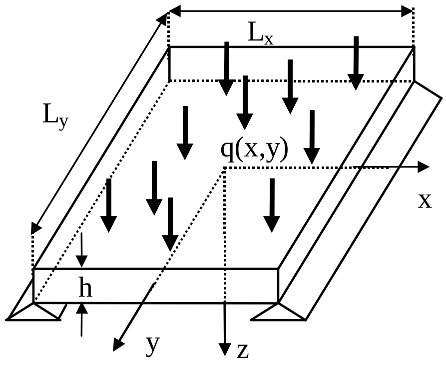
CAPITOLO I

TEORIA DELLA PIASTRA

1. La piastra

Si consideri la struttura di figura con riferimento ad un sistema di coordinato con x,y nel piano medio e z ortogonale ad esso, positivo verso il basso. Su una superficie della struttura è applicato, in direzione z, un carico per unità di superficie q(x,y).



Si assumono le stesse ipotesi alla base della teoria delle travi, salvo ovviamente che le dimensioni L nel piano xy sono dello stesso ordine di grandezza.

Dato il piccolo spessore *h*, il campo di spostamenti può essere approssimato con una serie di potenze in z:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \sum_{m=0}^{M} z^m u_m(x,y) \\ v(x,y,z) = \sum_{m=0}^{M} z^m v_m(x,y) \\ w(x,y,z) = \sum_{n=0}^{N} z^n w_n(x,y) \end{cases} \tag{1.1}$$

In particolare nella teoria delle piastre di Kirchhoff-Love si assume che

–le sezioni *inizialmente piane ed ortogonali al piano medio rimangano piane*. Questo implica M=N=1, quindi:

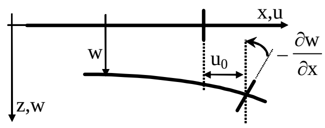
$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) + zw_1(x,y) \end{cases} \tag{1.2}$$

–*le sezioni inizialmente piane ed ortogonali al piano medio rimangano ortogonali alla linea media*. Questo implica $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$. Quindi:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \dfrac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; \theta_x = -\dfrac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \dfrac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \theta_y = -\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{cases} \tag{1.3}$$

Pertanto la cinematica semplificata consente di descrivere il campo di spostamenti in termini di tre incognite cinematiche u_0, v_0, w_0 funzioni solo delle coordinate nel piano x,y:

$$
\begin{cases}
u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial x} \\
v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\dfrac{\partial w_0(x,y)}{\partial y} \\
w(x,y,z) = w_0(x,y)
\end{cases}
\tag{1.4}
$$



Sostituendo le (1.4) nelle relazioni cinematiche (lineari):

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx}(x,y,z) = \dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} - z\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x^2} \\
\varepsilon_{yy}(x,y,z) = \dfrac{\partial v_0(x,y)}{\partial y} - z\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy}(x,y,z) = \left(\dfrac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0(x,y)}{\partial x}\right) - 2z\dfrac{\partial^2 w_0(x,y)}{\partial x \partial y} \\
\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

Infine dalle relazioni costitutive, utilizzando le (1.5):

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right] = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial v_0}{\partial y}\right) - z\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)\right] \\
\sigma_{yy} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right] = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left[\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right) - z\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right] \\
\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2z\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)\right]
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

che possiamo scrivere in forma abbreviata come:

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx} = \sigma_{xx0} + z\sigma_{xx1} \\
\sigma_{yy} = \sigma_{yy0} + z\sigma_{yy1} \\
\tau_{xy} = \tau_{xy0} + z\tau_{xy1}
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

2. Elemento rappresentativo della piastra

Gli sforzi (1.7) sono noti una volta determinati le sei funzioni σ_{xx0}, σ_{xx1}, σ_{yy0}, σ_{yy1}, τ_{xy0}, τ_{xy1}. In luogo di tali incognite si introducono delle grandezze di più immediato significato fisico, quali forze e momenti. Precisamente:

1. Integrando le (1.7) sullo spessore h, si ha:

(2.1) $$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx0} + z\sigma_{xx1}) dz = h\sigma_{xx0}$$

ed analogamente:

(2.2) $$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = h\sigma_{yy0} \quad ; \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = h\tau_{xy0}$$

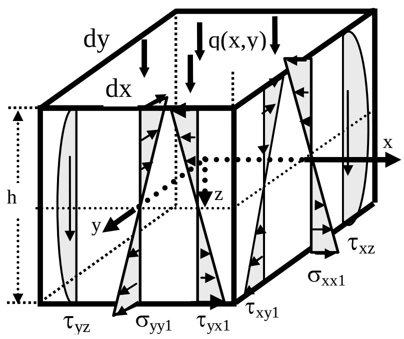
Le (2.1,2), ricordando le (1.6,7), in termini di spostamenti si scrivono:

(2.3) $$\begin{cases} N_x = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right] \\ N_y = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}\left[\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right] \end{cases} ; \quad N_{xy} = Gh\left[\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}\right)\right]$$

In similitudine[1] possiamo porre:

(2.4) $$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad ; \quad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz$$

Notiamo che sulla base delle (1.5) si avrebbe che $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$. Ma questo è vero al primo ordine. Considerando un maggior numero di termini nello sviluppo (1.1) tali sforzi di taglio dipendono da z^2. Dovendo peraltro risultare $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ in $z=\pm h/2$, detti sforzi hanno l'andamento di figura e la loro risultante, in direzione z, non può essere trascurata.



[1] Si noti che N e T, pur indicate genericamente come forze, non hanno le dimensioni di una forza ma di una forza per unità di lunghezza.

2. Moltiplicando le (1.7) per z ed integrando sullo spessore h, si ha:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z(\sigma_{xx0} + z\sigma_{xx1}) dz = \frac{h^3}{12}\sigma_{xx1} \tag{2.5}$$

analogamente:

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy} dz \quad ; \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{xy} dz = M_{yx} \tag{2.6}$$

Le (2.5,6), utilizzando le (1.6,7), possono essere scritte in termini di spostamenti:

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} = -(1-\nu) D \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{2.7}$$

dove D è la *rigidezza flessionale* della piastra[1]:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.8}$$

Pertanto tra le grandezze iniziali σ_{xx0}, σ_{xx1},… e le nuove grandezze introdotte N_x, M_x,… vigono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sigma_{xx0} = \dfrac{N_x}{h} \quad ; \quad \sigma_{xx1} = \dfrac{12}{h^3} M_x \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = \dfrac{N_x}{h} + z\dfrac{12}{h^3} M_x \\ \sigma_{yy0} = \dfrac{N_y}{h} \quad ; \quad \sigma_{yy1} = \dfrac{12}{h^3} M_y \quad \Rightarrow \quad \sigma_{yy} = \dfrac{N_y}{h} + z\dfrac{12}{h^3} M_y \\ \tau_{xy} = \dfrac{N_{xy}}{h} \quad ; \quad \sigma_{yy1} = \dfrac{12}{h^3} M_{xy} \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \dfrac{N_{xy}}{h} + z\dfrac{12}{h^3} M_{xy} \end{cases}$$

---

[1] Si noti che la rigidezza flessionale D della piastra non ha le stesse dimensioni fisiche della rigidezza flessionale EI della trave dal momento che le integrazioni (2.5,6) sono sullo spessore h e non sull’area dove agisce lo sforzo.

Possiamo allora considerare come elemento rappresentativo di una piastra quello dato dal piano medio di dimensioni dx,dy, soggetto alle forze N,M,T.
Consideriamo separatamente le sollecitazioni nel piano della piastra date dalle N e quelle fuori del piano date dalle T ed M.

a)–sollecitazioni nel piano

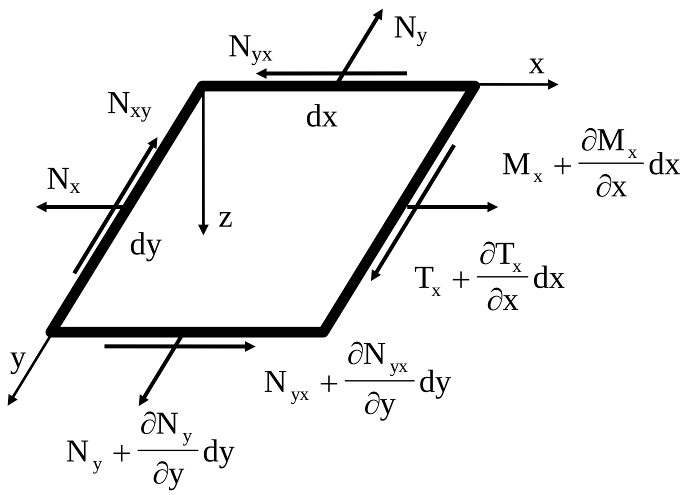


Figura 1 – Piastra Tirata

b)–sollecitazioni fuori del piano

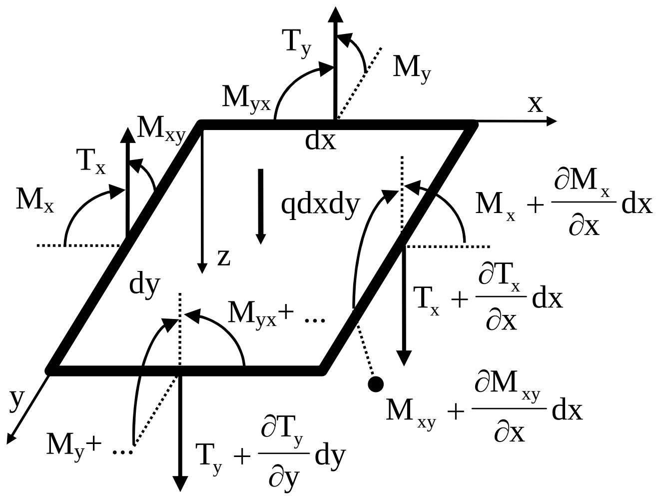


Figura 2 – Piastra Inflessa

3. Equazioni di equilibrio della piastra inflessa

Supponiamo che non ci siano forze applicate nel piano ma solo forze fuori del piano che inducono flessione. Dalla precedente figura 2, si ha:

– l'equilibrio ai momenti intorno all'asse y:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}dydx-\left(T_x+\frac{\partial T_x}{\partial x}dx\right)dydx-qdxdy\frac{dx}{2}=0$$

ovvero, trascurando i termini di ordine superiore:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}=T_x \tag{3.1}$$

– l'equilibrio ai momenti intorno all'asse x, in maniera analoga:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=T_y \tag{3.2}$$

– l'equilibrio ai momenti intorno all'asse z. Dalla precedente figura 1 si ottiene quanto già noto:

$$N_{xy}=N_{yx}$$

– l'equilibrio delle forze in direzione z,

$$\left(T_x+\frac{\partial T_x}{\partial x}dx\right)dy-T_xdy+\left(T_y+\frac{\partial T_y}{\partial y}dy\right)dx-T_ydy+qdxdy=0$$

quindi:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}+q=0 \tag{3.3}$$

Le (3.1,3) sono tre equazioni di equilibrio nelle cinque incognite M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y . Nella logica di risolvere le equazioni per risalita vediamo di ricavare un'equazione in termini dei soli momenti.

Eseguendo la seguente operazione:

$$\frac{\partial(3,1)}{\partial x}+\frac{\partial(3,2)}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}$$

ed utilizzando la (3.3) si ha:

(3.4) $$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

Sostituendo le (2.7) nella (3.4) ed eliminando l'ormai superfluo pedice di $w(x,y) \equiv w_0$:

(3.5) $$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] = q \quad \Rightarrow \quad D\nabla^4 w = q$$

che è l'equazione della piastra inflessa, espressa in termini di spostamento.

In definitiva si ha una sola equazione differenziale del 4° ordine nella sola incognita w, cui vanno associate le condizioni al contorno.

Le equazioni (3.1,3) si sarebbero potute ricavare dalle equazioni di equilibrio della teoria tridimensionale dell'elasticità, tenendo conto del piccolo spessore della piastra.

Infatti ricordando l'equazione di equilibrio:

(a) $$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

moltiplicandola per z, integrando lungo lo spessore e ricordando le (2.4,5):

(b) $$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}dz = 0$$

Poiché:

(c) $$\int_{-h/2}^{h/2} z\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}dz = (z\tau_{xz})\Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}dz = -T_x$$

la (b) è esattamente la (3.1) precedentemente trovata.

Procedendo in modo analogo sulla seconda equazione di equilibrio:

(d) $$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

si ha facilmente la (3.2).

Per ottenere l'equazione di equilibrio (3.3) si integri la terza equazione:

(e) $$\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)dz = 0$$

e ricordando le (2.4):

(f) $$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = \left(\sigma_{zz}\right)_{z=-h/2} - \left(\sigma_{zz}\right)_{z=h/2}$$

ma, poichè $(\sigma_{zz})_{z=-h/2} = -q$ e $(\sigma_{zz})_{z=h/2} = 0$, la (e) è proprio la (3.3).

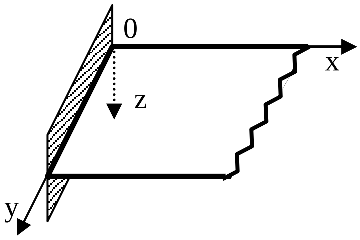
4. Condizioni al contorno per piastra inflessa

Sul contorno devono essere date due condizioni che definiscono gli spostamenti (generalizzati w,θ) e/o i carichi (generalizzati T,M).

In particolare per piastra rettangolare alcuni possibili tipi di vincolo, precisati sul lato x=0, sono:

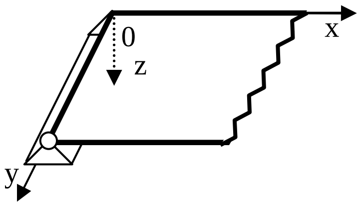
1.Incastro: spostamento e rotazione nulla:

$$\begin{cases} w_{x=0} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$



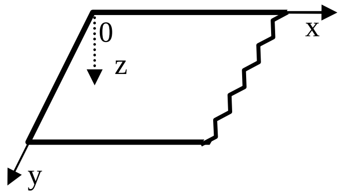
2.Appoggio (con cerniera): spostamento e momento nullo:

$$\begin{cases} w_{x=0} = 0 \\ M_{x=0} = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$



3.Libera: ovvero sono consentiti gli spostamenti e non vi sono forze:

$$(M_x)_{x=0} = (T_x)_{x=0} = (M_{xy})_{x=0} = 0 \tag{4.3}$$



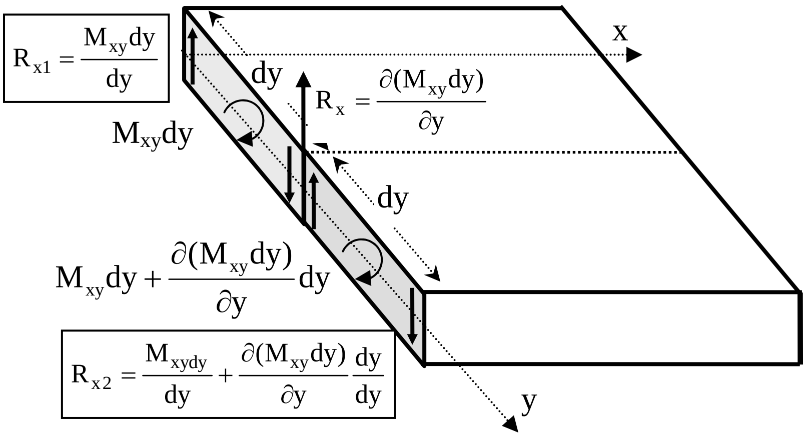
Sotto questa forma le condizioni al contorno sono state discusse da Poisson.

Più tardi Kirchhoff ha dimostrato che tre condizioni al contorno sono sovrabbondanti e sono sufficienti due sole condizioni a determinare in modo completo lo spostamento w. Egli ha dimostrato che le ultime due delle (4.3) possono essere combinate insieme in una unica condizione ed essere scritte:

$$\begin{cases} (M_x)_{x=0} = -D\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=0} = 0 \\ (V_x)_{x=0} = -D\left[\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=0} = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Limitiamoci in questa sede a giustificare intuitivamente che la seconda delle (4.4) è equivalente alle ultime due delle (4.3).

Si consideri un tratto del lato x=0 della piastra come costituito da due elementi di lunghezza dy; se nel primo tratto dy è presente un momento (per unità di lunghezza) M_{xy}, sul secondo tratto si ha $M_{xy}+(\partial M_{xy}/\partial y)dy$.



Il momento $M_{xy}dy$ sul tratto dy può essere pensato come dovuto a due forze di intensità $R_{x1}=(M_{xy}dy)/dy$ a distanza dy; analogamente il momento sul secondo tratto è dato da due forze $R_{x2}=(M_{xy}dy)/dy+\partial(M_{xy}dy)/\partial y$. Nell'unione dei due elementi queste forze si compensano, salvo che per il loro incremento che diviso per dy dà una forza di taglio per unità di lunghezza Q_x:

(4.5) $$Q_x = \frac{R_{x2}-R_{x1}}{dy} = \frac{M_{xy}}{dy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{M_{xy}}{dy} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Procedendo in modo analogo su tutto il lato possiamo concludere che il momento torcente (per unità di lunghezza) M_{xy} è staticamente equivalente ad una forza di taglio (per unità di lunghezza) di intensità (4.5).

Le due ultime condizioni (4.3) possono quindi essere compattate in una sola condizione:

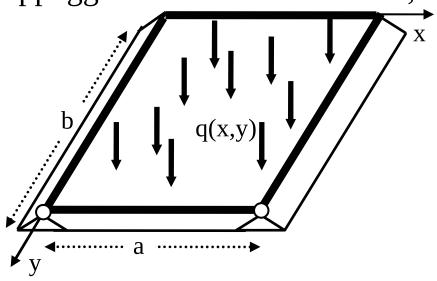
(4.6) $$(V_x)_{x=0} = \left(T_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=0} = 0$$

che, utilizzando la (3.1) e la (2.7) si scrive:

(4.7) $$(V_x)_{x=0} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=0} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_{x=0} = 0$$

5. La piastra appoggiata al contorno

Nel caso di piastra rettangolare di lati a,b appoggiata su tutto il contorno, all'equazione nel campo:



(5.1) $$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

vanno associate le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} w_{x=0,a} = 0 \\ M_{x=0,a} = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0,a} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{y=0,b} = 0 \\ M_{y=0,b} = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0,b} = 0 \end{cases}$$

che sono soddisfatte dallo sviluppo in serie:

(5.2) $$w(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}\,\mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b}) \equiv \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn} s_m s_n$$

dove i coefficienti w_{mn} devono garantire il soddisfacimento della (5.1).
Sostituendo la (5.2) nella (5.1):

(5.3) $$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}\left[(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2\right]^2 \mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b}) = q(x,y)$$

Al fine di ottenere un sistema di equazioni algebriche nelle incognite w_{mn} si può, in linea di principio, procedere in due modi:

a)–sviluppare la funzione nota q(x,y) a secondo membro della (5.3) in una serie analoga a quella che compare a primo membro[1]:

(5.4) $$q(x,y) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} q_{mn}\,\mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b}) \equiv \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} q_{mn} s_m s_n$$

---

[1] Metodo questo indicato anche come metodo di Navier

dove:

(5.5) $$q_{pq}=\frac{\int_0^a\int_0^b q(x,y)\,\mathrm{sen}(\frac{p\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{q\pi y}{b})dxdy}{\left[\int_0^a \mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{p\pi x}{a})dx\right]\left[\int_0^b \mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b})\mathrm{sen}(\frac{q\pi y}{b})dy\right]}$$

e poiché le funzioni $s_m \equiv \mathrm{sen}(m\pi x/a)$ sono ortogonali nel dominio 0,a come lo sono le funzioni $s_n \equiv \mathrm{sen}(n\pi y/b)$ nel dominio 0,b::

(5.6) $$\int_0^a s_m s_p dx=\begin{cases}0 & \text{se} \quad m\neq p\\ a/2 & \text{se} \quad m=p\end{cases} \quad ; \quad \int_0^b s_n s_q dy=\begin{cases}0 & \text{se} \quad n\neq q\\ b/2 & \text{se} \quad n=q\end{cases}$$

la (5.5) si scrive:

(5.7) $$q_{pq}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)s_p\, s_q\, dxdy$$

Sostituendo la (5.4) nella (5.3):

(5.8) $$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left\{w_{mn}\left[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\right]^2-\frac{q_{mn}}{D}\right\}\mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b})=0$$

che risulta verificata se è nullo ogni termine della serie:

(5.9) $$w_{mn}\left[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\right]^2-\frac{q_{mn}}{D}=0 \quad ; \quad \begin{cases}m=1,2,...,M\\ n=1,2,...,N\end{cases}$$

da cui:

(5.10) $$w_{mn}=\frac{q_{mn}}{D\left[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\right]^2} \quad ; \quad \begin{cases}m=1,2,...,M\\ n=1,2,...,N\end{cases}$$

Pertanto la soluzione (5.2) del problema si scrive:

(5.11) $$w(x,y)=\frac{1}{D}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_{mn}}{\left[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\right]^2}\mathrm{sen}(\frac{m\pi x}{a})\mathrm{sen}(\frac{n\pi y}{b})$$

b)–Utilizzando il metodo di Galerkin, ovvero moltiplicando ambo i membri della (5.3) per $s_p s_q \equiv$sen(pπx/a)sen(qπy/b) ed integrando su tutta l'area della piastra in modo da soddisfare "in media" l'equazione nel campo:

$$\begin{aligned}(5.12)\qquad &\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{mn}\left[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2\right]^2\left[\int_0^a s_m s_p dx\right]\left[\int_0^b s_n s_q dy\right]=\\ &=\int_0^a\int_0^b q(x,y)s_p s_q dxdy \quad ; \quad \begin{cases} p=1,2,...,M\\ q=1,2,...,N\end{cases}\end{aligned}$$

che, utilizzando le (5.6,7), si scrive:

$$(5.13)\qquad w_{pq}\left[(\frac{p\pi}{a})^2+(\frac{q\pi}{b})^2\right]^2-\frac{q_{pq}}{D}=0 \quad ; \quad \begin{cases} p=1,2,...,M\\ q\ =1,2,...,N\end{cases}$$

Nel caso particolare di carico uniformemente distribuito, q=q_0=costante, la (5.7) diventa:

$$\begin{aligned}(5.14)\qquad q_{pq}&=\frac{4q_0}{ab}\int_0^a\int_0^b s_p s_q dxdy=\frac{4q_0}{ab}\left[\int_0^a s_p dx\right]\left[\int_0^b s_q dy\right]=\\ &=\frac{4q_0}{ab}\left[\frac{a}{p\pi}(1-(-1)^p\right]\left[\frac{b}{q\pi}(1-(-1)^q\right]=\frac{16q_0}{pq\pi^2} \quad ; \quad p,q=1,3,5,...\end{aligned}$$

la (5.10) si scrive:

$$(5.15)\qquad w_{mn}=\frac{16q_0}{D\pi^6}\frac{1}{mn\left[(\frac{m}{a})^2+(\frac{n}{b})^2\right]^2} \quad ; \quad m,n=1,3,5,...$$

per cui la soluzione (5.2) si scrive:

$$(5.15)\qquad w(x,y)=\frac{16a^4q_0}{D\pi^6}\sum_{m=1,3,5}^{M}\sum_{n=1,3.5}^{N}\frac{\text{sen}(\frac{m\pi x}{a})\text{sen}(\frac{n\pi y}{b})}{mn\left[m^2+(\frac{a}{b}n)^2\right]^2}$$

serie questa che converge rapidamente per cui sono sufficienti pochi termini per avere una sufficiente accuratezza.