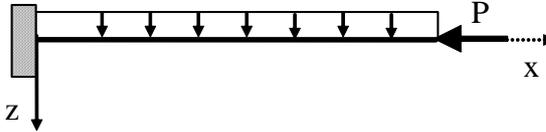


CAPITOLO XI
STABILITA' DI TRAVI E PIASTRE

1. Equazione della trave soggetta a compressione

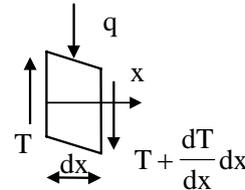
Consideriamo la trave di figura soggetta ad un carico distribuito q ed uno di compressione P .

Per un elemento di trave, tagliata con piani normali all'asse x , si hanno le equazioni di equilibrio:



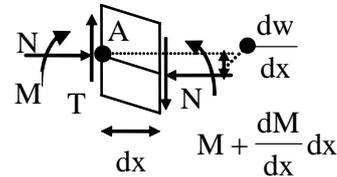
– delle forze verticali:

$$(1.1) \sum F_z = -T + qdx + T + \frac{dT}{dx}dx = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -q$$



– dei momenti, rispetto al punto A:

$$(1.2) \sum M = \frac{dM}{dx}dx - Tdx - N \frac{dw}{dx}dx = 0$$



da cui, poiché $M = -EI(d^2w/dx^2)$:

$$(1.3) \quad T = \frac{dM}{dx} - N \frac{dw}{dx} = -EI \frac{d^3w}{dx^3} - N \frac{dw}{dx}$$

dove N rappresenta la risultante degli sforzi assiali.

Assumendo $N = \text{costante} = P$, derivando la (1.3) ed utilizzando la (1.1), si ha:

$$(1.4) \quad EI \frac{d^4w}{dx^4} + P \frac{d^2w}{dx^2} = q$$

che è l'equazione di equilibrio statico della trave soggetta sia al carico q in direzione z che al carico P di compressione assiale.

Nel caso di presenza di forze di inerzia, per il principio di d'Alembert:

$$(1.5) \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

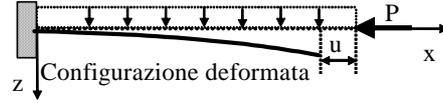
L'equazione (1.4) poteva essere ricavata anche minimizzando l'energia potenziale (nel caso di sistema conservativo):

$$(1.6) \quad E = \frac{EI}{2} \int_0^L w''^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L w'^2 dx - \int_0^L q w dx$$

Ricordando l'equazione di Eulero data dalla (3.21) del Vol. I Cap. VI (Metodi Energetici nelle Strutture) si ottiene la (1.4) con le relative condizioni al contorno (3.22) che nel caso di estremo libero si scrivono:

$$(1.7) \quad EIw'' = 0 \quad ; \quad EIw''' + Pw' = 0$$

Il lavoro del carico P è dato dalla forza per lo spostamento u di figura. Spostamento che è dato dalla differenza tra la lunghezza iniziale L della trave e la proiezione della sua linea media deformata:



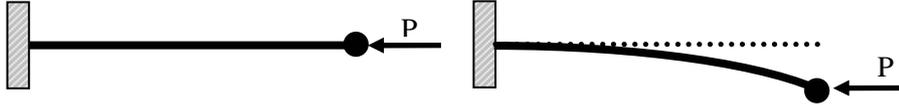
$$u = L - \int_0^L \cos \theta ds = L - \int_0^L \sqrt{1 - \sin^2 \theta} ds \cong L - \int_0^L \sqrt{1 - \theta^2} ds \cong L - \int_0^L \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds}\right)^2} ds$$

Sviluppando in serie il termine sotto radice:

$$u = L - \int_0^L \left[1 - \frac{1}{2} w'^2 - \frac{1}{8} w'^4 + \dots \right] ds \cong \frac{1}{2} \int_0^L w'^2 dx$$

2. Carico critico della Trave a sbalzo

A1)–Lo studio dell'equazione differenziale (1.5) con le condizioni agli estremi (1.6) si presenta alquanto complesso e per semplificare lo studio immaginiamo di concentrare tutta la massa distribuita della trave in una unica massa M posta all'estremo libero, come mostrato in figura.



L'equazione di equilibrio dei momenti rispetto ad una sezione posta a distanza x dall'incastro si scrive:

$$(2.1) \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = P(w_L - w) - M \frac{\partial^2 w_L}{\partial t^2} (L - x)$$

cui vanno associate le condizioni agli estremi:

$$(2.2) \quad \begin{cases} x = 0: w = 0 & ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ x = L: w = w_L \end{cases}$$

Ricercando la soluzione nella forma:

$$(2.3) \quad w = X(x)e^{st}$$

la (2.1) si scrive:

$$(2.4) \quad EIX'' + PX = PX_L - Ms^2X_L(L - x)$$

ovvero:

$$(2.5) \quad X'' + p^2X = p^2X_L - \lambda^2(1 - \xi)X_L$$

dove si posto:

$$(2.6) \quad \xi = \frac{x}{L} \quad ; \quad p^2 = \frac{PL^2}{EI} \quad ; \quad \lambda^2 = -\frac{ML^3s^2}{EI}$$

L'integrale generale della (2.5) si scrive:

$$(2.7) \quad X = c_1 \operatorname{sen} p \xi + c_2 \cos p \xi + X_L - (\lambda/p)^2 (1 - \xi) X_L$$

le cui costanti di integrazione c_1 , c_2 , X_L si trovano dalle (2.2) che con le posizioni (2.6) si scrivono:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \xi = 0 & X = 0 & \Rightarrow & c_2 + [1 - (\lambda/p)^2] X_L = 0 \\ \xi = 0 & X' = 0 & \Rightarrow & p c_1 + (\lambda/p)^2 X_L = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L & \Rightarrow & c_1 \operatorname{sen} p + c_2 \cos p + X_L = X_L \end{cases}$$

ovvero in forma matriciale:

$$(2.9) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 - (\lambda/p)^2 \\ p & 0 & (\lambda/p)^2 \\ \operatorname{sen} p & \cos p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ X_L \end{Bmatrix} = 0$$

che ammette soluzione non banale se è nullo il determinante della matrice dei coefficienti, ovvero se:

$$(2.10) \quad \left(\frac{\lambda}{p} \right)^2 \operatorname{sen} p + p \cos p \left[1 - \left(\frac{\lambda}{p} \right)^2 \right] = 0$$

da cui

$$(2.10) \quad \lambda^2 = - \frac{p^3 \cos p}{\operatorname{sen} p - p \cos p}$$

Al variare di p il valore (2.10) di λ^2 è riportato nel grafico di figura:

a)–Per $p=0$ si ha $\lambda^2=-3$ (quindi λ immaginario) e si annulla per $\cos p=0$ ovvero $p=\pi/2$.

b)–Per $p < \pi/2$:

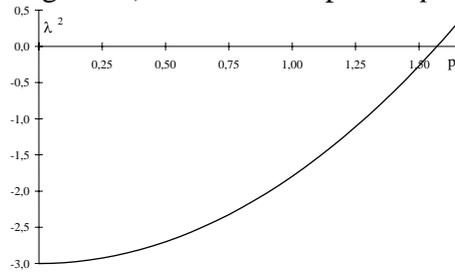
$$(2.11) \quad \lambda = \pm j\omega$$

è ancora immaginario quindi, ricordando la (2.1.6), il moto è stabile.

c)–Per $p > \pi/2$:

$$(2.12) \quad \lambda = \pm \zeta$$

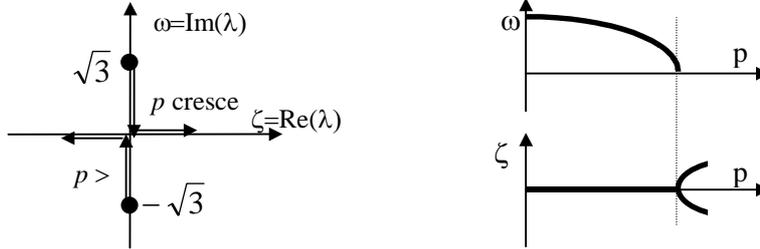
è reale quindi il moto è instabile.



Pertanto il valore critico si ha quando $p=\pi/2$ ed è pari a:

$$(2.13) \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

Al variare del carico p , la (2.1.18) presenta i seguenti andamenti:



Come si vede il valore critico del carico si ha per $\lambda=0$ ovvero quando le forze d'inerzia risultano nulle. In altri termini, le forze d'inerzia non modificano P_{cr} e quindi, *ai fini della determinazione della criticità del sistema*, è inutile tenerne conto.

Per $p=0$, il problema è quello classico di trovare la frequenza di vibrazione del sistema in esame. In tal caso la (2.5) si scrive:

$$X'' = -\lambda^2(1-\xi)X_L$$

ovvero per integrazioni successive:

$$X' = -\lambda^2\left(\xi - \frac{\xi^2}{2}\right)X_L + a \quad ; \quad X = -\lambda^2\left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6}\right)X_L + a\xi + b$$

le cui costanti di integrazione a, b, X_L si trovano imponendo le (2.8):

$$\begin{cases} \xi = 0 & X = 0 & \Rightarrow & b = 0 \\ \xi = 0 & X' = 0 & \Rightarrow & a = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L & \Rightarrow & \lambda^2 = -3 \Rightarrow \lambda = \pm j\sqrt{3} \end{cases}$$

A2)–Metodo Statico. Possiamo allora porre $\lambda=0$ nella (2.5) per cui la soluzione (2.7) si scrive:

$$(2.15) \quad X = c_1 \text{sen} p\xi + c_2 \text{cos} p\xi + X_L$$

Imponendo le condizioni agli estremi (2.8):

$$(2.16) \quad \begin{cases} \xi = 0 & X = 0 & \Rightarrow & c_2 + X_L = 0 \Rightarrow c_2 = -X_L \\ \xi = 0 & X' = 0 & \Rightarrow & pc_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L & \Rightarrow & (p \text{cos} p)X_L = 0 \end{cases}$$

l'equazione caratteristica (2.10) si scrive:

$$(2.17) \quad p^3 \cos p = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$(2.18) \quad p_0 = 0 ; p_1 = \frac{\pi}{2} ; p_2 = \frac{3\pi}{2} ; \dots$$

cui corrispondono i “modi”:

$$(2.19) \quad X = X_L (1 - \cos p\xi)$$

Ma quando $p=0$, si ha ancora soluzione banale $X(\xi)=0$, quindi il valore più basso per cui la soluzione non è nulla si ha per:

$$(2.20) \quad p_{cr} = \frac{\pi}{2}$$

cui corrisponde il modo di deformazione critico:

$$(2.21) \quad X = c(1 - \cos \frac{\pi}{2} \xi)$$

Nel caso in esame (sistema conservativo) il metodo statico dà lo stesso risultato di quello dinamico. Per $p=p_{cr}$, $w \neq 0$ e definito a meno di una costante, quindi la posizione di equilibrio $w=0$ non è più conservata.

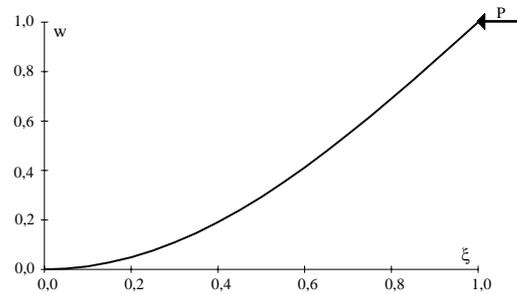
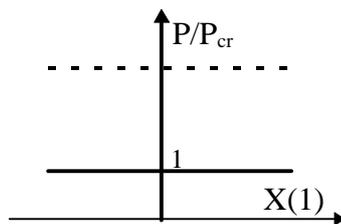
Corrispondentemente al valore (2.1.21) si ha il modo critico, normalizzato in modo che valga 1 per $\xi=1$,:

$$(2.22) \quad w = 1 - \cos \frac{\pi \xi}{2}$$

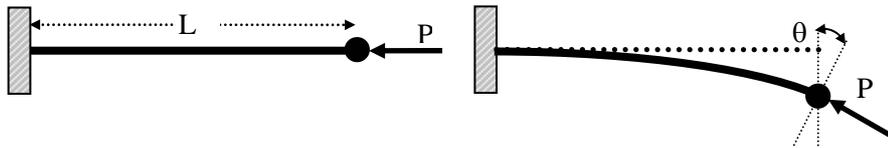
Valori più elevati di p_1 , pur matematicamente possibili, non solo non hanno interesse pratico ma non sono neppure fisicamente corretti.

Infatti

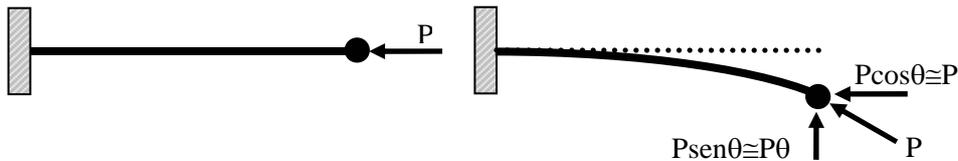
la possibilità di uno spostamento non nullo definito a meno di una costante e quindi genericamente grande, non garantisce la validità del modello matematico (2.1).



B1)–Riprendiamo in esame la stessa trave vista in A) ma dove il carico P , invece di avere direzione orizzontale immutata, ruoti in modo da risultare tangente alla trave nel punto libero d'estremità.



in modo da presentare una componente orizzontale di intensità $P\cos\theta \cong P$ ed una componente verticale di intensità $P\sin\theta \cong P\theta$.



L'equazione di equilibrio dei momenti rispetto ad una sezione posta a distanza x dall'incastro si scrive:

$$(2.23) \quad EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = P(w_L - w) - P \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_L (L - x) - M \frac{\partial^2 w_L}{\partial t^2} (L - x)$$

cui vanno associate le condizioni agli estremi:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} x = 0: \quad w = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ x = L: \quad w = w_L & \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_L \end{aligned}$$

Ricercando la soluzione nella forma:

$$(2.25) \quad w = X(x)e^{st}$$

la (2.1) si scrive:

$$(2.26) \quad EIX'' + PX = PX_L - PX'_L(L - x) - Ms^2X_L(L - x)$$

ovvero, con le stesse posizioni (2.6):

$$(2.27) \quad X'' + p^2X = p^2X_L - p^2X'_L(1 - \xi) - \lambda^2X_L(1 - \xi)$$

L'integrale generale della (2.5) si scrive:

$$(2.28) \quad X = c_1 \operatorname{sen} p \xi + c_2 \cos p \xi + X_L - X'_L (1 - \xi) - (\lambda/p)^2 X_L (1 - \xi)$$

le cui costanti di integrazione si trovano dalle (2.24) che con le posizioni (2.6) si scrivono:

$$(2.29) \quad \begin{cases} \xi = 0 & X = 0 & \Rightarrow & c_2 + X_L - X'_L - (\lambda/p)^2 X_L = 0 \\ \xi = 0 & X' = 0 & \Rightarrow & p c_1 + X'_L + (\lambda/p)^2 X_L = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L & \Rightarrow & c_1 \operatorname{sen} p + c_2 \cos p + X_L = X_L \\ \xi = 1 & X' = X'_L & \Rightarrow & p c_1 \cos p - p c_2 \operatorname{sen} p + X'_L + (\lambda/p)^2 X_L = X'_L \end{cases}$$

ovvero in forma matriciale:

$$(2.30) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 - (\lambda/p)^2 & -1 \\ p & 0 & (\lambda/p)^2 & 1 \\ \operatorname{sen} p & \cos p & 0 & 0 \\ p \cos p & -p \operatorname{sen} p & (\lambda/p)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ X_L \\ X'_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

che ammette soluzione non banale se è nullo il determinante della matrice dei coefficienti, ovvero se:

$$(2.31) \quad \lambda^2 = - \frac{p^3}{\operatorname{sen} p - p \cos p}$$

Al variare di p il valore di λ^2 , riportato in figura, e precisamente:

a) Per $p < 4,49$:

$$\lambda = \pm j\omega$$

è immaginario, quindi moto stabile.

b) Per $p=4,49$ si ha:

$$\operatorname{sen} p = p \cos p$$

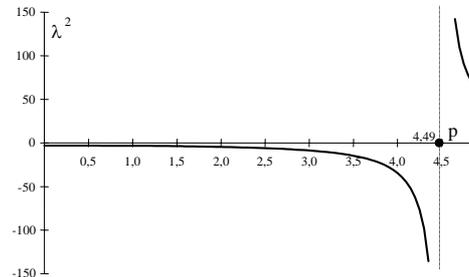
e, dalla (2.31):

$$\lambda = \pm \infty$$

c) Per $p > 4,49$:

$$\lambda = \pm \zeta$$

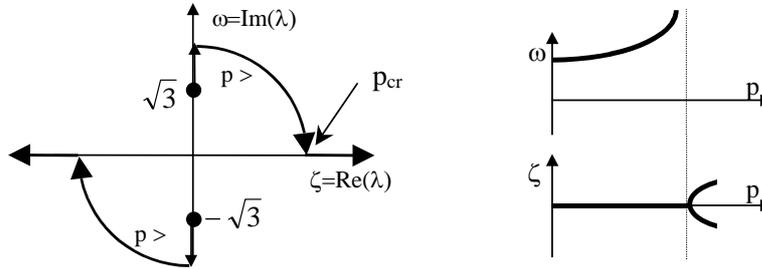
è reale, quindi il moto è instabile.



In definitiva il valore critico si ha quando $p=4,49$ ed è pari a:

$$(2.32) \quad P_{cr} = \frac{2,05\pi^2 EI}{L^2}$$

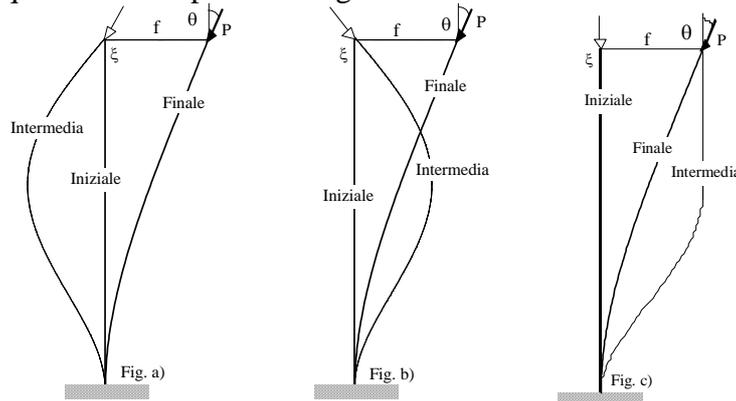
Pertanto al variare del carico p , λ varia secondo i grafici:



Come si vede il valore critico del carico si ha per $\lambda \neq 0$ e quindi quando le forze d'inerzia non risultano nulle.

Il perché di tutto questo risiede nel fatto che ora la forza P , a differenza del caso trattato in A), è non conservativa. Infatti il lavoro compiuto da P è diverso a seconda del percorso seguito per passare dalla posizione iniziale $w=0$ a quella finale.

Si consideri infatti i tre diversi modi seguiti per passare dalla posizione iniziale a quella finale riportati in figura.



–Nel caso di Fig. a), dove l'estremo libero prima ruota di θ poi trasla di f , il lavoro della componente orizzontale di P è negativo;

–nel caso Fig. b), dove l'estremo libero prima ruota di $-\theta$ poi trasla di f ed infine ruota di 2θ , il lavoro della componente orizzontale di P è positivo;

–nel caso Fig. c), in cui l'estremo libero prima trasla di f poi ruota di θ il lavoro è nullo.

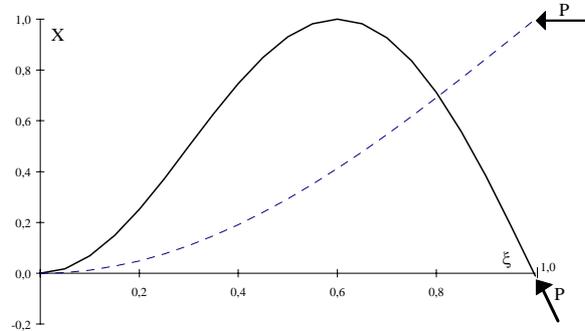
Quindi a meno del lavoro, comune in tutte e tre i casi, conseguente all'abbassamento verticale, si hanno tra diversi valori del lavoro compiuto.

Il modo critico, normalizzato in modo che valga 1 per $\xi=1$, risulta:

$$(2.33) \quad X = 0,733[(\cos p_{cr}\xi - 1)\tan p_{cr} + (\text{sen} p_{cr}\xi - p_{cr}\xi)]$$

In figura sono riportati i due modi relativi al caso conservativo ed a quello non conservativo.

Si noti come, nel caso conservativo, la deformata critica è nulla solo all'incastro; nel caso non conservativo è nulla anche per $\xi=1$. E' alquanto intuitivo che nel caso non conservativo occorre un



carico di compressione maggiore di quello necessario nel caso conservativo e pertanto è naturale che nel caso non conservativo si abbia un carico critico maggiore di quello del caso conservativo.

B2)–In generale, nel caso di presenza di forze non conservative il P_{cr} dipende dalle forze d'inerzia. Pertanto quando sono presenti forze non conservative le forze d'inerzia devono essere considerate per valutare correttamente il P_{cr} . L'impiego del metodo statico al sistema in cui è presente una forza di natura non conservativa porta ad un risultato sbagliato.

Si voglia infatti utilizzare (erroneamente) il metodo statico ovvero non si tenga conto delle forze di inerzia per cui la (2.27) si scrive:

$$(2.34) \quad X'' + p^2X = p^2X_L - p^2X'_L(1 - \xi)$$

il cui integrale generale risulta:

$$(2.34) \quad X = c_1 \text{sen} p\xi + c_2 \cos p\xi + X_L - X'_L(1 - \xi) - (\lambda/p)^2 X_L(1 - \xi)$$

Imponendo le condizioni agli estremi::

$$(2.35) \quad \begin{cases} \xi = 0 & X = 0 & \Rightarrow & c_2 + X_L - X'_L = 0 \\ \xi = 0 & X' = 0 & \Rightarrow & pc_1 + X'_L = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L & \Rightarrow & c_1 \text{sen} p + c_2 \cos p = 0 \\ \xi = 1 & X' = X'_L & \Rightarrow & pc_1 \cos p - pc_2 \text{sen} p = 0 \end{cases}$$

ovvero in forma matriciale:

$$(2.35) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ p & 0 & 0 & 1 \\ \text{sen} p & \text{cos} p & 0 & 0 \\ \text{cos} p & -\text{sen} p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ X_L \\ X'_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

il cui determinante dei coefficienti risulta:

$$(3.36) \quad -(\text{sen}^2 p + \text{cos}^2 p)$$

che non si annulla per nessun valore di p ovvero l'unica soluzione del sistema (2.35) è la soluzione banale. In termini fisici questo significherebbe che la trave risulterebbe stabile per qualsiasi valore del carico P .

Ovviamente questo risultato non corrisponde alla realtà e la ragione sta nel fatto che si è impiegato il metodo statico in presenza di sistemi non conservativi.

3. Trave semplicemente appoggiata

Nel caso di trave semplicemente appoggiata il sistema da risolvere risulta¹:

$$(3.1) \quad w^{IV} + p^2 w'' = 0 \quad \begin{cases} w(0) = w(1) = 0 \\ w''(0) = w''(1) = 0 \end{cases}$$

Imponendo alla soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$(3.2) \quad w = c_1 \cos p\xi + c_2 \sin p\xi + c_3 \xi + c_4$$

le condizioni agli estremi:

$$(3.3) \quad \begin{cases} w(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_4 = 0 \\ w''(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_4 = 0$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} w(1) = 0 \Rightarrow c_2 \sin p + c_3 = 0 \\ w''(1) = 0 \Rightarrow c_2 \sin p = 0 \end{cases} \Rightarrow c_3 = 0 ; p = n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$$

è evidente che per $n=0$, w è identicamente nulla. Il valore più piccolo del carico per cui si ha soluzione non banale si ha per $n=1$ ($p=\pi$), e per tale valore si ha il carico critico P_{cr} :

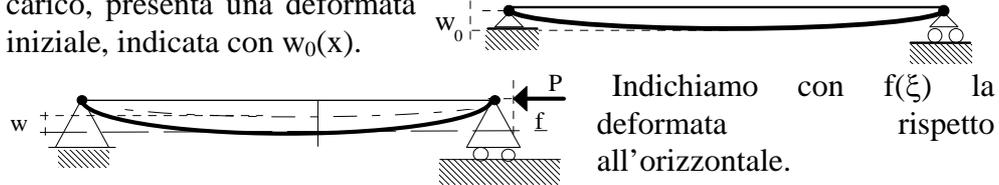
$$(3.5) \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

cui corrisponde il modo, essendo c_2 indeterminato:

$$(3.6) \quad w(\xi) = c_2 \sin \pi \xi$$

3.1. Metodo delle imperfezioni

A—Si consideri la trave di figura che, già prima dell'applicazione del carico, presenta una deformata iniziale, indicata con $w_0(x)$.



¹ Poiché non ci sono forze non conservative, possiamo applicare il metodo statico.

Lo spostamento elastico conseguente al carico risulta:

$$(3.1.1) \quad w(\xi) = f(\xi) - w_0(\xi)$$

L'equazione di equilibrio e relative condizioni agli estremi, si scrive:

$$(3.1.2) \quad w^{IV} + p^2(w'' + w_0'') = 0; \quad w(0) = w''(0) = w(1) = w''(1) = 0$$

Assumendo:

$$(3.1.3) \quad w = \sum_{m=1}^M a_m \operatorname{sen} m\pi\xi; \quad w_0'' = \sum_{m=1}^M w_{0m} \operatorname{sen} m\pi\xi$$

le condizioni agli estremi sono soddisfatte.

Sostituendo le (3.1.3) nella (3.1.2):

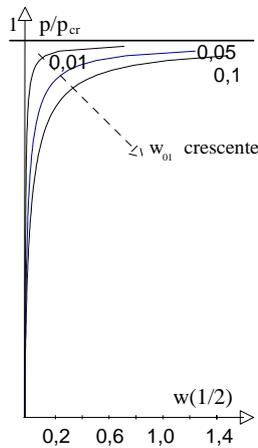
$$(3.1.4) \quad [(m\pi)^2 - p^2] a_m = p^2 w_{0m}; \quad m = 1, 2, \dots$$

quindi:

$$(3.1.5) \quad a_m = \frac{p^2 w_{0m}}{[(m\pi)^2 - p^2]}$$

Indicando con $p_m = m\pi$, lo spostamento risulta:

$$(3.1.6) \quad w = \sum_{m=1}^M \left[\frac{p^2 w_{0m}}{p_m^2 - p^2} \right] \operatorname{sen} m\pi\xi$$



La deformata massima si ha in mezzeria e diventa ∞ quando $p = p_m$. La struttura non è certo in grado di sopportare tale spostamento infinito per cui il valore più basso del carico per cui questo avviene è certamente critico. In particolare se $w_{01} \neq 0$ risulta $p_{cr} = \pi$. Il grafico riporta il valore dello spostamento in mezzeria al variare del carico per tre diversi valori di $w_{01} \neq 0$ e $w_{0m \neq 1} = 0$. Spostamento che tende asintoticamente all' ∞ al tendere del carico applicato al valore critico $p_{cr} = \pi$.

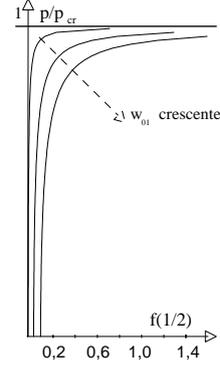
Ovviamente invece di assumere come incognita del problema w , avremmo potuto prendere lo spostamento f per cui il sistema (3.1.2) diviene:

$$(a) \quad f^{IV} + p^2 f'' = w_0^{IV}; \quad f(0) = f''(0) = f(1) = f''(1) = 0$$

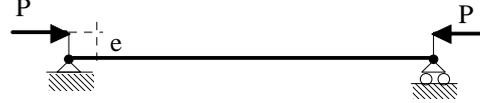
Procedendo in maniera analoga a quanto fatto precedentemente si ha:

$$(b) \quad f = \sum_{m=1}^M \left[\frac{P_m^2 w_{0m}}{p_m^2 - p^2} \right] \text{sen } m\pi\xi$$

In particolare se $w_{0m}=0$ per $m>1$, il grafico riporta il valore dello spostamento in mezzeria al variare del carico per tre valori di w_{01} .



B–Consideriamo la trave di figura, nel quale il carico non risulti centrato ma spostato di “ e ”. Il sistema è governato dall’equazione:



$$(3.1.7) \quad w^{IV} + p^2 w'' = 0$$

con condizioni agli estremi:

$$(3.1.8) \quad \begin{cases} \xi = 0 & \begin{cases} w = 0 \\ w'' + p^2 e = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -c_4 = e ; \\ \xi = 1 & \begin{cases} w = 0 \\ w'' + p^2 e = 0 \end{cases} \Rightarrow c_3 = 0 ; c_1 = \frac{1 - \cos p}{\text{sen } p} \end{cases}$$

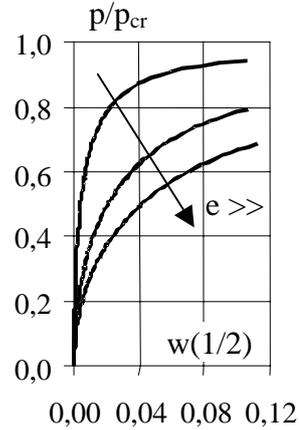
La soluzione si scrive:

$$(3.1.9) \quad w = e \left[\cos p\xi + \frac{1 - \cos p}{\text{sen } p} \text{sen } p\xi - 1 \right] = e \left[\cos p\xi + \tan \frac{p}{2} \text{sen } p\xi - 1 \right]$$

e lo spostamento in mezzeria risulta:

$$(3.1.10) \quad w\left(\frac{1}{2}\right) = e \left[\sec \frac{p}{2} - 1 \right]$$

che diventa infinito per $p_{cr}=\pi$. Il valore della (3.1.9) al variare del carico, per tre diversi valori dell’eccentricità, è riportata in figura.



Per trovare il momento massimo è sufficiente calcolare la derivata seconda della (3.2.5) e calcolarla per $\xi=1/2$ (dove $M=M_{\text{Max}}$):

$$(3.2.9) \quad M_{\text{Max}} = -\left[w''\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{Q}{p^2} \left[\sec \frac{p}{2} - 1 \right]$$

Utilizzando la (3.2.7):

$$(3.2.10) \quad \lim_{p \rightarrow 0} = \frac{Q}{p^2} \left[\sec \frac{p}{2} - 1 \right] = \frac{Q}{p^2} \left[1 + \frac{p^2}{8} + \dots - 1 \right] = \frac{Q}{8}$$

che indica il momento in mezzzeria dovuto al solo carico trasversale¹.

4. Considerazioni sul significato di valore Critico

Sulla base degli esempi esaminati possiamo trarre alcune conclusioni:

1.La ricerca del carico critico equivale a trovare quel carico sotto il quale la struttura è in equilibrio statico ma la posizione di equilibrio è instabile. In altri termini se perturbata si allontana indefinitamente da tale posizione.

2.Se tutte le forze in gioco sono di natura conservativa, la stabilità del sistema può essere valutata senza tenere in conto le forze d'inerzia ovvero senza studiarne il comportamento dinamico.

3.Se una o più forze in gioco sono di natura non-conservativa è necessario tenere in conto le forze d'inerzia. Questo non significa che necessariamente il valore critico si abbia sempre e comunque solo per forze d'inerzia diverse da zero, ma che questo non può essere affermato a-priori come invece si può fare nel caso di sistemi conservativi.

4.Nel caso di **sistemi conservativi** l'analisi può essere effettuata staticamente impostando il problema come:

4a.un problema lineare di autovalori: in cui il carico è inteso come autovalore. Poiché il sistema risulta omogeneo, per il generico valore di P che non sia un autovalore l'unica soluzione possibile è quella banale ovvero la posizione di equilibrio. Quando P assume un valore tale che il sistema ammette soluzione non banale, questa è definita a meno di una costante arbitraria (autofunzione o modo). La soluzione è quindi indeterminata (non infinita) ma potendo scegliere la costante arbitrariamente la possiamo

¹ Il risultato (3.2.9), si può ottenere sommando alla (3.2.10), che dà il momento in mezzzeria dovuto a Q, il momento dato dal carico P: $p^2 w(1/2)$.

pensare sufficientemente elevata da allontanarci dalla posizione di equilibrio iniziale. Si definisce carico critico P_{cr} il valore più piccolo tra tutti i possibili autovalori del problema.

4b. un problema lineare di risposta: in cui la non omogeneità del modello matematico può derivare da imperfezioni, ulteriori carichi applicati, ... In questo caso si valuta la deformata della struttura al variare del carico P e si interpreta il P_{cr} come quel valore del carico per cui la deformata tende a diventare infinita.

In generale la metodologia 4b. è più laboriosa della 4a. ma dà anche maggiori informazioni dal punto di vista progettuale. Infatti mentre nel problema ad autovalori si determina il *modo* (definito a meno di una costante) nel problema di risposta si determina la deformata (definita in modo univoco) e questo consente di valutare se la struttura è realmente in grado di sopportare le deformazioni e gli sforzi conseguenti.

Può così succedere che già per valori di $P < P_{cr}$ gli spostamenti sono tali che nella realtà la struttura collassa prima di raggiungere il carico critico teorico come sopra definito.

5. Nel caso di sistemi **NON-conservativi** deve essere condotta una analisi dinamica impostando il problema come:

5a. un problema lineare di autovalori: in cui come autovalore viene considerato il parametro λ che definisce la componente temporale del moto e che dipende dal valore di P . Fissato un valore di P si può determinare il corrispondente valore di λ ed il corrispondente *modo*. Si definisce P_{cr} il più piccolo valore di P per cui λ presenta parte reale positiva perché ad esso corrisponde il primo modo di deformazione instabile.

5b. un problema lineare di risposta dinamica: in cui la non omogeneità del modello matematico può derivare da imperfezioni, ulteriori carichi applicati, loro eccentricità, ... In questo caso si valuta il moto della struttura al variare del carico P e si interpreta il P_{cr} come quel valore del carico per cui il moto tende a crescere indefinitamente.

Il problema di risposta statica consente anche nel caso di forze non-conservative di valutare la deformata della struttura ma non consente di trarre conclusioni sulla stabilità della posizione di equilibrio e pertanto non è sufficiente a garantire l'integrità della struttura.

5. Effetto dei vincoli sul carico critico

Limitandoci a considerare il caso di carico P conservativo, valutiamo l'effetto dei vincoli agli estremi sul carico critico di una trave. I più tradizionali vincoli di appoggio, incastro, estremo libero, ... possono essere tutti derivati dal caso generale di figura.



Alla soluzione generale

(5.2) vanno quindi imposte le condizioni agli estremi:

$$(5.1) \quad \xi = 0 \begin{cases} EIw'' = C_1Lw' \\ EIw'''' + PL^2w' = -K_1L^3w \end{cases} ; \quad \xi = 1 \begin{cases} EIw'' = -C_2Lw' \\ EIw'''' + PL^2w' = K_2L^3w \end{cases}$$

Indicando con

$$(5.2) \quad p^2 = \frac{PL^2}{EI} ; h_1 = \frac{LC_1}{EI} ; k_1 = \frac{K_1L^3}{EI} ; h_2 = \frac{LC_2}{EI} ; k_2 = \frac{K_2L^3}{EI}$$

ed imponendo l'annullarsi del determinante dei coefficienti, si ha:

$$(5.3) \quad \left\{ -p^5(k_1 + k_2) + p^3[h_1h_2(k_1 + k_2) + k_1k_2] + pk_1k_2(h_1 + h_2 - h_1h_2) \right\} \sin p + \left\{ p^4(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) - p^2k_1k_2(h_1 + h_2) - 2k_1k_2h_1h_2 \right\} \cos p + 2k_1k_2h_1h_2 = 0$$

Per valori di h, k assunti $=0$ oppure $=\infty$ si hanno i seguenti casi.

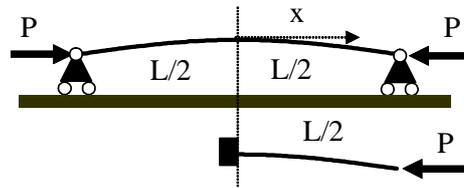
Tipo di Vincolo	h_1	k_1	h_2	k_2	P_{cr}	Modo
Appoggio-Appoggio	0	∞	0	∞	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\sin \pi \xi$
Incastro-Libera	∞	∞	0	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$1 - \cos \frac{\pi \xi}{2}$
Incastro-Incastro	∞	∞	∞	∞	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$1 - \cos 2\pi \xi$
Incastro-Glifo	∞	∞	∞	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$1 - \cos \pi \xi$

Incastro–Appoggio	∞	∞	0	∞	$P_{cr} = \frac{2,05\pi^2 EI}{L^2}$	
Appoggio–Glifo	0	∞	∞	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$\text{sen } \pi\xi$
Appoggio–Libero	0	∞	0	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\text{sen } \pi\xi$
Libero–Libero	0	0	0	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\text{sen } \pi\xi$
Libero–Glifo	0	0	∞	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$\text{sen } \frac{\pi\xi}{2}$
Glifo–Glifo	∞	0	∞	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\text{cos } \pi\xi$

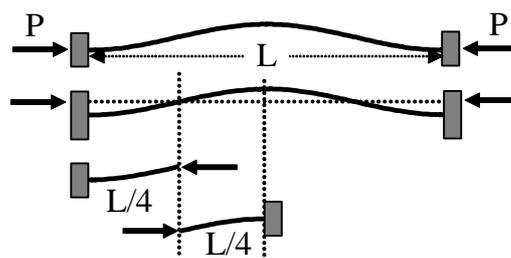
Molti P_{cr} dei vari casi di vincolo esaminati possono essere ottenuti per similitudine dal valore del carico critico del caso Incastro–Libera:

1)–Appoggio–Appoggio: è evidente dalla figura che per simmetria ogni metà della trave appoggiata si comporta come una trave a sbalzo (per $\xi=1/2$ risulta $w=w'=0$). In altri termini il P_{cr} dell'asta a sbalzo è uguale a quella di una trave appoggiata che abbia lunghezza doppia. E' pertanto sufficiente sostituire nell'espressione del P_{cr} della trave I-L ad L la cosiddetta "lunghezza effettiva" $L/2$ per avere il carico critico della trave A-A:

$$(5.5) \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



2)–Incastro–Incastro(I-I): ogni incastro induce un momento di reazione che impedisce la rotazione del relativo estremo. Tali momenti ed il carico applicato sono equivalenti ad un carico P applicato eccentricamente. I punti di inflessione della deformata corrispondono alle intersezioni con la linea di azione P . E' evidente

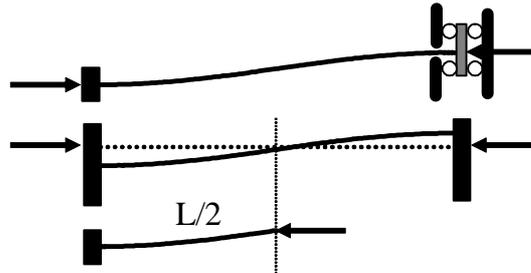


dalla figura, che ogni quarto della trave con doppio incastro si comporta come una trave a sbalzo. Il P_{cr} dell'asta I-I è quindi uguale a quella di una trave I-L che abbia lunghezza quattro volte superiore. E' pertanto sufficiente sostituire la lunghezza effettiva $L/4$, ad L nella (2.1.21) per ottenere il carico critico per il doppio incastro:

$$(5.6) \quad P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Incastro-Glifo: il glifo è simile all'incastro salvo consentire la traslazione. Quindi la deformata presenta un punto di inflessione in mezzzeria dove il momento è nullo.

I momenti di reazione ed il carico applicato sono equivalenti ad un carico P applicato eccentricamente. Il carico critico si ha sostituendo $L/2$ ad L nella espressione del P_{cr} della trave I-L per avere lo stesso valore (5.5).



6. Espressione generale del carico critico e suoi limiti

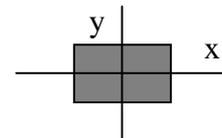
In generale quindi il carico critico può essere espresso come:

$$(6.1) \quad P_{cr} = c \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

dove sono evidenti i parametri che lo definiscono:

a) c un coefficiente che dipende dalle condizioni agli estremi e, nel solo caso in cui la forza è non conservativa, dalla distribuzione di massa.

b) EI , rigidezza flessionale della trave. E' ovvio che per essa si intende quella più piccola tra tutte quelle rispetto agli assi baricentrici della sezione. Così nel caso di figura sarà $(EI)_x$.



c) Il quadrato della lunghezza dell'asta L o della lunghezza ridotta $l=L/\sqrt{c}$.

Se la sezione è omogenea, in termini di sforzo critico la (6.1) si scrive:

$$(6.2) \quad \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E I}{l^2 A} = \pi^2 E \frac{\rho^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

dove ρ è il raggio di girazione e λ il *rapporto di snellezza*.

In particolare, il σ_{cr} a parità di materiale dipende dal rapporto di snellezza ed è tanto più basso quanto più la trave è snella.

Un carico di compressione può quindi indurre il collasso quando:

d) Il carico induce uno stato di sforzo σ tale da superare il limite di proporzionalità σ^* della curva sforzi-deformazioni. Superato questo limite di resistenza del materiale il comportamento non è più elastico. In questo caso la trave va quindi progettata a resistenza: $\sigma < \sigma^*$.

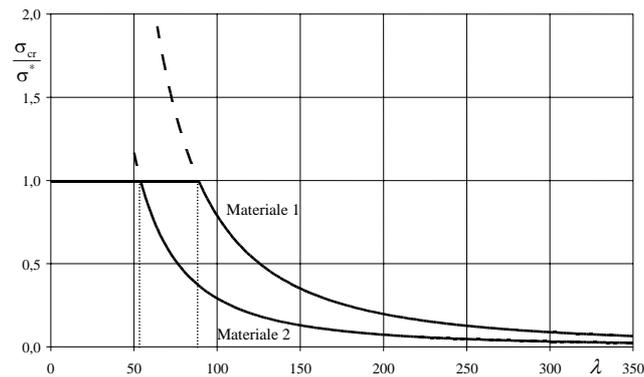
e) Il carico è tale da provocare una flessione elastica ovvero instabilità. In questo caso la trave va quindi progettata a buckling: $\sigma < \sigma_{cr}$.

Notiamo che tutte le precedenti formule che definiscono il P_{cr} sono state ottenute nell'ipotesi di rimanere in campo elastico-lineare in cui valgono le leggi di Hooke. Per i materiali metallici come limite di validità può essere considerato lo sforzo di snervamento σ^* .

Nel caso di due materiali di caratteristiche:

Tipo di materiale	$E = \text{GN/m}^2$	$\sigma^* = \text{MN/m}^2$
Materiale 1	200	250
Materiale 2	68	230

il legame tra carico Euleriano e carico di snervamento è riportato nel grafico



seguito. Da questo risulta che per il materiale 1, il limite più basso del rapporto di snellezza per cui $\sigma_{cr} < \sigma$ è $\lambda=89$, mentre per l'altro è $\lambda=54$. Per rapporti di snellezza minori le leggi di Hooke non sono più valide ed occorrono criteri

differenti da quelli fin qui visti per valutare il comportamento della trave¹.

¹ Ad esempio, se si entra in campo plastico, possono essere impiegati i moduli elastici secante, tangente o una loro combinazione per definire un modulo di Young ridotto.

7. Metodi approssimati per il calcolo di P_{cr}

A)-Metodo di Ritz

L'applicazione del metodo energetico, nel caso di sistema conservativo, è ampiamente utilizzato per trovare il carico critico approssimato quando risulta difficile trovare la soluzione esatta della relativa equazione differenziale. In questo caso il problema si trasferisce nel trovare una forma della deformata che meglio si avvicini all'autofunzione corrispondente al P_{cr} .

Si consideri la trave a sbalzo, precedentemente vista per la quale:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = 2,467 \frac{EI}{L^2}$$

L'energia di deformazione si scrive:

$$(7.1) \quad E = \frac{EI}{2} \int_0^L w''^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L w'^2 dx$$

Nell'applicazione del metodo di Ritz, dobbiamo assumere una funzione w che soddisfi le condizioni geometriche:

$$(7.2) \quad w(0) = w'(0) = 0$$

Partendo dalla generica deformata:

$$(7.3) \quad w = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$

ed imponendo le (7.2) si ha:

$$(7.4) \quad w = c_3 x^2 + c_4 x^3$$

un ulteriore coefficiente può essere determinato per soddisfare la condizione sul momento all'estremo di destra:

$$(7.5) \quad w''(L) = 0 \Rightarrow c = -3c_4 L \Rightarrow w = c_4 (x^3 - 3Lx^2)$$

Indicando con f lo spostamento per $x=L$ si ha facilmente che $f = -2c_4 L^3$, quindi possiamo scrivere l'ultima espressione della (7.5) come:

$$(7.6) \quad w = \frac{f}{2L^3} (3Lx^2 - x^3)$$

Sostituendo la (7.6) nella (7.1):

$$(7.7) \quad E = \frac{3}{L^3} \left[\frac{EI}{2} - \frac{1}{5} PL^2 \right] f^2$$

Uguagliando a zero la derivata rispetto f ed escludendo la soluzione banale $f=0$, si ha come soluzione:

$$(7.8) \quad P_{cr} = 2,5 \frac{EI}{L^2}$$

carico critico che, confrontato con il valore esatto, è approssimato con un errore del 1,321 %.

Un'approssimazione ancora maggiore si ha se si utilizza la:

$$(7.9) \quad E = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx - \frac{P}{2} \int_0^L w'^2 dx$$

dove il momento M può essere espresso in funzione del carico P , come:

$$(7.10) \quad M = P(f - w)$$

sostituendo nella (7.7) ed utilizzando ancora la (7.6):

$$(7.11) \quad E = PL \left[\frac{17}{70} \frac{P}{EI} - \frac{3}{5L^2} \right] f^2$$

Uguagliando a zero la derivata rispetto f ed escludendo la soluzione banale $f=0$, si ha come soluzione:

$$(7.12) \quad P_{cr} = 2,4706 \frac{EI}{L^2}$$

carico critico che, confrontato con il valore esatto, è approssimato con un errore del 1,296 %.

Il motivo per cui, pur utilizzando la stessa deformata (7.6), nel secondo caso si ha una migliore approssimazione risiede nel fatto che la (7.9) non richiede come la (7.1) di derivare due volte la w . Nella realtà chi induce sbandamento, punto per punto, più che il carico P è il momento da esso generato. Mentre con la (7.1) il momento è approssimato con una retta, nella (7.9) è approssimato con una cubica. In definitiva la sollecitazione è meglio rappresentata nel secondo caso rispetto al primo.

8. Stabilità delle piastre

Molti componenti strutturali dei velivoli possono essere considerati elementi “piastra”. Ne fanno fede il rivestimento, le pareti dei longheroni, il pavimento... La definizione dei carichi per cui la struttura si imbozza è fondamentale non solo per garantire i necessari requisiti di robustezza ma, specialmente per i componenti con finalità portanti, anche per garantire il mantenimento della forma aerodinamica del profilo.

Anche in questo caso i metodi generali visti nello studio della stabilità trovano vasto impiego nello studio del buckling e post-buckling: metodo degli autovalori, delle imperfezioni, di Rayleigh-Ritz, ...

Lo studio del carico critico delle piastre è più complicato di quello delle travi non solo per la bidimensionalità del problema e per la maggiore varietà di vincoli al contorno ma anche per la diversità dei tipi di carico possibili, forze nel piano di compressione, di taglio,....

9. Carichi combinati di trazione e flessione

Nella trattazione sulla piastra con un carico q fuori del piano, si sono assunti spostamenti così piccoli da poter trascurare lo stiramento del piano medio. Questo ha consentito di disaccoppiare le equazioni nel piano, in termini di u, v da quella fuori del piano, in termini di w .

Nel caso in cui le forze nel piano medio sono elevate e la piastra si deforma fuori del piano, il contributo delle forze nel piano nell'equazione fuori del piano non sempre può essere trascurato.

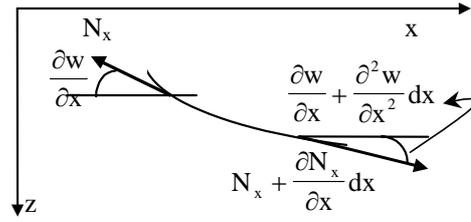
Si hanno quindi in generale i due seguenti casi:

1.–gli sforzi di trazione nel piano, dovuti anche allo spostamento fuori del piano, hanno componente in direzione fuori del piano trascurabile rispetto alle altre forze fuori del piano. E' questa l'ipotesi normalmente assunta se è presente il solo carico q fuori del piano o se è trascurabile il prodotto di eventuali forze nel piano per la rotazione delle sezioni;

2.–gli sforzi di trazione nel piano medio dovuti anche allo spostamento fuori del piano hanno componente in direzione fuori del piano rispetto alle altre forze in tale direzione. E' questa la condizione da adottare per lo studio dell'andata in carico critico (buckling).

In questo ultimo caso occorre tenere in conto il contributo delle forze nel piano nelle equazioni fuori del piano.

Pertanto considerando la configurazione deformata di figura:



A)—Le equazioni di equilibrio in direzione x, si scrivono:

$$(9.1) \quad \left[N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right] dy \cos \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - N_x dy \cos \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \left[N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right] dx \cos \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) - N_{xy} dx \cos \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

Per piccole rotazioni possiamo assumere $\cos \theta \cong 1$ quindi, al tendere a zero dell'elemento, la (9.1) e l'analogia in direzione y si riducono alle:

$$(9.2) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

B)—Per quanto riguarda l'equilibrio in direzione z:

–le forze N_x danno un contributo pari a:

$$\left[N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right] dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) - N_x dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

ovvero:

$$(9.3) \quad \left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx dy$$

– analogamente le forze N_y danno un contributo pari a:

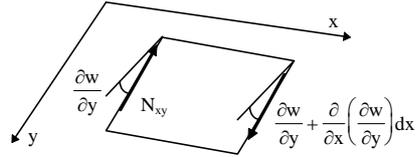
$$(9.4) \quad \left[N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy$$

–le forze N_{xy} danno un contributo pari a:

$$\left[N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right] dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) - N_{xy} dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

ovvero:

$$(9.5) \quad \left[N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy$$



– analogamente le forze N_{yx} :

$$(9.6) \quad \left[N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right] dx dy$$

Sommando tutti i contributi (9.3,4,5,6) e ricordando che $N_{xy} = N_{yx}$:

$$\left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy + \left\{ \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right] \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right] \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dx dy$$

In definitiva, tenendo conto delle (9.2) il contributo delle forze nel piano hanno una componente in direzione z pari a:

$$\left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy$$

che va a sommarsi al carico q, quindi l'equazione fuori del piano diventa:

$$(9.7) \quad D \nabla^4 w = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Ponendo nella (9.7) $q=0$, si ha l'equazione che governa la stabilità delle piastre soggette a carichi nel piano ed il problema sta nel trovare i loro valori critici ovvero quei valori per cui la posizione di equilibrio $w=0$ non è più mantenuta. In realtà nel caso generale di presenza contemporanea di N_x , N_y , N_{xy} è la loro combinazione che manda in carico critico la piastra, per cui si assume che aumentano tutte in modo proporzionale:

$$(9.8) \quad N_x = pN_x ; N_y = pN_y ; N_{xy} = pN_{xy}$$

ed è il coefficiente di carico p_{cr} che definisce il limite di stabilità:

$$(9.9) \quad D \nabla^4 w = p \left\{ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}$$

In altri termini il problema si pone nei seguenti termini: data la distribuzione dei carichi al contorno pN^* al contorno si determinano le forze nel piano risolvendo le (9.2); noti i valori di $pN(x,y)$ si sostituiscono nella (9.9) per determinare il p_{cr} .

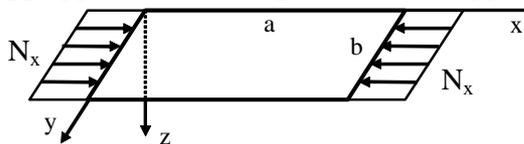
La risoluzione delle (9.2) risulta più o meno agevole a seconda che:

a)–i legami cinematici si assumono lineari: le forze nel piano non dipendono dagli spostamenti fuori del piano e le (9.2) possono essere risolte indipendentemente dalla conoscenza di w . Tale ipotesi è accettabile per valori di $p < p_{cr}$ e quindi utilizzabile per lo studio del carico critico.

b)–i legami cinematici si assumono non lineari: le forze nel piano dipendono dagli spostamenti fuori del piano e le (9.2,9) risultano accoppiate. Tale ipotesi è imperativa per valori del coefficiente di carico $p > p_{cr}$ e quindi da impiegare per lo studio del comportamento post-critico.

10. Carico critico di piastra appoggiata con carico uniassiale

Si consideri la piastra di figura, appoggiata su tutti e quattro i lati soggetta ad un carico di compressione N_x . E' immediato verificare che nell'ipotesi a) del precedente paragrafo, le equazioni nel piano (9.2) sono soddisfatte dalle:



$$N_x = -N_x^*$$

$$N_y = N_{xy} = 0$$

Pertanto la (9.9), assumendo N_x come coefficiente di carico, si scrive:

$$(10.1) \quad D\nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

cui vanno associate le condizioni al contorno:

$$(10.2) \quad x = 0, a \quad \begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases} ; \quad y = 0, b \quad \begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Assumendo:

$$(10.3) \quad w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

e sostituendo nella (10.1) si ha:

$$(10.4) \quad N_x = D \frac{\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}$$

Fissata la geometria a, b , per ogni coppia di valori m, n si ottiene un valore N_x in corrispondenza del quale si ha uno spostamento $w \neq 0$ di valore indeterminato. Il carico critico è il valore più basso tra gli infiniti valori (10.4). E' evidente che per quanto attiene ad n , tra tutti i possibili valori, $n=1$ garantisce il valore minimo della (10.4).

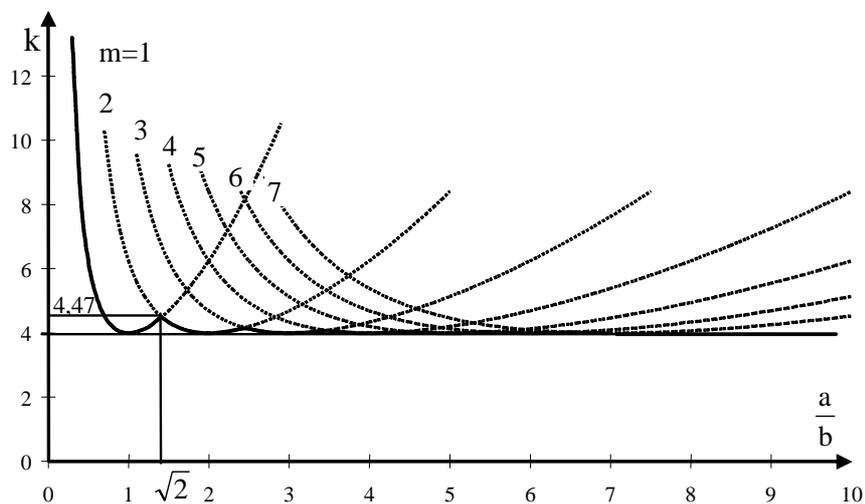
Pertanto, per la ricerca del carico critico, la (10.4) si riduce alla:

$$(10.5) \quad N_x = D\pi^2 \left(\frac{a}{m} \right)^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{D\pi^2}{b^2} \left[\left(\frac{mb}{a} \right) + \left(\frac{a}{mb} \right) \right]^2 = k \frac{\pi^2 D}{b^2}$$

ed il valore critico, al variare del rapporto dei lati, si ha in corrispondenza dei valori di m che rendono minimo il coefficiente:

$$(10.6) \quad k = \left(\frac{m}{\rho} + \frac{\rho}{m} \right)^2 \quad \text{con} \quad \rho = \frac{a}{b}$$

Il valore di m che rende minimo k al variare del rapporto dei lati, è riportato nel grafico seguente.



I valori minimi di k sono quelli corrispondenti all'involuppo riportato a tratto continuo. Come si vede tale involuppo tende al valore $k=4$. Per $\rho > 1$ la differenza massima da tale valore si ha per $\rho = \sqrt{2}$ e vale $k=4,47$.

Si noti come il minimo di k si abbia per $m \cong a/b$. Infatti in direzione y si ha sempre $n=1$, mentre in direzione x la deformata è tale che si hanno linee nodali per cui $a/m=b$. Questo indica che il numero di semionde in direzione x è tale che la piastra “tende a dividersi in quadrati”.

In definitiva per $\rho \geq 3$ possiamo assumere $k=4$ e scrivere:

$$(10.7) \quad N_{cr} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2} = \frac{4\pi^2}{b^2} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

che in termini di sforzo, si scrive:

$$(10.8) \quad \sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{h} = 4 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

Per $\rho \ll 1$, il valore critico si ha $m=1$ e la (10.6) diviene:

$$(10.9) \quad k = \left(\frac{1}{\rho} + \rho\right)^2 = \left(\frac{1+\rho^2}{\rho}\right)^2 \cong \frac{1}{\rho^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

che sostituita nella (10.5) porta a scrivere:

$$(10.10) \quad N_{cr} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\pi^2 D}{b^2} = \frac{\pi^2 D}{a^2}$$

ovvero in termini di sforzo:

$$(10.11) \quad \sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{h} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2$$

che, a meno del coefficiente di Poisson, è lo sforzo critico della trave di figura, dove la dimensione $b \gg a$ è tale che i bordi $y=\text{costante}$ sono talmente distanti dalla trave che le condizioni di vincolo su tali lati non influenzano il comportamento della trave.

