

CAPITOLO IX

**FONDAMENTI DI MECCANICA DELLE
VIBRAZIONI**

1. Generalità

Lo studio del comportamento statico non esaurisce l'analisi di una struttura elastica ed in particolare di una struttura aerospaziale che, essendo soggetta a forze variabili nel tempo, ha spostamenti che risultano funzioni del tempo oltre che dello spazio. In questo caso è indispensabile "capire" anche da un punto di vista dinamico il sistema per essere in grado di comprenderne il comportamento in presenza di carichi che dipendono dal tempo.

Un problema dinamico è caratterizzato fundamentalmente dalla presenza delle forze d'inerzia che non intervengono nei problemi della statica.

La meccanica delle vibrazioni in particolare studia le caratteristiche dinamiche di un sistema, precisandone i parametri tipici (quali frequenze e modi di vibrazione) attraverso i quali è possibile "capire" il comportamento della struttura soggetta a carichi variabili nel tempo.

Il primo passo è quello di realizzare un modello matematico che rappresenti il comportamento del sistema. Poiché le forze d'inerzia dipendono dagli spostamenti è naturale assumere come variabili di stato dette grandezze. Il modello matematico può, come nella statica, essere ottenuto indifferentemente dall'impostazione differenziale o integrale; avremo anzi modo di vedere quando il modello dinamico possa essere ottenuto dal modello statico con la semplice aggiunta delle forze d'inerzia.

Una prima e fondamentale classificazione è fatta sulla base dell'analisi lineare o non lineare del sistema. In questa sede si considerano solo vibrazioni lineari dal momento che si esamina il comportamento dinamico per piccoli spostamenti rispetto alla posizione di equilibrio statico.

Una seconda classificazione può essere fatta sulla base del numero di gradi di libertà che descrivono il comportamento del sistema. Si hanno così:

- a)–I sistemi discreti le cui variabili di stato (variabili dipendenti) sono funzioni solo del tempo (variabile indipendente).
- b)–I sistemi continui le cui variabili di stato (variabili dipendenti) sono funzioni sia dello spazio che del tempo (variabili indipendenti).

Una tale distinzione ci consentirà da una parte di esporre i fondamenti per sistemi con un numero finito di gradi di libertà, per poi estenderli ai sistemi continui e dall'altra di ritornare dal continuo al discreto attraverso opportune tecniche di discretizzazione.

2. Principio di Hamilton

A)–Sistemi discreti non vincolati. Sulla base della 2° legge di Newton il moto del sistema è regolata dalle seguenti equazioni di equilibrio:

$$(2.1) \quad m_n \ddot{q}_n(t) = f_n(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \quad ; \quad \dots \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Nel caso in cui per il campo di forze agente sul sistema è possibile definire l'energia potenziale $V(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$:

$$(2.2) \quad f_n(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = -\frac{\partial V(q_1, q_2, \dots, q_N, t)}{\partial q_n}$$

ricordando la definizione di energia cinetica:

$$(2.3) \quad T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) = \frac{1}{2} \sum_1^N m_n \dot{q}_n^2$$

il sistema (2.1) può essere scritto:

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = -\frac{\partial V}{\partial q_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = 0$$

Introducendo la *funzione di Lagrange* (o potenziale cinetico):

$$(2.5) \quad L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q, t)$$

e notando che V è indipendente da dq/dt e T da q , la (2.4) si può scrivere:

$$(2.6) \quad \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0$$

nella quale riconosciamo l'equazione di Eulero corrispondente alla stazionarietà del funzionale, detto *integrale di Hamilton*:

$$(2.7) \quad J[q, \dot{q}, t] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$$

In altri termini il moto effettivo, governato dalle equazioni di equilibrio (2.1), fanno sì che il funzionale (2.7) con le condizioni agli estremi:

$$(2.8) \quad q(t_0) = q_0 \quad ; \quad q(t_1) = q_1$$

risulti stazionario.

Pertanto le equazioni differenziali del moto di Eulero possono essere formulate nella seguente impostazione integrale:

“Dato lo stato iniziale e finale di un moto (2.8), la reale legge del moto è quella che la cui soluzione rende stazionario l’integrale di Hamilton (2.6)”.

E’ possibile dimostrare che per un qualsiasi intervallo sufficientemente piccolo la reale legge del moto non solo rende stazionario ma anche minimo il funzionale (2.7). Questo non è in generale vero per intervalli di tempo lunghi per cui si parla in generale di stazionarietà e non minimizzazione.

B)–Sistemi discreti vincolati. Si può dimostrare che il principio di Hamilton rimane valido anche quando il sistema di punti materiali è soggetto a vincoli olonomi della forma:

$$(2.9) \quad g_k(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K < N$$

In questo caso si può fare uso della tecnica dei moltiplicatori di Lagrange o passare ad un problema non vincolato utilizzando un numero $N^* = N - K$ di coordinate generalizzate (o lagrangiane) che rappresentano i gradi di libertà del sistema.

C)–Legge di conservazione dell’energia. Nel caso di sistemi autonomi, cioè sistemi in cui nel potenziale V e nei vincoli (2.9) il tempo è solo una variabile implicita, la funzione lagrangiana L non dipende esplicitamente dal tempo per cui esiste l’integrale primo del moto¹:

$$(2.9) \quad H = L(q, \dot{q}) - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{cost} \Rightarrow T - V - 2T = \text{cost} \Rightarrow T + V = \text{Cost}$$

La quantità $T+V$ è l’energia totale e sistemi per cui è valida la (2.9) sono detti conservativi². La (2.9) esprime il teorema di conservazione dell’energia totale secondo cui: *“l’energia totale di un sistema soggetto a forze di natura sostanzialmente conservativa si mantiene costante durante il moto”.*

¹ Vedi: Volume I capitolo Calcolo delle Variazioni formula (3.13).

² Ritroviamo qui tutti gli ingredienti che consentono di definire conservativa una forza ed in particolare: risultare posizionale (non dipendenza esplicita dell’energia dal tempo) e definirne l’energia (2.2).

Utilizziamo il principio di Hamilton nel caso di un punto materiale di massa m che, soggetta ad un forza costante in direzione x , compia un moto $x(t)$ nella stessa direzione x , per cui:

$$(a) \quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad ; \quad V = - \int_0^x f dx = -fx$$

Applicando l'equazione di Eulero alla funzione Lagrangiana:

$$(b) \quad L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + fx$$

si ha la classica equazione di Newton:

$$(c) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m \ddot{x} - f = 0$$

Moltiplicando l'equazione differenziale (c) per \dot{x} :

$$(d) \quad m \ddot{x} \dot{x} - f \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - fx \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (T + V) = 0$$

Pertanto durante il moto è costante l'energia totale:

$$(e) \quad H = T + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - fx = \text{cost}$$

Si noti che mentre la (e) è logica conseguenza della (c), non è lecito risalire dalla (e) alla (c) se non quando $\dot{x} \neq 0$. Infatti seguendo un processo inverso partendo dall'ultima espressione si arriva alla prima che non è la (c) ma la (c) moltiplicata per \dot{x} .

Tantomeno si può applicare l'equazione di Eulero nella forma espressa dalla (c) alla (e)¹.

D)–Sistemi continui. La formulazione del principio di Hamilton prescinde dalle coordinate del sistema risultando espresso solo in termini di energia potenziale e cinetica. Questa considerazione consente di estendere il principio ai sistemi continui ed in particolare elastici per i quali esiste l'energia di deformazione U , ponendo:

$$L = T - (V + U)$$

Esaminiamo gli spostamenti trasversali $w(x,t)$ di una corda elastica lunga L , tesa tra due punti dell'asse x e pertanto soggetta ad una tensione S . L'allungamento di un elemento dx nel passaggio dalla configurazione indeformata $w=0$ a quella deformata risulta:

$$(a) \quad \sqrt{dx^2 + dw^2} - dx = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - dx \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

ed il lavoro totale della tensione o l'energia di deformazione elastica, si scrive:

$$(b) \quad L_S = - \frac{1}{2} \int_0^L S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \int_0^L S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

¹ In termini matematici la quantità (2.9) è detta Hamiltoniano da cui è possibile ricavare le equazioni di Eulero scritte in forma canonica.

L'energia cinetica, indicando con μ la massa per unità di lunghezza delle corda:

$$(c) \quad T = \frac{1}{2} \int_0^L \mu \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx$$

Se poi alla fune fosse applicato un carico $q(x,t)$ nella direzione positiva di w :

$$(d) \quad L_q = \int_0^L q w dx \quad ; \quad V = - \int_0^L q w dx$$

pertanto il lagrangiano si scrive:

$$(e) \quad L = T - (V + U) = \int_0^L \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + q w - \frac{S}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

L'applicazione del principio di Hamilton, significa imporre:

$$(f) \quad \int_{t_0}^{t_1} L(x, t, w, w', \dot{w}) dx dt = \text{stazionario}$$

ovvero scrivere l'equazione di Eulero-Ostrogradsky:

$$(h) \quad \frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial w_t} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

con le condizioni agli estremi:

$$(i) \quad S \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_0^L = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

3. Principio di d'Alembert

Consideriamo, nello spazio x,y,z un sistema materiale sottoposto ad sollecitazioni attive e vincoli di varia natura.

Se m_m è la massa della m -esima particella posta in $P_m(x,y,z)$, \mathbf{a}_m la sua accelerazione, \mathbf{F}_m la forza attiva ed \mathbf{R}_m la reazione vincolare che si esercita su P_m , l'equazione di equilibrio si scrive:

$$(3.1) \quad m_m \mathbf{a}_m = \mathbf{F}_m + \mathbf{R}_m \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, M$$

ovvero in termini scalari¹:

$$(3.2) \quad m_m \frac{d^2 x_m}{dt^2} = f_{xm} + r_{xm} \quad ; \quad m_m \frac{d^2 y_m}{dt^2} = f_{ym} + r_{ym} \quad ; \quad \dots\dots$$

¹ Le (3.1) sono un caso particolare delle (2.1) per un sistema ad $3M$ gradi di libertà. Basta considerare x_1, x_2, x_3 come le coordinate cartesiane di P_1 di massa $m_1=m_2=m_3$, x_4, x_5, x_6 come le coordinate cartesiane di P_2 di massa $m_4=m_5=m_6$, con il risultato che $N=3M$.

Indicando con $[\cdot]$ la derivazione rispetto al tempo le (3.2) scritte come:

$$(3.3) \quad (\mathbf{F}_m - m_m \mathbf{a}_m) + \mathbf{R}_m = 0 \Rightarrow \mathbf{f}_{xm} - m_m \ddot{\mathbf{x}}_m + \mathbf{r}_{xm} = 0 \quad ; \quad \dots$$

indicano che durante il moto ed in ogni istante sono in equilibrio:

- a)–le forze attive \mathbf{F} ;
- b)–le forze d’inerzia $= -m\mathbf{a}$ ($= -$ massa moltiplicata per l’accelerazione);
- c)–le reazioni vincolari \mathbf{R} .

La somma delle prime due ($\mathbf{F}-m\mathbf{a}$) è indicata come *forza perduta*.

La dizione *forza perduta* data alla ($\mathbf{F}-m\mathbf{a}$) deriva dalla seguente considerazione: l’identità $\mathbf{F} \equiv m\mathbf{a} + (\mathbf{F}-m\mathbf{a})$, consente di considerare la forza attiva dovuta al contributo di due forze:

–la prima $m\mathbf{a}$ che da sola sarebbe capace di imprimere il moto che ha effettivamente la particella se fosse libera;

–la seconda ($\mathbf{F}-m\mathbf{a}$) rappresenta la parte della forza attiva che va *perduta* ai fini della variazione di velocità dovuta all’effetto dei soli vincoli. Infatti per la (3.2) la forza perduta uguaglia in ogni istante l’opposto della reazione vincolare: $\mathbf{F}_m - m_m \mathbf{a}_m = -\mathbf{R}_m$.

Nel caso particolare della statica valgono ancora le (3.2) dando all’accelerazione valore nullo. Le condizioni espresse dalla statica e dalla dinamica, per un elemento soggetto a forze attive e vincoli di tipo qualunque, possono allora essere elegantemente sintetizzate in un unico enunciato: “*In ogni istante, in condizioni di quiete o di moto, le forze perdute equilibrano le corrispondenti reazioni vincolari*”.

E’ questo il Principio di d’Alembert, in virtù del quale ogni problema dinamico è ricondotto ad un problema di equilibrio.

L’enunciato, pur non aggiungendo nulla alle leggi ed alle equazioni da cui è ricavato, viene indicato come “principio” per la sua validità generale e capacità di sintesi.

Da tale principio derivano le due seguenti regole pratiche:

1)–“*Le equazioni della statica per un elemento soggetto a forze attive e vincoli qualsiasi possono essere ricavate dalle corrispondenti equazioni della dinamica ponendo a zero velocità ed accelerazioni*¹”.

2)–“*Le equazioni della dinamica per un elemento soggetto a forze posizionali e vincoli privi di attrito possono essere ricavate dalle corrispondenti equazioni della statica sostituendo alla forza attiva la forza perduta (o, in maniera equivalente, aggiungendo la forza d’inerzia)*”.

¹ Si dimostra che le soluzioni delle equazioni della statica ricavate con tale regola sono tutte e le sole posizioni di equilibrio dell’elemento sotto l’assegnato campo di forze e di vincoli.

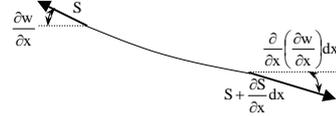
Si evidenzia il fatto che mentre il passaggio dalle equazioni della dinamica a quelle della statica non è soggetto a limitazioni, il passaggio dalle equazioni della statica a quelle della dinamica è possibile in generale solo nel caso di forze posizionali¹ e vincoli privi di attrito².

Utilizziamo il principio di d'Alembert per ricavare l'equazione della corda vibrante.

A tal fine basta scrivere l'equilibrio verticale di un elemento dx di corda sotto l'azione:

–della tensione elastica:

$$(l) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

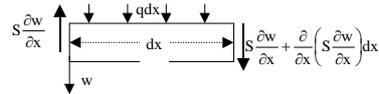


–delle forze esterne:

$$(m) \quad q dx$$

–della forza d'inerzia:

$$(n) \quad - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx$$



Sommando i tre contributi si ha la (h) del precedente paragrafo. Ancora più immediata è la scrittura dell'equilibrio dinamico partendo da quello statico con le regole di d'Alembert.

4. Vibrazione armonica

Il moto di un sistema ad un grado di libertà è detto *armonico* se espresso da una funzione del tipo:

$$(4.1) \quad x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

con ω, c_1, c_2 , costanti di cui la prima ed almeno una delle altre due non nulle.

Poiché le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π , cioè:

$$\cos \omega t = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos \omega(t + 2\pi/\omega)$$

si ha $x(t) = x(t + 2\pi/\omega)$. Pertanto, indipendentemente dal valore di c_1, c_2 , la (4.1) riassume lo stesso valore dopo un tempo T indicato come *periodo*:

$$(4.2) \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

¹ Nella statica è sufficiente conoscere la forza attiva nel particolare istante di quiete ma questo non significa in generale conoscere la legge con cui la forza dipende dai parametri del moto ed in particolare dalla velocità, ...

² In presenza di attrito le reazioni esplicitate dal vincolo seguono leggi diverse a seconda che il corpo risulti in quiete o in moto.

L'inverso del periodo è detta *frequenza* f :

$$(4.3) \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Se si introducono due nuove costanti a, θ legate alle precedenti c_1, c_2 dalle:

$$(4.4) \quad c_1 = a \cos \theta \quad ; \quad c_2 = -a \sin \theta$$

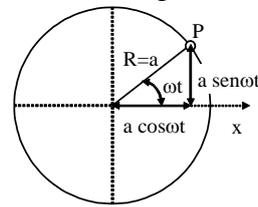
la vibrazione armonica (4.1) può essere anche scritta:

$$(4.5) \quad x = a(\cos \theta \cos \omega t - \sin \theta \sin \omega t) = a \cos(\omega t + \theta)$$

dove, a è l'*ampiezza*, $\omega t + \theta$ la *fase* all'istante t e la costante θ , che si ottiene per $t=0$, la *fase iniziale*. Tali grandezze sono correlate alle c_1, c_2 dalle:

$$(4.6) \quad a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad ; \quad \theta = -\arctan(c_2 / c_1)$$

La (4.5) può essere interpretata come il moto, a velocità angolare ω costante, di un punto P su una circonferenza di raggio a . Pertanto la frequenza indica il numero di giri per unità di tempo del punto mobile sulla circonferenza. Una unità di misura della frequenza è l'*hertz* il cui valore unitario corrisponde al moto di un punto che compie un giro in un secondo; quindi il numero di hertz indica il numero di giri compiuti ogni secondo.



5. Rappresentazione complessa di una vibrazione armonica

L'oscillazione armonica:

$$(5.1) \quad x = a \cos(\omega t + \theta)$$

è una quantità reale con un preciso significato fisico che può avere la seguente *rappresentazione complessa*:

$$(5.2) \quad X = a e^{j(\omega t + \theta)} = a [\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)]$$

nel senso che la grandezza fisica (5.1) è data dalla parte reale della rappresentazione (5.2):

$$(5.3) \quad x = \text{Re}(X) = a \cos(\omega t + \theta)$$

Risulta conveniente porre:

$$(5.4) \quad X = A e^{j\omega t}$$

dove $A=ae^{j\theta}$ è l'ampiezza complessa. La convenienza della posizione (5.4) risiede, tra l'altro, nella facilità con cui si rappresentano le derivate della (5.1) e nella composizione di moti armonici.

Infatti derivando la (5.1) e poiché anche la derivata è una quantità reale:

$$(5.5) \quad \frac{dx}{dt} = -a\omega \operatorname{sen}(\omega t + \theta) = a\omega \cos(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{Re} \left[a\omega e^{j(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})} \right]$$

ovvero, ricordando che $j=e^{j\pi/2}$, si ha:

$$(5.6) \quad \frac{dx}{dt} = \operatorname{Re} \left[e^{j\frac{\pi}{2}} \omega (ae^{j\theta}) e^{j\omega t} \right] = \operatorname{Re} [j\omega A e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [j\omega X]$$

La (5.6) si ottiene molto più semplicemente, ricordando la posizione (5.4), operando direttamente sulla (5.4):

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{Re} \left[\frac{dX}{dt} \right] = \operatorname{Re} [j\omega A e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [j\omega X]$$

in altri termini, se la rappresentazione complessa dell'oscillazione x è la X data dalla (5.4), la rappresentazione complessa di dx/dt è data dalla:

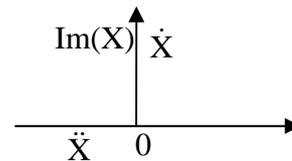
$$(5.7) \quad \frac{dX}{dt} = j\omega X$$

Dalla (5.5) si ha che la derivata temporale di x ha ampiezza (ωa) e fase $(\theta + \pi/2)$, pertanto nel piano complesso (diagramma di Argand), dove l'ascissa è la parte reale e l'ordinata la componente complessa, la (5.4) giace sull'ascissa mentre la sua derivata (5.7) sull'ordinata. Possiamo quindi dire che la derivata di un moto armonico è in quadratura con il moto stesso.

La derivata seconda della (5.4):

$$(5.8) \quad \frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 A e^{j\omega t}$$

è invece in opposizione di fase, perché opposta ad X con ampiezza amplificata di ω^2 .



6. Sistema elastico non dissipativo ad un grado di libertà

Il più semplice e classico sistema elastico è quello composto da una massa M ed una molla di rigidezza assiale K , indicato in figura.

La molla, sotto il carico statico $W=Mg$, raggiunge la posizione di equilibrio x_0 , data dall'equazione:

$$(6.1) \quad Kx_0 = W$$

Se al sistema in equilibrio viene applicata una forza $F_0(t)$ e/o si assegna uno spostamento e/o una velocità iniziale, la massa inizia a muoversi con conseguente presenza della forza d'inerzia.

Indicando con x lo spostamento dalla posizione di equilibrio x_0 , si ha:

$$(6.2) \quad K(x + x_0) = W - M\ddot{x} + F_0(t)$$

La (6.2), ricordando la (6.1) si scrive:

$$(6.3) \quad M\ddot{x} + Kx = F_0(t)$$

equazione questa che, una volta assegnate le condizioni iniziali, governa il moto della massa rispetto alla posizione iniziale di equilibrio.

Indicando con:

$$(6.4) \quad \omega^2 = \frac{K}{M} \quad ; \quad F(t) = \frac{F_0(t)}{M}$$

la (6.3) si scrive:

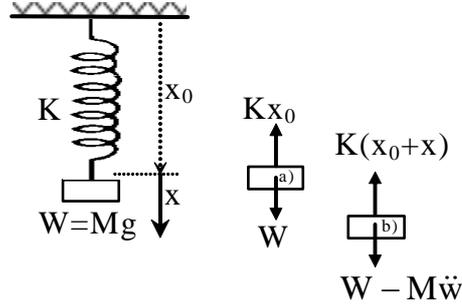
$$(6.5) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = F(t)$$

a cui vanno associate le condizioni iniziali ovvero al tempo $t=0$:

$$(6.6) \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Si dice che il sistema compie:

- vibrazioni libere se $F(t)=0$;
- vibrazioni forzate se $F(t)\neq 0$.



6.1. Vibrazioni libere di sistema non dissipativo

Il moto è governato dall'equazione differenziale:

$$(6.1.1) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

il cui integrale generale:

$$(6.1.2) \quad x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

può anche essere scritto:

$$(6.1.2') \quad x = a \cos(\omega t + \theta)$$

Assegnando le condizioni iniziali (6.6), si ricavano le costanti di integrazione c_1, c_2 oppure a, θ :

$$(6.1.3) \quad c_1 = x_0 \quad ; \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$(6.1.4) \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad ; \quad \theta = -\arctan \frac{c_2}{c_1} = \arccos \frac{x_0}{a} = -\arcsen \frac{v_0}{a\omega}$$

da cui è evidente che le condizioni iniziali governano l'ampiezza e la fase ma non influenzano la pulsazione ω che è una caratteristica del sistema.

In altre parole in assenza di una forza esterna, $F(t)=0$, il moto è armonico e caratterizzato da un parametro, la pulsazione ω o il periodo T o la frequenza f , che dipende solo dalle caratteristiche M, K del sistema e da altre quantità, ampiezza e fase, che invece dipendono dalle condizioni iniziali.

Applicando il principio di Hamilton, impone:

$$(a) \quad \int_0^t L dt = \int_0^t (T - U) dt = \int_0^t \left(\frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} \right) dt = \text{stazionario}$$

equivale a scrivere l'equazione di Eulero, ovvero l'equazione di equilibrio:

$$(b) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad M\ddot{x} + Kx = 0$$

Moltiplicando l'equazione differenziale (b) per \dot{x} :

$$(d) \quad M\ddot{x}\dot{x} - Kx\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{Kx^2}{2} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (T + U) = 0$$

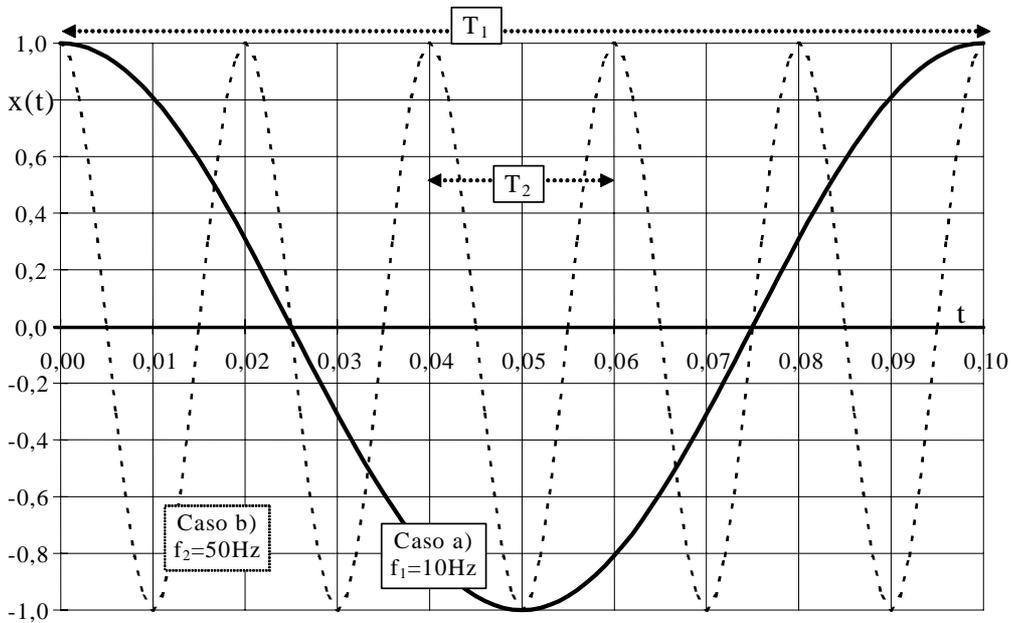
Pertanto durante il moto è costante l'energia totale si mantiene costante:

$$(e) \quad H = T + U = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{Kx^2}{2} = \text{costante}$$

Il grafico seguente riporta le oscillazioni libere di un sistema massa-molla con due diversi valori del rapporto K/M (quindi a frequenza diversa) ma stesse condizioni iniziali $x_0=1, v_0=0$ ($\Rightarrow a=1, \theta=0$):

Caso a) $f_1=10\text{Hz}$, ($T_1=0,1\text{sec}$; $\omega_1=20\pi \text{ sec}^{-1}$);

Caso b) $f_2=50\text{Hz}$, ($T_2=0,02\text{sec}$; $\omega_2=100\pi \text{ sec}^{-1}$).



6.2. Vibrazioni forzate di sistema non dissipativo

Nel caso di forzante sinusoidale, l'equazione del moto risulta:

$$(6.2.1) \quad M\ddot{x} + Kx = P_0 \sin \Omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = P \sin \Omega t ; \quad P = \frac{P_0}{M}$$

il cui integrale generale, per $\omega \neq \Omega$, si scrive:

$$(6.2.2) \quad x(t) = [c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t] + \frac{P}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t$$

Nella (6.2.2) il termine in [] descrive un'oscillazione a frequenza ω . Le costanti c_1, c_2 si determinano imponendo le condizioni iniziali (6.6):

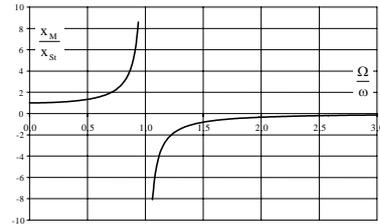
$$(6.2.3) \quad c_1 = x_0 ; \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega} - \frac{P}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{\Omega}{\omega}$$

Il restante termine della (6.2.2), corrispondente all'integrale particolare della (6.2.1) è l'oscillazione stazionaria che si può scrivere:

$$(6.2.4) \quad x_p(t) = \frac{P}{\omega^2 [1 - (\Omega/\omega)^2]} \text{sen } \Omega t = \frac{P_0/K}{[1 - (\Omega/\omega)^2]} \text{sen } \Omega t$$

il cui valore massimo x_M si ha per $\text{sen } \Omega t = 1$. Se indichiamo con $x_{St} = P_0/K$ lo spostamento statico dovuto all'applicazione di P_0 , si definisce fattore di amplificazione il rapporto:

$$(6.2.5) \quad \frac{x_M}{x_{St}} = \frac{1}{[1 - (\Omega/\omega)^2]}$$



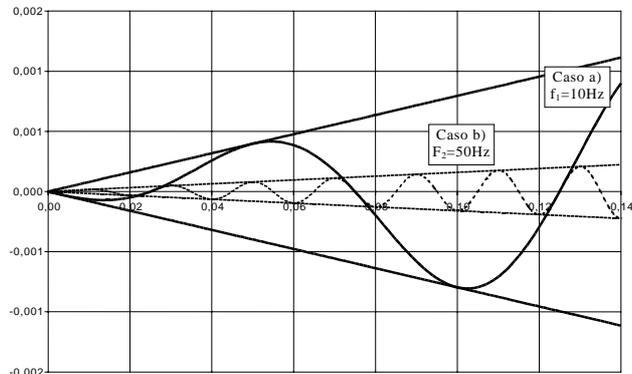
Quando $\Omega/\omega < 1$, la forza ed il moto sono in fase e tale fattore è positivo; quando $\Omega/\omega > 1$, la forza ed il moto sono in opposizione di fase e tale fattore è negativo.

Per $\Omega/\omega = 1$ si ha la risonanza e la (6.2.4) è data dalla formula approssimata:

$$(6.2.6) \quad x_p(t) \cong -\frac{Pt}{2\omega} \cos \omega t$$

per cui, in condizioni di risonanza, per valori del tempo sufficientemente lunghi, le vibrazioni del sistema sono armoniche di frequenza ω con ampiezza crescente linearmente con il tempo ed un ritardo di fase di $\pi/2$.

Il grafico riporta i due casi prima esaminati in condizioni di risonanza.



7. Vibrazioni di un sistema dissipativo

Il sistema massa-molla esaminato non tiene conto della realtà dei fenomeni fisici nella quale la presenza di effetti smorzanti invalida il principio di conservazione dell'energia. Nella pratica quindi le oscillazioni non si perpetuano, ma la loro ampiezza decresce fino a smorzarsi per effetto della dissipazione. In questa sede ci si limita ad un semplice modello di smorzatore "viscoso" che esplica una forza proporzionale alla velocità.

7.1. Vibrazioni libere di un sistema dissipativo

Se nel sistema massa molla è presente uno smorzamento viscoso, si ha:

$$M\ddot{x} + 2h\dot{x} + Kx = 0$$

che con le posizioni:

$$\varepsilon = \frac{h}{M} \quad ; \quad \omega^2 = \frac{K}{M}$$

si scrive:

$$(7.1.1) \quad \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

cui vanno associate le condizioni iniziali:

$$(7.1.2) \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Ponendo nella (7.1.1):

$$x = e^{pt}$$

si ha:

$$(7.1.3) \quad p^2 + 2\varepsilon p + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2}$$

Il moto è diverso a seconda del valore del parametro di smorzamento ε :

1)–Se $\varepsilon=\omega$ lo *smorzamento è detto critico*. L'integrale generale della (7.1.1) risulta:

$$(7.1.4) \quad x(t) = e^{-\varepsilon t} [c_1 + c_2 t]$$

Infatti per $\varepsilon=\omega$ la (7.1.3) da due radici coincidenti $p_1=p_2=-\varepsilon$ cui corrisponde una soluzione $x_1=c_1e^{-\varepsilon t}$. Una seconda soluzione si può ricercare con il metodo di variazione dei parametri che consiste nell'assumere la soluzione nella forma $x_2=c(x)e^{-\varepsilon t}$ e determinare $c(x)$ in modo da soddisfare la (7.1.1):

$$x_2 = c(x)e^{-\varepsilon t} \Rightarrow \dot{x}_2 = (\dot{c} - \varepsilon c)e^{-\varepsilon t} \Rightarrow \ddot{x}_2 = (\ddot{c} - 2\varepsilon\dot{c} + \varepsilon^2 c)e^{-\varepsilon t}$$

che sostituite nella (7.1.1) e ricordando che $\varepsilon=\omega$: $\ddot{c} = 0 \Rightarrow c = c_1 + c_2 t$ quindi $x_2 = c_2 t e^{-\varepsilon t}$

Imponendo le condizioni (7.1.2):

$$(7.1.5) \quad x(t) = e^{-\varepsilon t} [x_0 + (v_0 + \varepsilon x_0)t]$$

per la quale, poiché l'esponenziale e^{-t} ($e^{-\varepsilon t}$) è un infinito (infinitesimo) di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza di t , si ha (risultando $\varepsilon > 0$):

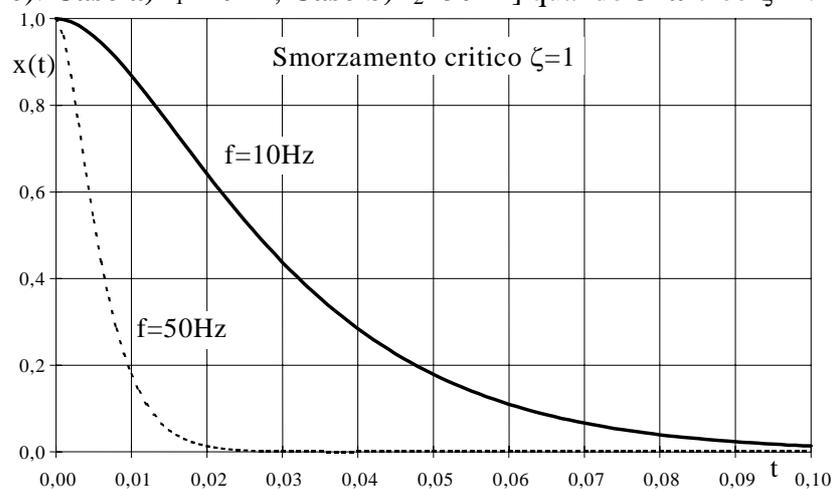
$$(7.1.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Il valore di $\varepsilon=\omega$ è il *coefficiente critico di smorzamento* ε_{cr} ed il rapporto:

$$(7.1.7) \quad \zeta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}}$$

è la *frazione dello smorzamento critico*. Normalmente ζ viene espresso in termini percentuali e prende il nome di *percentuale di smorzamento*.

Il grafico seguente riporta il valore della (7.1.5) nei due casi di sistema massa-molla prima esaminati in assenza di smorzamento [$x_0=1, v_0=0$ ($\Rightarrow a=1, \theta=0$): **Caso a)** $f_1=10\text{Hz}$; **Caso b)** $f_2=50\text{Hz}$] quando $\varepsilon=\omega$ cioè $\zeta=1$.



2)–A seconda poi che $\zeta < 1$ o $\zeta > 1$ il sistema è sottosmorzato o sovrasmorzato.

2a)–Il sistema è detto *sotto-smorzato* se $\varepsilon < \omega$ (ovvero $\zeta < 1$).

Risultando $\varepsilon^2 - \omega^2 < 0$ dalle (7.1.3,7) si ha:

$$(7.1.8) \quad p_{1,2} = -\varepsilon \pm j\Omega \quad \text{dove} \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} = \omega\sqrt{1 - \zeta^2} > 0$$

per cui la soluzione risulta:

$$(7.1.9) \quad \begin{aligned} x(t) &= e^{-\varepsilon t} [c_1 e^{j\Omega t} + c_2 e^{-j\Omega t}] = e^{-\varepsilon t} [C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t] = \\ &= Ae^{-\varepsilon t} [\cos(\Omega t + \theta)] \end{aligned}$$

Per $\varepsilon > 0$, la soluzione (7.1.9) descrive un moto oscillatorio smorzato¹. Infatti vale senz'altro la (7.1.6) e ponendo, in similitudine con la (4.2):

$$(7.1.10) \quad \tilde{T} = \frac{2\pi}{\Omega}$$

risulta:

$$(7.1.11) \quad x(t + \tilde{T}) = e^{-\varepsilon t} x(t) \quad ; \quad \dot{x}(t + \tilde{T}) = e^{-\varepsilon t} \dot{x}(t)$$

inoltre, dalla (7.1.9):

$$(7.1.12) \quad \dot{x}(t) = -Ae^{-\varepsilon t} [\varepsilon \cos(\Omega t + \theta) + \Omega \sin(\Omega t + \theta)]$$

che si annulla per tutti i valori di t che soddisfano l'equazione:

$$(7.1.13) \quad \tan(\Omega t + \theta) = -\frac{\varepsilon}{\Omega}$$

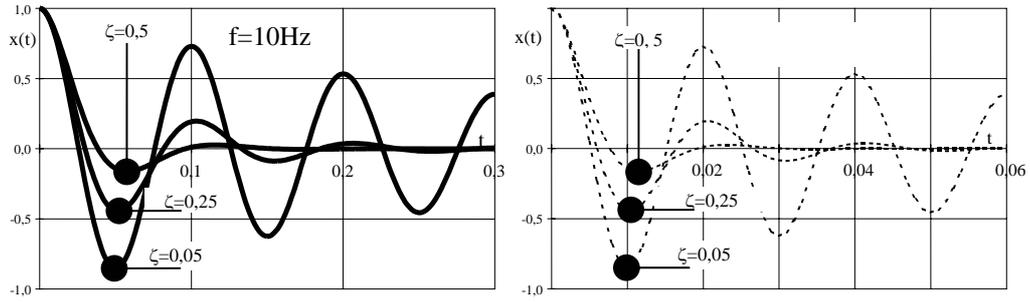
Quindi il moto del sistema pur *non* risultando armonico assume valori massimi e minimi ad intervalli regolari di tempo uguali a $\tilde{T} = 2\pi/\Omega$ e si annulla ogni $\tilde{T}/2$; per questa ragione \tilde{T} è indicato come pseudoperiodo.

Imponendo le condizioni (7.1.2):

$$(7.1.14) \quad x(t) = e^{-\varepsilon t} \left[x_0 \cos \Omega t + \frac{v_0 + \varepsilon x_0}{\Omega} \sin \Omega t \right]$$

¹ Se $\varepsilon < 0$ la soluzione (8.1.9) invece che oscillatoria smorzata risulterebbe oscillatoria amplificata. In questi casi per analogia diremo che il sistema presenta uno "smorzamento" negativo.

I grafici seguenti riportano la (7.1.14), per i due casi prima esaminati [$x_0=1, v_0=0$: **Caso a)** $f_1=10\text{Hz}$; **Caso b)** $f_2=50\text{Hz}$] per vari valori di $\zeta < 1$.



2b)–Il sistema è detto *sovra-smorzato* se $\varepsilon > \omega$ (ovvero $\zeta > 1$).
 Risultando $\varepsilon^2 - \omega^2 > 0$ dalle (7.1.3,7) si ha:

$$(7.1.15) \quad p_{1,2} = -\varepsilon \pm \Omega \quad \text{dove} \quad \Omega = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega^2} = \omega \sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$$

per cui l'integrale generale si scrive:

$$(7.1.16) \quad x(t) = e^{-\varepsilon t} [c_1 e^{\Omega t} + c_2 e^{-\Omega t}] = e^{-\varepsilon t} [C_1 \cosh \Omega t + C_2 \sinh \Omega t]$$

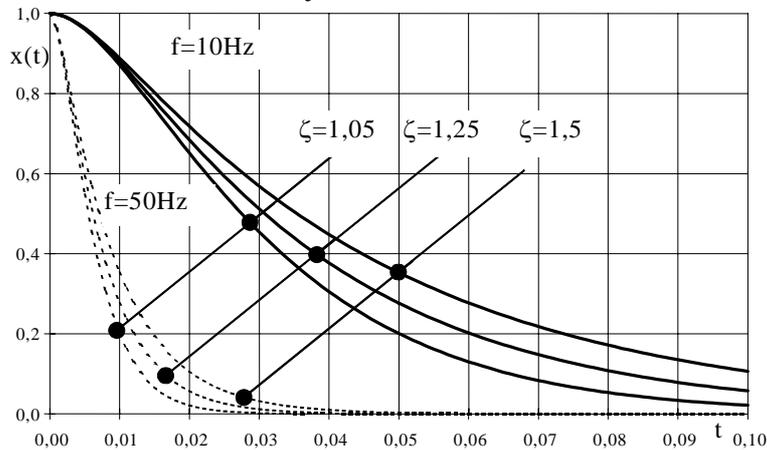
e, poiché $\varepsilon > \Omega$, è evidente che vale ancora la (7.1.6).

Imponendo le condizioni (7.1.2), la (7.1.16) si scrive:

$$(7.1.17) \quad x(t) = e^{-\varepsilon t} \left[x_0 \cosh \Omega t + \frac{v_0 + \varepsilon x_0}{\Omega} \sinh \Omega t \right]$$

funzione che si annulla al massimo una volta.

Il grafico seguente riporta il valore della (7.1.16), per i due sistemi in esame, con differenti valori di $\zeta > 1$.



7.2. Vibrazioni forzate di sistema dissipativo

Nel caso di forzante sinusoidale, l'equazione del moto risulta:

$$(7.2.1) \quad M\ddot{x} + 2h\dot{x} + Kx = P_0 \text{sen}\Omega t \Rightarrow \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = P \text{sen}\Omega t ; P = \frac{P_0}{M}$$

L'integrale generale è dato dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea più un integrale particolare della non omogenea. Il primo, come prima visto, descrive un moto che ritorna si smorza. Il secondo invece descrive il moto che persiste sotto l'azione della forza esterna:

$$(7.2.2) \quad x_p(t) = \frac{P_0/K}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + 4\zeta^2(\Omega/\omega)^2}} \text{sen}(\Omega t - \theta)$$

dove:

$$(7.2.3) \quad \theta = \tan^{-1} \frac{2\zeta(\Omega/\omega)}{1 - (\Omega/\omega)^2}$$

Infatti se consideriamo l'equazione differenziale ausiliaria nella variabile complessa y:

$$(a) \quad \ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega^2 y = P e^{j\Omega t}$$

e ricordiamo la (5.2), possiamo dire che il coefficiente della parte immaginaria di y corrisponde alla x della (7.2.1). Cerchiamo di soddisfare la (a) ponendo $y = b e^{j\Omega t}$, per cui:

$$(b) \quad b[-\Omega^2 + 2\varepsilon j\Omega + \omega^2] e^{j\Omega t} = P e^{j\Omega t} \Rightarrow b = \frac{P}{\omega^2 - \Omega^2 + 2\varepsilon j\Omega} = r e^{-j\theta}$$

dove si è posto:

$$(c) \quad r = \frac{P}{\sqrt{[\omega^2 - \Omega^2]^2 + (2\varepsilon\Omega)^2}} ; \quad \tan \theta = \frac{2\varepsilon\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$$

Pertanto la soluzione della (7.2.1) si scrive:

$$(d) \quad x = \text{Im}(r e^{-j\theta} e^{j\Omega t}) = \text{Im}(r e^{j(\Omega t - \theta)}) = r \text{sen}(\Omega t - \theta) = \frac{P \text{sen}(\Omega t - \theta)}{[\omega^2 - \Omega^2]^2 + (2\varepsilon\Omega)^2}$$

che ricordando la (7.1.7) si può scrivere nella forma (7.2.2). E' peraltro evidente che per $\varepsilon=0$ si ottiene l'espressione (6.2.4).

Anche nel caso dissipativo possiamo introdurre il fattore di amplificazione:

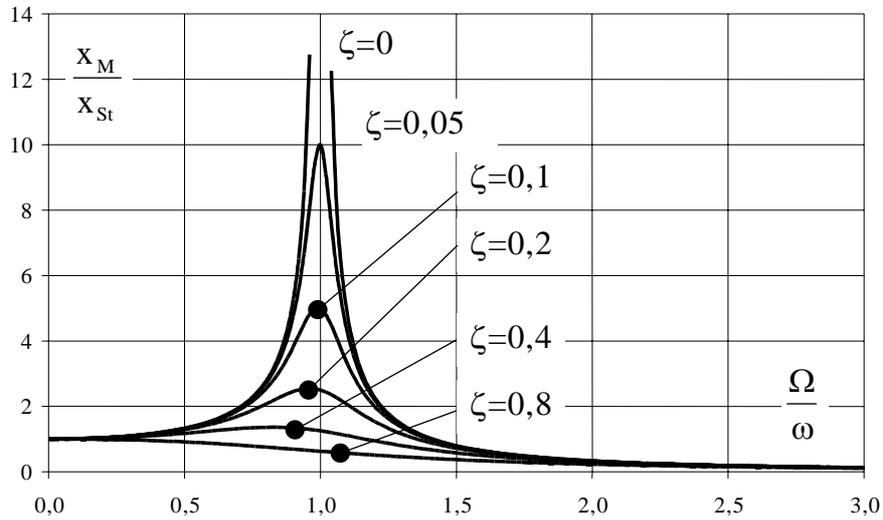
$$(7.2.4) \quad \frac{x_M}{x_{St}} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega)^2]^2 + 4\zeta^2(\Omega/\omega)^2}}$$

che raggiunge il massimo valore quando è minimo il denominatore.

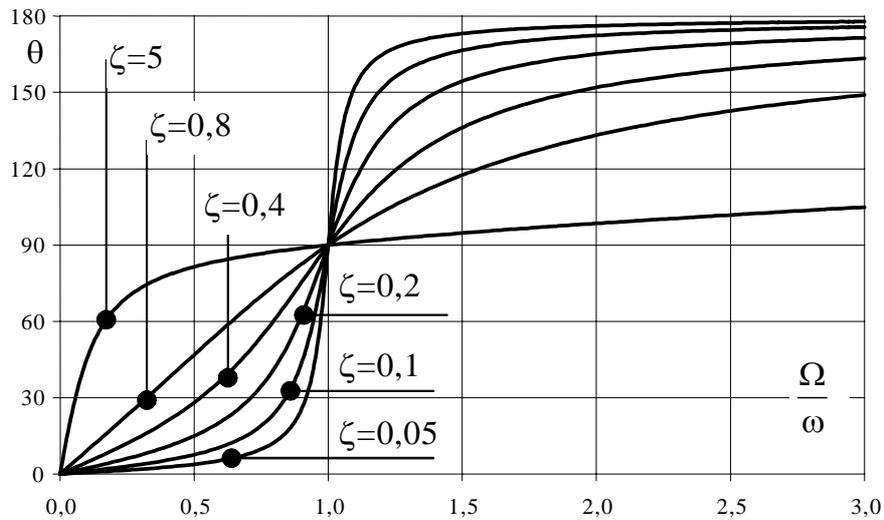
Il massimo valore della (7.2.4) si ha per $(\Omega/\omega)^2 = 1 - 2\zeta^2$, quindi, risultando il primo membro positivo, si ha un massimo >1 solo se $\zeta^2 < 0,5 \Rightarrow \zeta < 0,707$.

Il valore ω per cui la risposta ha un picco è detta frequenza di risonanza.

Tutte queste considerazioni sono ben evidenti nel grafico seguente dove è riportata la (7.2.4) in funzione del rapporto Ω/ω .



Il grafico seguente riporta la variazione di fase (7.2.3) in funzione di Ω/ω .



8. Vibrazioni libere di un sistema ad N gradi di Libertà

Quanto detto per un sistema ad un grado di libertà può essere facilmente esteso ad un sistema di masse–molle ad N gradi di libertà.

Indicando con q le N variabili lagrangiane del sistema, si ha:

$$(8.1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} \{\dot{Q}\}^T [M] \{\dot{Q}\}$$

$$(8.2) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} q_i q_j \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} \{Q\}^T [K] \{Q\}$$

Applicando le equazioni di Eulero-Lagrange alla lagrangiana $L = T - U$:

$$(8.3) \quad \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \sum_{j=1}^N k_{nj} q_n + \sum_{j=1}^N m_{nj} \ddot{q}_n = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

ovvero in termini di algebra matriciale:

$$(8.3') \quad [K] \{Q\} + [M] \{\ddot{Q}\} = 0$$

dove, per le proprietà delle (8.1,2) di essere forme quadratiche, le matrici $[K], [M]$ risultano simmetriche definite positive. Data poi la mancanza di termini dissipativi, le vibrazioni libere sono vibrazioni armoniche e possiamo ricercare le soluzioni delle equazioni (8.3) nella forma:

$$(8.4) \quad q_n = y_n e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \{Q\} = \{Y\} e^{j\omega t}$$

Sostituendo la (8.4) nelle (8.3):

$$(8.5) \quad \sum_j (k_{nj} - \omega^2 m_{nj}) y_n = 0 \quad \Rightarrow \quad ([K] - \omega^2 [M]) \{Y\} = 0$$

Sistema questo¹ che ammette soluzione non banale se:

$$(8.6) \quad |[K] - \omega^2 [M]| = 0$$

che sviluppata dà un polinomio di ordine N in ω^2 (ovvero 2N in ω). Da tale polinomio, detto *polinomio caratteristico*, si ottengono N *valori caratteristici* (o autovalori) ω_n^2 (non necessariamente di molteplicità uno).

¹ La (9.5) è un problema di autovalori e, nel caso in cui $[M]$ non risulti diagonale, è indicato come problema di “autovalori generalizzato”.

Ad ogni valore *caratteristico* ω_n^2 corrisponde una soluzione *caratteristica* (o *autovettore*) $\{Y\}_n$ del sistema:

$$(8.7) \quad ([K] - \omega_n^2 [M])\{Y\}_n = 0$$

non definita in modo univoco proprio per la condizione (8.6).

Quindi per ogni ω_n^2 si determinano due integrali particolari $\pm\omega_n$ la cui combinazione lineare è soluzione della (8.3):

$$(8.8) \quad \{Y\}_n (c_{1n} e^{j\omega_n t} + c_{2n} e^{-j\omega_n t}) \Rightarrow \{Y\}_n (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t)$$

e l'integrale generale è dato dalla combinazione lineare di dette soluzioni:

$$(8.9) \quad \{Q\} = \sum_{n=1}^N \{Y\}_n (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) = \sum_{n=1}^N \{Y\}_n (\sin \omega_n t + \theta_n)$$

che esprime analiticamente il seguente teorema:

“In campo lineare le oscillazioni, nell'intorno della posizione di equilibrio, di un sistema olonoma ad N gradi di libertà si possono decomporre nella somma di N oscillazioni armoniche”.

Le proprietà delle matrici [K],[M] garantiscono:

a)–che gli autovalori ω_n^2 risultano reali, per cui ad ogni ω_n^2 corrispondono due numeri reali $\pm\omega_n$.

Infatti moltiplicando la (8.7) per $\{Y\}_n^T$ si ha:

$$\{Y\}_n^T [M] \{Y\}_n - \omega_n^2 \{Y\}_n^T [K] \{Y\}_n = 0$$

da cui:

$$\omega^2 = \frac{\{Q\}^T [K] \{Q\}}{\{Q\}^T [M] \{Q\}} > 0$$

b)–è sempre possibile trovare N autovettori $\{Y_n\}$ linearmente indipendenti. Tali autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa.

Infatti, moltiplicando ambo i membri della (8.7) per una generica costante c non nulla:

$$c[K]\{Y\}_n = c\omega_n^2[M]\{Y\}_n \Rightarrow [K]\{cY\}_n = \omega_n^2[M]\{cY\}_n$$

il che dimostra che se $\{Y\}_n$ è un autovettore lo è anche $\{cY\}_n$.

8.1. Proprietà di ortogonalità degli autovettori

Indichiamo con $[Y]$ la matrice le cui colonne sono gli autovettori $\{Y\}_n$ e con¹ $\langle \Omega^2 \rangle$ la matrice *diagonale* degli autovalori.

La (8.7) si scrive:

$$(8.1.1) \quad [K][Y] - [M][Y]\langle \Omega^2 \rangle = 0$$

Premoltiplicando ambo i membri per $[Y]^T$:

$$(8.1.2) \quad [Y]^T [K][Y] - [Y]^T [M][Y]\langle \Omega^2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle K^* \rangle - \langle M^* \rangle \langle \Omega^2 \rangle = 0$$

dove le $\langle K^* \rangle, \langle M^* \rangle$ sono dette matrici di rigidezza e di massa generalizzate.

La (8.1.2) indica una proprietà fondamentale dei modi di vibrazione libera, ovvero che risultano ortogonali sia rispetto alla matrice di massa che alla matrice di rigidezza:

$$(8.1.3) \quad \langle K^* \rangle = [Y]^T [K][Y] \quad ; \quad \langle M^* \rangle = [Y]^T [M][Y]$$

Infatti, risultando $[K]$ simmetrica, anche $[K^*] = [Y]^T [K][Y]$ è simmetrica e parimenti è simmetrica $[M^*] = [Y]^T [M][Y]$. Qualora $[M^*]$ non risultasse diagonale, dall'ultima espressione (8.1.2) si avrebbe:

$$(a) \quad k_{ij}^* = \omega_j^2 m_{ij}^* \quad ; \quad k_{ji}^* = \omega_i^2 m_{ji}^*$$

poiché, come detto per $i \neq j$, $m_{ij}^* = m_{ji}^*$, le (a) garantiscono la simmetria $k_{ij}^* = k_{ji}^*$ per qualsiasi valore di $\omega_j \neq \omega_i$ solo se $m_{ij}^* = m_{ji}^* = k_{ij}^* = k_{ji}^* = 0$.

9. Dinamica libera delle vibrazioni assiali della trave

Per il principio di d'Alembert le equazioni della dinamica si possono ottenere da quelle della statica tenendo in conto le forze d'inerzia. Nel caso particolare dell'asta a sezione costante, la cui equazione di equilibrio risulta:

$$AE \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + p_x = 0$$

si ha l'equazione della dinamica:

$$AE \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p_x - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

¹ Il simbolo $\langle \rangle$ qui introdotto ha significato di *matrice diagonale*. Una tale simbologia è adottata solo nei casi in cui si vuole evidenziare che la matrice in esame è diagonale.

Studiare la dinamica libera significa esaminare le proprietà intrinseche della struttura sotto l'azione delle sole forze elastiche e d'inerzia.

In altri termini, il sistema in esame è omogeneo, quindi nel campo $p_x=0$:

$$(9.1) \quad AE \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

e parimenti omogenee dovranno essere le condizioni agli estremi; le condizioni iniziali non hanno interesse per l'esame della dinamica libera.

La soluzione della (9.1) può essere ricercata per separazione di variabili:

$$(9.2) \quad u(x,t) = T(t)X(x)$$

Sostituendo la (9.2) nella (9.1) si ha facilmente:

$$(9.3) \quad -\frac{AE X''(x)}{\mu X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$$

Dovendo la (9.3) essere verificata per qualsiasi valore di $0 < x < L, t > 0$:

$$(9.4) \quad -\frac{AE X''(x)}{\mu X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \text{costante}$$

costante che si dimostra essere positiva. Infatti moltiplicando e dividendo il primo termine per X ed integrando sulla lunghezza, poichè:

$$\int_0^L X'' X dx = \int_0^L X dX' = XX'|_0^L - \int_0^L X' dX = 0 - \int_0^L X'^2 dx < 0$$

si ha che:

$$-\frac{AE}{\mu} \int_0^L \frac{X'' X dx}{X^2 dx} = \int_0^L \frac{X'^2 dx}{X^2 dx} > 0 = \omega^2$$

Con tale posizione, la (9.4) comporta che deve risultare:

$$(9.5) \quad \ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$\frac{AE}{\mu} X'' + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

dove si è posto:

$$(9.6) \quad \lambda^2 = \frac{\mu \omega^2}{AE}$$

La prima delle (9.5), formalmente analoga alla (2.3), ha soluzione:

$$(9.7) \quad T(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

dove però ora la pulsazione ω non è nota.

La seconda delle (9.5) ha come soluzione:

$$(9.8) \quad X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

dove ancora il parametro λ (legato dalla (9.6) ad ω) non è noto.

Come detto, nello studio della dinamica libera le condizioni agli estremi da associare alla (9.8) devono risultare omogenee; in definitiva si tratta di trovare le soluzioni di un sistema omogeneo dove λ assume il significato di valore caratteristico. Infatti imponendo le condizioni agli estremi alla (9.8) si ottiene un sistema algebrico nelle incognite c_1, c_2 del tipo:

$$(9.9) \quad [A(\lambda)]\{C\} = 0$$

dove $[A]$ è la matrice dei coefficienti e $\{C\}$ il vettore incognito delle costanti di integrazione.

Il sistema (9.9) oltre la soluzione $c_1 = c_2 = 0$ cui corrisponde $\{C\}=0$, che indicheremo come *soluzione banale*, ammette soluzioni non banali se il determinante $|A(\lambda)|$ risulta $=0$. Poiché detto determinante dipende dal parametro λ , possiamo trovare i valori di λ per cui $|A(\lambda)| = 0$.

Per ogni n-esimo valore di λ_n per cui $|A(\lambda)| = 0$, è possibile trovare una soluzione non banale c_1, c_2 ; di tali due costanti solo una può essere determinata quindi la soluzione (9.8) è trovata a meno di una costante.

Il parametro λ_n , che in termini matematici è un autovalore, nel caso presente è sinonimo di pulsazione ω_n ; la corrisponde soluzione $\{X\}_n$, che in termini matematici è un'autofunzione, rappresenta la "forma" lungo x secondo cui la struttura vibra ed è detta *modo*.

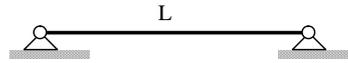
Non si confonda il modo con la deformata conseguente all'applicazione di un carico p_x , dal momento che la deformata è la soluzione di un problema non omogeneo che non solo indica la "forma" ma determina univocamente anche il valore dello spostamento che il modo non può dare perché definito a meno di almeno una costante.

I modi di vibrazione di un continuo godono delle stesse proprietà di ortogonalità dei sistemi discreti rappresentate dalle (8.1.3), ovvero:

$$(9.10) \quad \int_0^L \mu X_n X_m dx = \begin{cases} = 0 & \text{per } m \neq n \\ \neq 0 & \text{per } m = n \end{cases}$$

10. Vibrazioni libere della trave appoggiata

Si consideri la trave di figura, di caratteristiche geometriche e meccaniche costanti, incastrata ad un estremo e vincolata elasticamente all'altro.



Separando le variabili o più direttamente ponendo $w(x,t)=X(x)e^{j\omega t}$, l'equazione delle vibrazioni libere della trave si scrive:

$$(10.1) \quad X^{IV} - \lambda^4 X = 0 \quad ; \quad \text{con} \quad \lambda^4 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI} ; \quad \xi = \frac{x}{L} ; \quad []' = \frac{d}{d\xi}$$

il cui integrale generale si scrive:

$$(10.2) \quad w = c_1 \text{sen} \lambda \xi + c_2 \text{cos} \lambda \xi + c_3 \text{senh} \lambda \xi + c_4 \text{cosh} \lambda \xi$$

cui vanno associate le condizioni agli estremi:

$$(10.3) \quad \xi = 0, 1 \quad \begin{cases} X = 0 \\ X'' = 0 \end{cases}$$

avendo introdotto i parametri adimensionali:

$$(10.4) \quad h = \frac{LC}{EI} \quad ; \quad k = \frac{L^3 K}{EI}$$

Imponendo sulla (10.2) le (10.3) ed indicando con $c = \text{cos} \lambda$, $C = \text{cosh} \lambda$:

$$(10.5) \quad \xi = 0 \quad \begin{cases} c_2 + c_4 = 0 \\ c_2 - c_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = c_1 \text{sen} \lambda \xi + c_3 \text{senh} \lambda \xi$$

$$(10.6) \quad \xi = 1 \quad \begin{cases} c_1 \text{sen} \lambda + c_3 \text{senh} \lambda = 0 \\ c_1 \text{sen} \lambda - c_3 \text{senh} \lambda = 0 \end{cases}$$

che rappresenta un sistema omogeneo in c_1 , c_3 che ammette soluzioni non banali solo nel caso in cui il determinante dei coefficienti è nullo:

$$(10.7) \quad \Delta(\lambda) = 2 \text{sen} \lambda \text{senh} \lambda = 0$$

Scartando la soluzione $\lambda=0$, che darebbe la soluzione banale, la (10.7) si annulla per $\lambda=n\pi$ ($n=1,2,\dots$) cui corrispondono i modi.

$$(10.8) \quad w = \text{sen} \lambda \xi$$

11. Vibrazioni libere della piastra

L'equazione, nello spazio, delle vibrazioni libere della piastra si scrive:

$$(11.1) \quad \nabla^4 W(x, y) - \lambda^4 W(x, y) = 0 \quad ; \quad \text{con } \lambda^4 = \frac{\mu \omega^2}{D}$$

Nel caso di piastra semplicemente appoggiata al contorno, per cui:

$$(11.2) \quad \begin{aligned} x = 0 & \begin{cases} W = 0 \\ \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \end{cases} ; & x = a & \begin{cases} W = 0 \\ \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \end{cases} \\ y = 0 & \begin{cases} W = 0 \\ \frac{d^2 W}{dy^2} = 0 \end{cases} ; & x = b & \begin{cases} W = 0 \\ \frac{d^2 W}{dy^2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

possiamo ricercare la soluzione della (11.1) come:

$$(11.3) \quad W(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

Sostituendo la (11.3) nella (11.1), si ha:

$$(11.4) \quad \sum_m \sum_n a_{mn} \left\{ \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - \lambda_{mn}^4 \right\} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = 0$$

e quindi per il principio di identità delle serie:

$$(11.5) \quad \lambda_{mn}^4 = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2$$

da cui:

$$(11.6) \quad \omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\mu} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]}$$