ ad una variazione finita del carico M corrisponde una variazione finita della rotazione; se $C = 0$ ad una variazione del carico M corrisponde una variazione infinita della rotazione.

La derivata seconda dell'energia si scrive:

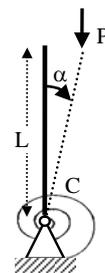
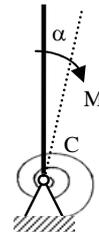
$$(5.2.13) \quad \frac{d^2E}{d\alpha^2} = C$$

da cui è evidente che la derivata seconda dell'energia è la rigidezza torsionale del sistema.

B)–Nel caso di carico di compressione, ricordando la (5.2.6):

$$(5.2.14) \quad \frac{d^2E}{d\alpha^2} = C - PL$$

per cui la derivata seconda dell'energia può essere vista come una rigidezza equivalente $C^*(P) = C - PL$ il cui valore decresce aumentando il carico. Per quanto prima detto, fino a quando $C^* > 0$ la rotazione è finita ed il sistema è stabile. Quando $PL = C$ si ha $C^*(P) = 0$, l'angolo α diviene infinito ed il sistema diviene instabile.



A)–Se per l'equilibrio è nulla la derivata prima dell'energia:

$$(a) \quad \frac{dE}{d\alpha} = C\alpha - M = 0 \Rightarrow g[M, \alpha(M)] = 0$$

è nulla anche la derivata parziale di g rispetto a M :

$$(b) \quad \frac{\partial g}{\partial M} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dM} = 0 \Rightarrow -1 + C \frac{d\alpha}{dM} = 0$$

Ovvero, ricordando la (5.2.13), ed ponendo $E_{\alpha\alpha} = d^2E/d\alpha^2$:

$$(c) \quad \frac{d\alpha}{dM} = \frac{1}{C} = \frac{1}{E_{\alpha\alpha}}$$

B)–In modo analogo:

$$(d) \quad \frac{dE}{d\alpha} = (C - PL)\alpha = 0 \Rightarrow f[P, \alpha(P)] = 0$$

e quindi deve valere che:

$$(e) \quad \frac{\partial f}{\partial P} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dP} = 0 \Rightarrow -L\alpha + (C - PL) \frac{d\alpha}{dP} = 0$$

ovvero, ricordando la (5.2.14):

$$(f) \quad \frac{1}{L} \frac{d\alpha}{dP} = \frac{\alpha}{C - PL} = \frac{\alpha}{E_{\alpha\alpha}}$$

Mentre nei casi di carico a), b) la derivata seconda dell'energia è sempre positiva e quindi il sistema è sempre in grado di contrastare il carico, nel caso c) la derivata seconda dell'energia si annulla per $p=1$ quindi per tale valore il sistema ha rigidità equivalente zero per poi diventare negativa.

5.2.3. Metodo della biforcazione

a)–Carico p di trazione, ponendo nulle le forze d'inerzia nella (5.1.6) ed abolendo il superfluo asterisco che indica la variazione dell'angolo ($\alpha^* \equiv \alpha$):

$$(5.2.15) \quad [1 + p]\alpha = 0$$

equazione che ammette la sola soluzione $\alpha=0$. Quindi l'asta mantiene la posizione di equilibrio per qualsiasi valore di P di trazione.

b)–Carico p laterale, ponendo nulle le forze d'inerzia nella (5.1.9):

$$(5.2.16) \quad (C + PL \operatorname{sen} \alpha_0)\alpha = 0$$

equazione che ammette la sola soluzione $\alpha=0$. Quindi indipendentemente dal valore del carico l'asta mantiene la posizione di equilibrio (5.1.2) acquisita sotto il carico specificato.

c)–Se p è di compressione, ponendo nulle le forze d'inerzia nella (5.1.10):

$$(5.2.17) \quad [1-p]\alpha = 0$$

equazione soddisfatta, se:

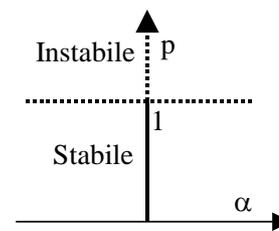
$$\begin{cases} \alpha = 0 & ; \quad p \text{ di valore arbitrario} \\ [1-p] = 0 & ; \quad \alpha \text{ di valore arbitrario} \end{cases}$$

quindi la posizione di equilibrio $\alpha=0$ è possibile per qualsiasi valore del carico di compressione p .

Ma per $p=1$ sono anche possibili valori di $\alpha \neq 0$; quindi, per tale valore di p , oltre la posizione iniziale indeformata sono possibili altre posizioni di equilibrio. In questa valutazione statica della stabilità, il carico critico viene individuato come quel valore più piccolo in corrispondenza del quale sono possibili più soluzioni di equilibrio.

Come evidente dal grafico di figura, per $p < p_{cr}$ si ha un solo ramo della curva p, α ; per $p = p_{cr}$ il ramo si biforca: uno verticale $\alpha=0$, l'altro orizzontale $\alpha \neq 0$. Da qui il nome di *metodo della biforcazione*.

Più in generale, se si procede lungo un ramo della curva p in funzione di α , nel punto di biforcazione si ha transizione da una posizione stabile ad almeno un'altra che risulterà instabile (o viceversa).



5.2.4. Metodo delle imperfezioni

Il sistema fin qui esaminato è stato considerato “ideale” in cui nella posizione iniziale l'asta è perfettamente dritta ed il carico perfettamente allineato e centrato lungo l'asse.

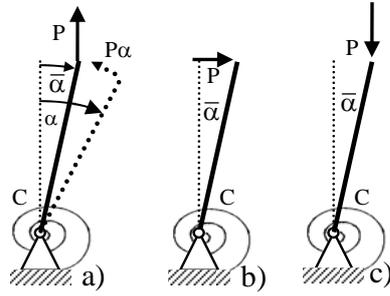
Nella realtà nessun sistema è perfetto ed in ogni caso possiamo valutare l'influenza sul comportamento del sistema di “imperfezioni” ovvero di quantità che intervengono nelle equazioni di equilibrio come termini noti cioè indipendenti dalla deformazione elastica.

L'analisi di un sistema non omogeneo anche se lineare è un problema di risposta; pertanto si calcola la risposta statica del sistema in funzione del

carico P e si assume come P_{cr} il valore del carico per cui la risposta diviene infinita. Vediamo alcuni semplici casi di possibili imperfezioni.

A)–Imperfezione geometrica $\bar{\alpha}$.

Supponiamo che l'asta, già nella posizione iniziale (in cui la molla è considerata indeformata), ha un piccolo angolo rispetto alla verticale. Poiché, già prima che insorgano forze elastiche, è presente un momento dovuto a P , l'equazione di equilibrio statico si scrive:

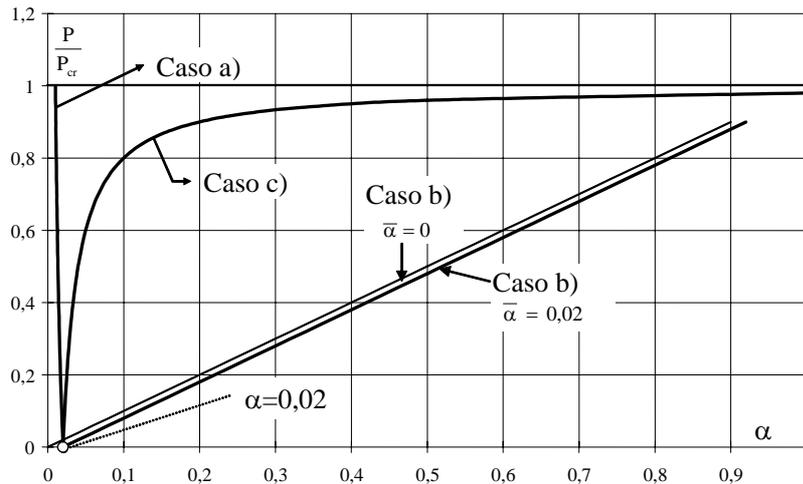


$$\mathbf{a)} - \text{Trazione} : C(\alpha - \bar{\alpha}) + PL\alpha = 0 \Rightarrow [1 + p]\alpha = \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{\alpha}}{[1 + p]}$$

$$\mathbf{b)} - \text{Laterale} : C(\alpha - \bar{\alpha}) = PL \Rightarrow \alpha = p + \bar{\alpha}$$

$$\mathbf{c)} - \text{Compressione} : C(\alpha - \bar{\alpha}) - PL\alpha = 0 \Rightarrow [1 - p]\alpha = \bar{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{\alpha}}{[1 - p]}$$

Il grafico seguente riporta l'andamento di α nei tre casi, assunto $\bar{\alpha} = 0,02$.



Nel caso **a)** il sistema tende a riprendere la posizione di equilibrio $\alpha=0$.

Nel caso **b)** la nuova posizione di equilibrio è vicina a quella del sistema ideale.

Nel caso **c)** l'angolo α tende a diventare infinito per P che tende a P_{cr} .

Per comprendere del perché si considera critico il carico per il quale la deformata tende a crescere indefinitamente esaminiamo l'energia e la sua derivata seconda limitandoci al caso c):

$$(5.2.19) \quad E = \frac{1}{2}[(\alpha - \bar{\alpha})^2 - p\alpha^2] \Rightarrow \frac{dE}{d\alpha} = \alpha - \bar{\alpha} - p\alpha = 0$$

dalla seconda delle quali si hanno le posizioni di equilibrio:

$$(5.2.20) \quad \alpha_e = \frac{\bar{\alpha}}{1-p}$$

riportate nel grafico¹.

Dall'esame della derivata seconda dell'energia valutata in dette posizioni:

$$(5.2.21) \quad \left[\frac{d^2 E}{d\alpha^2} \right]_{\alpha_e} = 1 - p_e \quad \begin{cases} > 0 \text{ se } p < 1 \\ < 0 \text{ se } p > 1 \end{cases}$$

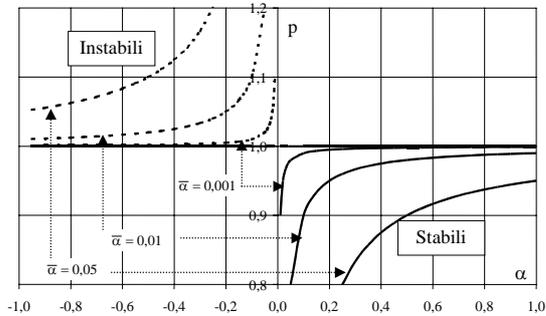
per cui le posizioni di equilibrio per $p < 1$ ($p > 1$) sono stabili (instabili).

Il fatto che per $p < 1$ non si ha instabilità potrebbe indurre a pensare che il sistema soggetto a carichi $p < 1$ è in grado di svolgere la propria funzione strutturale senza collassare tuttavia le deformazioni possono risultare notevoli, al punto che la struttura non è più in grado di sostenerle.

Dalla (5.2.20) risulta che già con una piccola imperfezione quale $\bar{\alpha} = 0,001$, all'aumentare del carico solo inizialmente la deformata si mantiene praticamente costante e prossima all'imperfezione iniziale. Quando $P = 0,9P_{cr}$, si ha $\alpha = 0,01$ pari a 10 volte la deformata iniziale; per $P = 0,99P_{cr}$, si ha $\alpha = 0,1$ pari a 100 volte la deformata iniziale. E' sufficiente un carico $P = 0,999P_{cr}$, per avere $\alpha = 1$ pari a 1000 volte la deformata iniziale.

Queste considerazioni indicano chiaramente che, se da una parte il concetto di carico critico perde significato nello spirito di "sistema instabile", mantiene intatto il significato di criticità nello spirito che la struttura non può sopportare le deformazioni conseguenti e quindi si rompe.

Il metodo delle imperfezioni ha una sua validità anche per questa possibilità di calcolare il valore della deformata al variare del carico p . Inoltre vedremo che, per alcuni sistemi, l'imperfezione abbassa il P_{cr} .



¹ Se $\bar{\alpha} > 0$, anche il ramo del caso c) per $p < 1$ risulta stabile e senza biforcazioni.

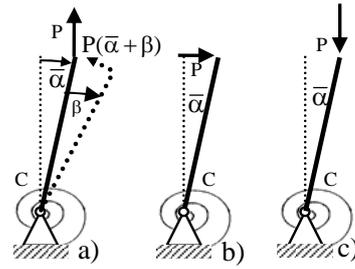
Se in luogo di α , angolo rispetto alla verticale, si utilizza l'angolo β rispetto alla posizione iniziale si ha facilmente:

a) – Trazione : $(1 + p)\beta = -p\bar{\alpha} \Rightarrow \beta = -\frac{p\bar{\alpha}}{(1 + p)}$

b) – Laterale : $\beta = p$

c) – Compressione : $(1 - p)\beta = p\bar{\alpha} \Rightarrow \beta = \frac{p\bar{\alpha}}{(1 - p)}$

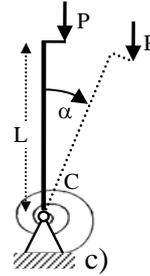
da cui si traggono le stesse considerazioni circa il p_{cr} .



B)–Imperfezione per eccentricità e del carico rispetto all'asse.

Supponiamo che il carico applicato all'asta, considerata ideale cioè perfettamente verticale, sia disassato rispetto all'asse della trave di una piccola quantità e . Limitandoci a considerare solo il caso in cui P risulti di compressione, il disassamento provoca un momento aggiuntivo Pe per cui si ha:

$$(C - PL)\alpha = Pe \Rightarrow \alpha = \frac{p(e/L)}{1 - p}$$



Quindi per P che tende a P_{cr} la deformata tende all' ∞ .

Sulla base dei risultati precedenti possiamo quindi definire, *nell'ambito del metodo statico*, “carico critico come il più piccolo valore finito del carico applicato sotto il quale la deformata statica diventa infinita”.

C)–Presenza di un carico laterale F .

La differenza di comportamento del sistema nei tre casi di carico con diversa orientazione è evidente anche se si pensa che oltre il carico P , sia presente un carico laterale F , come in figura.

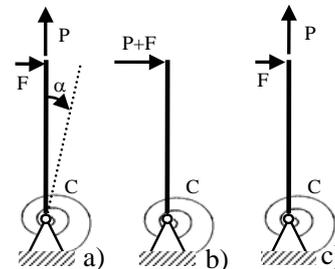
Trazione : $(C + PL)\alpha - FL = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{f}{1 + p}$

Laterale : $C\alpha - (P + F)L = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{f}{1 + p}$

Compressione : $(C - PL)\alpha - FL = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{f}{1 - p}$

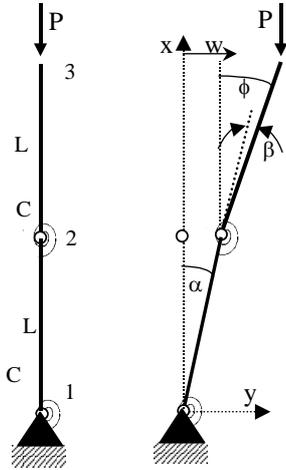
dove si è posto $f = FL/C$.

Equazioni queste del tutto analoghe a quelle ottenute nel caso di imperfezione geometrica se si pone $f = \bar{\alpha}$, ovvero si interpreta il carico laterale come una imperfezione del sistema.



6. Sistema a due gradi di libertà. Criterio dinamico

A)–Si consideri il sistema di figura, costituito da due aste rigide incernierate in 1,2 dove sono presenti due molle torsionali di rigidezza C , sottoposto al carico P di compressione.



Il comportamento del sistema è compiutamente rappresentato dalle due variabili cinematiche α , β . Perturbando il sistema rispetto la posizione di equilibrio α_0, β_0 :

$$(6.1) \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha^* \quad ; \quad \beta = \beta_0 + \alpha^*$$

e, poiché $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, possiamo indicare i piccoli angoli dovuti alla perturbazione senza l'asterisco e scrivere l'equilibrio del moto perturbato:

$$(6.2) \quad \begin{cases} 16J\ddot{\alpha} + 5J\ddot{\beta} + \alpha - p(2\alpha + \beta) = 0 \\ 5J\ddot{\alpha} + 2J\ddot{\beta} + \beta - p(\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$

A)–Infatti, indicando con μ la massa per unità di lunghezza delle aste e con $w(x)$ lo spostamento laterale del generico punto, per cui:

$$(a) \quad \begin{cases} w(x) = \alpha x & \text{per } 0 \leq x \leq L \\ w(x) = \alpha x + \beta(x - L) & \text{per } L \leq x \leq 2L \end{cases}$$

l'equazione dei momenti rispetto al punto 1, si scrive:

$$\mu\ddot{\alpha} \int_0^L x^2 dx + \mu \left[\ddot{\alpha} \int_L^{2L} x^2 dx + \ddot{\beta} \int_L^{2L} (x - L) x dx \right] + C\alpha - PL(2\alpha + \beta) = 0$$

che, fatte le opportune integrazioni, diviene:

$$\frac{16L^3\mu}{6} \ddot{\alpha} + \frac{5L^3\mu}{6} \ddot{\beta} + C\alpha - PL(2\alpha + \beta) = 0$$

che è la prima delle (6.2) se si pone:

$$(b) \quad J = \frac{L^3\mu}{6C} \quad ; \quad p = \frac{PL}{C}$$

Per l'equilibrio dei momenti della seconda asta rispetto al punto 2 (non è un punto fisso):

$$(c) \quad J_G(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) + (\mu L) \frac{L}{2} \ddot{w}_G + C\beta - PL(\alpha + \beta) = 0$$

dove J_G è il momento d'inerzia della seconda asta rispetto al proprio baricentro:

$$(d) \quad J_G = \mu \int_{-L/2}^{L/2} \xi^2 d\xi = \frac{\mu L^3}{12}$$

mentre \ddot{w}_G è l'accelerazione di detto baricentro, che utilizzando la (a) si scrive:

$$(e) \quad \ddot{w}_G = \frac{3L}{2} \ddot{\alpha} + \frac{L}{2} \ddot{\beta}$$

Sostituendo le (d,e) nella (c) si ottiene:

$$\frac{5L^3\mu}{6} \ddot{\alpha} + \frac{2L^3\mu}{6} \ddot{\beta} + C\beta - PL(\alpha + \beta) = 0$$

che, con le posizioni (b), è la seconda delle (6.2).

B)–Le due equazioni potevano essere ottenute anche utilizzando le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$$

dove L è il lagrangiano:

$$L = T - U = \frac{\mu}{2} \int_0^{2L} \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2} C\alpha^2 - \frac{1}{2} C\beta^2 + \frac{PL}{2} (2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

che utilizzando la (a) si scrive:

$$L = \frac{\mu L^3}{6} [8\dot{\alpha}^2 + 5\dot{\alpha}\dot{\beta} + \dot{\beta}^2] - \frac{1}{2} C\alpha^2 - \frac{1}{2} C\beta^2 + \frac{PL}{2} (2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

Le equazioni (6.2) rappresentano un sistema di due equazioni differenziali a coefficienti costanti, ciascuna del 2° ordine, nelle due incognite α, β . Per determinare l'integrale generale del sistema occorre trovare quattro soluzioni linearmente indipendenti, ciascuna delle quali, indicando con A,B due generiche costanti, può essere espressa come:

$$(6.3) \quad \alpha = Ae^{st} \quad ; \quad \beta = Be^{st}$$

dove in generale s risulta è complesso, del tipo $\pm(\zeta \pm j\omega)$, ed in particolare: se la parte reale è positiva il moto è amplificato, ovvero ci si allontana indefinitamente dalla posizione di equilibrio. Il valore più basso del carico P per cui questo succede è quindi il carico critico P_{cr} . In tale ottica non è necessario determinare la soluzione generale del sistema ma ci si può limitare a trovare il valore di P per cui la parte reale diviene positiva.

Sostituendo le (6.3) nelle (6.2) e ponendo $\lambda^2 = Js^2$ si ha:

$$(6.4) \quad \begin{cases} [1 - 2p + 16\lambda^2]A + [5\lambda^2 - p]B = 0 \\ [5\lambda^2 - p]A + [1 - p + 2\lambda^2]B = 0 \end{cases}$$

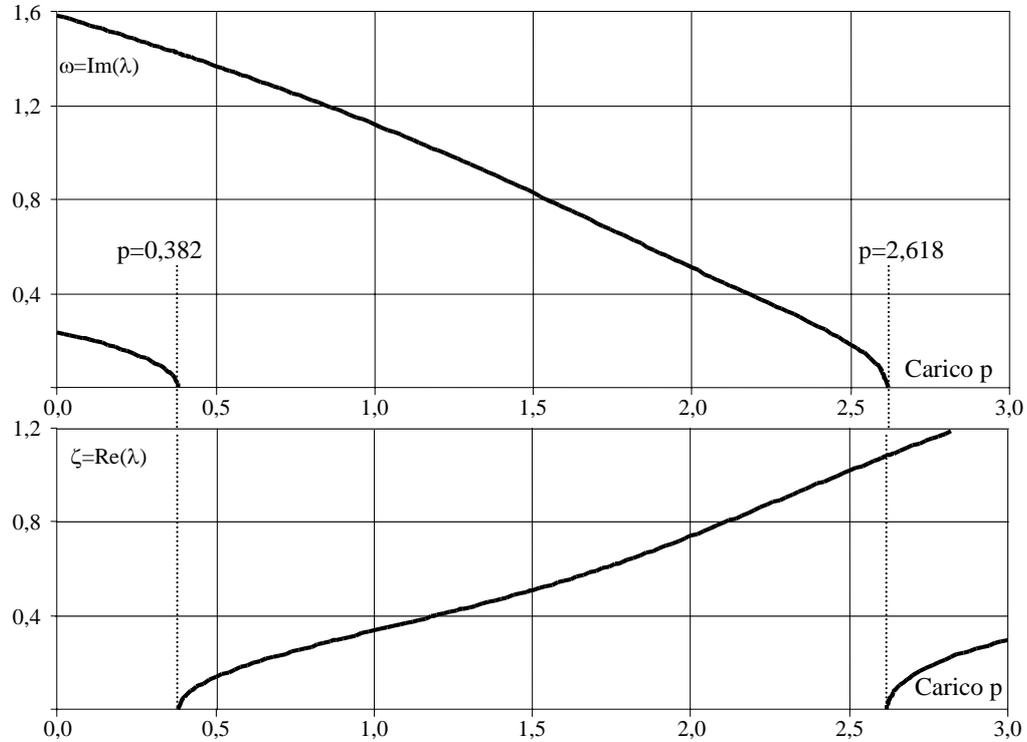
che ammette soluzione non banale se il determinante dei coefficienti è =0:

$$(6.5) \quad 7\lambda^4 - (10p - 18)\lambda^2 + (p^2 - 3p + 1) = 0$$

Quindi, le quattro radici risultano:

$$(6.6) \quad \lambda = \pm \left\{ \frac{1}{7} \left[(5p - 9) \pm \sqrt{(5p - 9)^2 - 7(p^2 - 3p + 1)} \right] \right\}^{1/2}$$

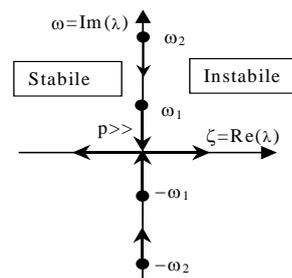
I grafici seguenti riportano il valore della (6.6) al variare di p (considerando solo i valori positivi di parte reale ed immaginaria).



Nel caso di carico applicato nullo, $p=0$, si ritorna al problema dell'analisi delle vibrazioni naturali del sistema cui corrispondono le frequenze:

$$(6.7) \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{-9 \pm \sqrt{74}}{7}} = \pm \sqrt{\frac{-9 \pm 8,6}{7}} = \begin{cases} \pm j 0,2383 = \pm j \omega_1 \\ \pm j 1,5858 = \pm j \omega_2 \end{cases}$$

All'aumentare del carico p le soluzioni immaginarie $\omega = \text{Im}(\lambda)$ tendono a decrescere. Per $p_1=0,382$ una coppia di soluzioni diventa nulla ($\lambda = \pm j\omega_1 = 0$) per poi divenire, da immaginarie, reali ($\lambda = \pm \zeta_1$) una con parte reale positiva. L'altra coppia di soluzioni ($= \pm j\omega_2$) segue le stesse vicissitudini e diviene reale per $p_2=2,618$.



Il valore del carico critico è quello corrispondente al valore più piccolo $p_1 < p_2$ per il quale si ha parte reale $\zeta > 0$, quindi:

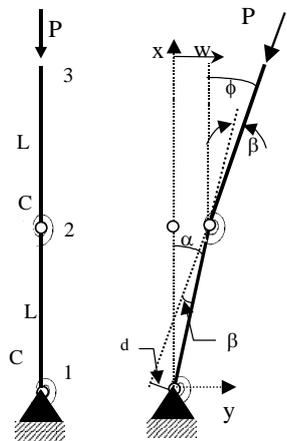
$$(6.8) \quad p_{cr} = 0,382$$

Anche in questo caso la transizione stabile-instabile avviene per $\lambda=0$. Ai fini della ricerca del P_{cr} possiamo quindi porre $\lambda=0$ nella (6.5), per cui:

$$(6.9) \quad p^2 - 3p + 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 0,382 \\ 2,618 \end{cases} \Rightarrow p_{cr} = 0,382$$

e constatare che il carico critico non dipende dalle forze d'inerzia.

B)—Si consideri lo stesso sistema prima visto, dove però ora il carico applicato P non si mantiene verticale ma ruota in modo da mantenere, rispetto la verticale sempre la stessa direzione ϕ della seconda asta.



Le equazioni di equilibrio si scrivono:

$$(6.9) \quad \begin{cases} 16J\ddot{\alpha} + 5J\ddot{\beta} + \alpha + p\beta = 0 \\ 5J\ddot{\alpha} + 2J\ddot{\beta} + \beta = 0 \end{cases}$$

Infatti, la prima equazione rappresenta l'equilibrio dei momenti rispetto al punto 1 ed il contributo della forza P è ora dato semplicemente $M=Pd=PL\beta$. La seconda è l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al punto 2 ed il conseguente momento della forza è nullo.

Sostituendo le (6.3) nelle (6.9) e ponendo $\lambda=Js^2$ si ha:

$$(6.10) \quad \begin{cases} [1 + 16\lambda^2]A + [p + 5\lambda^2]B = 0 \\ [5\lambda^2]A + [1 + 2\lambda^2]B = 0 \end{cases}$$

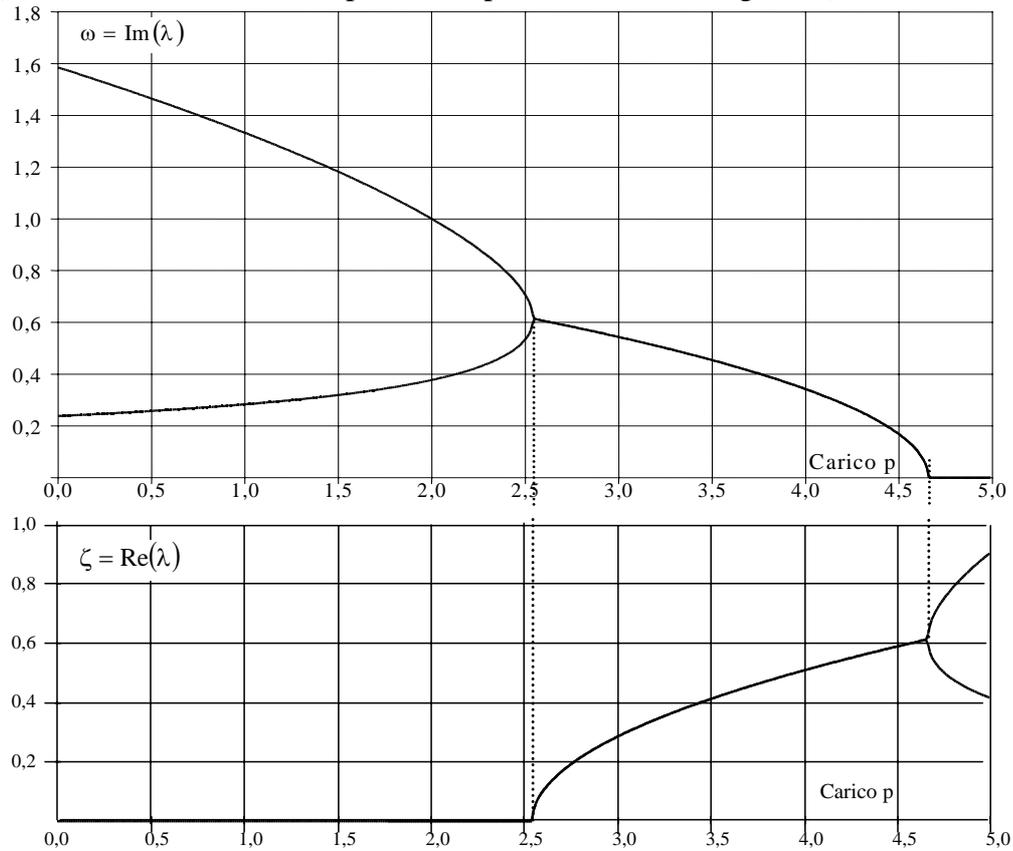
che ammette soluzione non banale se il determinante dei coefficienti è =0:

$$(6.11) \quad 7\lambda^4 - (5p - 18)\lambda^2 + 1 = 0$$

Da cui si ottiene:

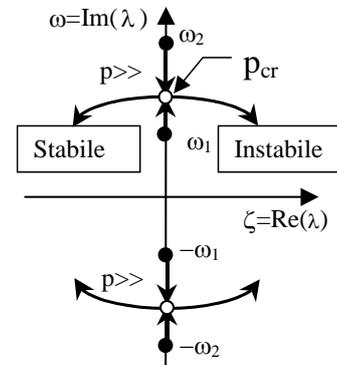
$$(6.12) \quad \lambda = \pm \left\{ \frac{1}{14} \left[(5p - 18) \pm \sqrt{(5p - 18)^2 - 28} \right] \right\}^{1/2}$$

I grafici seguenti riportano il valore della (6.12) al variare di p (considerando solo i valori positivi di parte reale ed immaginaria).



All'aumentare del carico p le soluzioni (immaginarie) ω_1, ω_2 tendono ad avvicinarsi fino a diventare, per $p_1=2,542$, uguali a coppie ($\omega_1=\omega_2$; $-\omega_1=-\omega_2$) cioè del tipo $\pm j\omega$. Poi le soluzioni, da immaginarie, divengono complesse $=\pm(\zeta \pm j\omega)$ con conseguente instabilità. Seguendo ad aumentare il carico le soluzioni, per $p_2=4,658$ diventano reali e coincidenti ($=\pm\zeta$). Il valore del carico critico è quello corrispondente al valore più piccolo $p_1 < p_2$ per il quale si ha parte reale $\zeta > 0$:

$$(6.13) \quad p_{cr} = \frac{PL}{C} = 2,542$$



In questo caso la transizione stabile-instabile non avviene mai per $\lambda=0$ ed il carico critico dipende dalle forze d'inerzia. Poiché la transizione si ha quando le radici sono coincidenti $\lambda_1=\lambda_2$, $-\lambda_1=-\lambda_2$ (in particolare per p_1 : $\zeta_1=\zeta_2=0$, $\omega_1=\omega_2\neq 0$; per p_2 : $\zeta_1=\zeta_2\neq 0$, $\omega_1=\omega_2=0$), e tale coincidenza si ha quando si annulla il discriminante della (6.12), si ha direttamente:

$$(6.14) \quad (5p-18)^2 - 28 = 0 \Rightarrow 25p^2 - 180p + 296 = 0$$

ovvero:

$$(6.15) \quad p = \frac{180 \pm \sqrt{2800}}{50} = \begin{cases} 2,5417 \\ 4,5683 \end{cases} \Rightarrow p_{cr} = 2,5417$$

7. Rappresentazione matriciale del sistema a 2 GL

Riprendiamo il sistema a due gradi di libertà prima esaminato. In ambedue i casi di diversa sollecitazione P, il sistema delle due equazioni di equilibrio (6.2,9) può essere simbolicamente scritto come:

$$(7.1) \quad [K]\{\Delta\} + [M]\{\ddot{\Delta}\} + [F]\{\Delta\} = 0$$

dove $\{\Delta\}$ è il vettore delle variabili di stato α, β :

$$(7.2) \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$$

e $[K]$, $[M]$, $[F]$ matrici che rappresentano rispettivamente le caratteristiche elastiche, di inerzia ed i carichi applicati.

E' evidente che per i due casi visti si hanno le stesse matrici $[K]$ ed $[M]$:

$$(7.3) \quad [K] = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} ; [M] = \frac{\mu L^3}{6} \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

mentre è diversa la matrice dei carichi applicati:

A)–Il carico P si mantiene sempre verticale (carico conservativo):

$$(7.4) \quad [F] = -PL \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

B)–Il carico P è allineato con la seconda asta (carico non conservativo):

$$(7.5) \quad [F] = PL \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici (7.3) risultano simmetriche e, solo quando sono scritte in forma simmetrica, vengono indicate come *matrici di rigidezza e di massa*.

Una volta accertato che $[K]$, $[M]$ sono scritte in forma simmetrica possiamo fare le seguenti considerazioni sulla $[F]$:

1. Anche la (7.4) risulta simmetrica il che indica che le forze applicate (in questo caso momenti) sono di natura conservativa. Infatti P è una forza centrale che ha come direzione un punto all'infinito.

2. La (7.5) invece non risulta simmetrica e questo è indice che la forza applicata non è conservativa.

E' pertanto evidente, ricordando che il teorema della minimizzazione dell'energia potenziale è valido solo per sistemi conservativi, che nel caso A) possiamo non considerare le forze d'inerzia.

8. Matrice di rigidezza e matrice di massa

In generale $[K]$, $[M]$ del sistema (7.1), ricavate scrivendo le equazioni di equilibrio, potrebbero non risultare simmetriche ma possono sicuramente essere rese tali proprio per il loro significato fisico. Un ragionamento analogo può essere fatto per la $[F]$ solo se rappresenta forze di natura conservativa. Le (7.3,4) risultano simmetriche quasi per caso, conseguenza del fatto che le (6.2,9) sono due opportune equazioni di equilibrio espresse in termini di due opportune variabili lagrangiane α, β .

Infatti le $[K]$, $[M]$ del sistema (7.1) non risulterebbero simmetriche se:

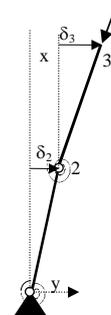
a)–si scegliessero due generiche equazioni di equilibrio. Infatti se le (6.2,9) sono equazioni di equilibrio lo sono anche una loro combinazione lineare. Così basta moltiplicare per (-1) una sola delle due equazioni di equilibrio (il che equivale a cambiare in una equazione il verso dei momenti) perché $[K]$, $[M]$ non risultano più simmetriche.

b)–si scegliessero due diverse variabili lagrangiane, quali ad esempio gli spostamenti adimensionali δ_2/L del punto 2 e δ_3/L del punto 3. Infatti tali nuove variabili sono legate alle precedenti variabili (7.2) dalle relazioni:

$$(8.1) \quad \{\Delta^*\} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \{\Delta\}$$

da cui:

$$(8.2) \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_2/L \\ \delta_3/L \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\Delta\} = [T] \{\Delta^*\}$$



Pertanto il sistema (7.1) nelle nuove variabili $\{\Delta^*\}$ si scrive:

$$(8.3) \quad [K^*]\{\Delta^*\} + [M^*]\{\ddot{\Delta}^*\} + [F^*]\{\Delta^*\} = 0$$

dove:

$$(8.4) \quad [K^*] = [K][T] = C \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [M^*] = [M][T] = \frac{\mu L^3}{6} \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A)–Se il carico P si mantiene sempre verticale (forze conservative):

$$(8.5) \quad [F^*] = [F][T] = -PL \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B)–Se il carico P è allineato con la seconda asta (forze non-conservative):

$$(8.6) \quad [F^*] = [F][T] = PL \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici $[K^*]$, $[M^*]$ non risultano ora simmetriche e *non* sono in queste note chiamate matrici di rigidezza e di massa ma solo *rappresentative* del comportamento elastico e d'inerzia. Dal momento però che le forze elastiche e d'inerzia sono di natura conservativa, tali matrici devono poter essere rese simmetriche.

Per simmetrizzare le (8.4) basta sostituire alla prima riga la differenza tra le due righe lasciando inalterata la seconda riga:

$$(8.7) \quad [K] = C \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [M] = \frac{\mu L^3}{6} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e le $[K]$, $[M]$ in quanto simmetriche sono in queste note propriamente indicate come *matrici di rigidezza e di massa*.

Operando analogamente per la matrice dei carichi:

A)–Se il carico P si mantiene sempre verticale (forze conservative):

$$(8.8) \quad [F] = -PL \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B)–Se il carico P è allineato con la seconda asta (forze non-conservative):

$$(8.9) \quad [F] = PL \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alle $[K]$, $[M]$ simmetriche date dalle (8.7), corrisponde una $[F]$ data dalla (8.8) simmetrica se le forze sono conservative ed una $[F]$ data dalla (8.9) se le forze sono non-conservative.