

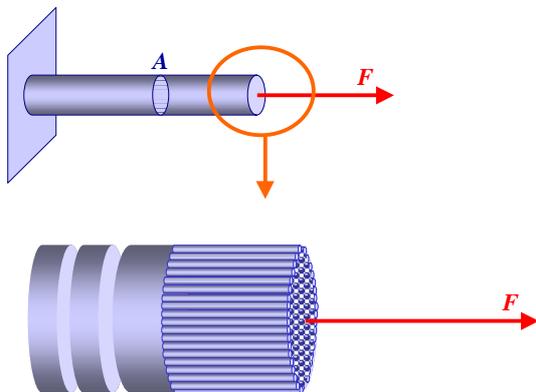
Stato di tensione e di deformazione in campo elastico

Tensioni e deformazioni in campo elastico

Lo studio del campo di tensione e di deformazione esistente in una qualsiasi struttura, in conseguenza dell'applicazione di sollecitazioni esterne, è di fondamentale importanza per poterne definire il margine di sicurezza.

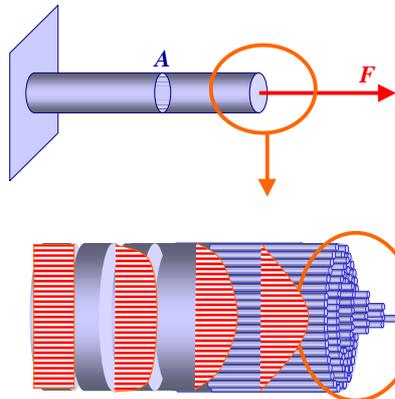
Stato di tensione monoassiale: trazione & compressione

Si consideri una barra di materiale omogeneo con un estremo vincolato e l'altro sollecitato da una forza assiale, applicata al baricentro della sezione.



Si immagini il tirante costituito da tante fibre assiali. La forza F è applicata solo alla fibra centrale. Le altre fibre vengono messe in carico per effetto della coesione tangenziale.

Si consideri una barra di materiale omogeneo con un estremo vincolato e l'altro sollecitato da una forza assiale, applicata al baricentro della sezione.



La distribuzione di forza tra le fibre del tirante non è uniforme nell'intorno del punto di applicazione del carico.

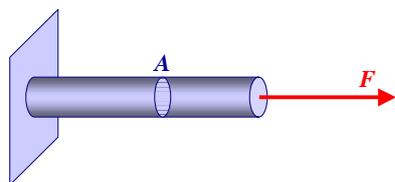
Tuttavia, per effetto della coesione tangenziale, allontanandosi dal punto di applicazione della forza, la sollecitazione si estende all'intera sezione del tirante.

Ad una distanza pari ad un diametro circa dal punto di applicazione, la distribuzione di forza può essere considerata uniforme.

Oltre questa distanza possono essere trascurati gli effetti locali del carico.

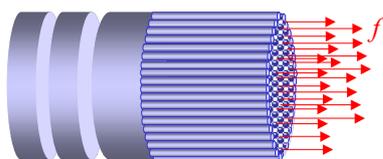
Si immagini il tirante costituito da tante fibre assiali. La forza F è applicata solo alla fibra centrale. Le altre fibre vengono messe in carico per effetto della coesione tangenziale.

Si consideri una barra di materiale omogeneo con un estremo vincolato e l'altro sollecitato da una forza assiale, applicata al baricentro della sezione.



Si può immaginare che le fibre del tirante siano soggette a forze elementari f la cui somma corrisponde al carico esterno F .

$$F = \sum f$$

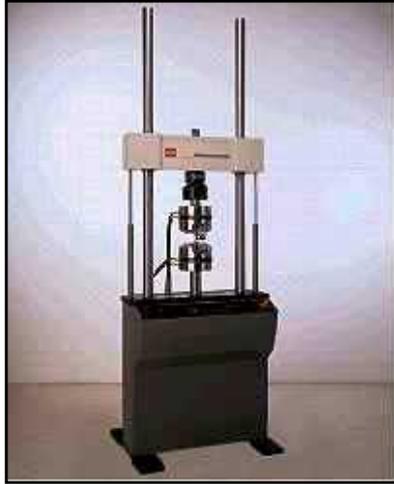


Se ci si pone il problema progettare la barra, ovvero di stabilire quale diametro essa debba avere per resistere ad una determinata forza F , è necessario effettuare una prova sperimentale su una barra simile, realizzata con lo stesso materiale e con la stessa sezione resistente A .

Prova di trazione

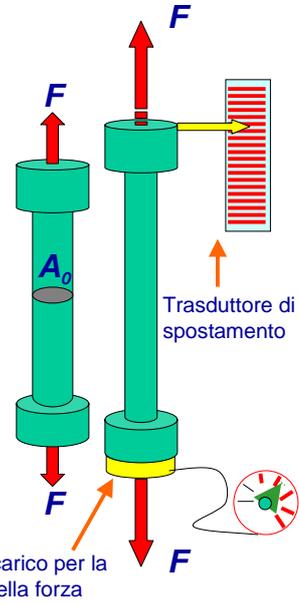
Trazione & compressione

Misura delle prestazioni del materiale: La prova di trazione



Macchina di trazione-compressione da 20 tonn

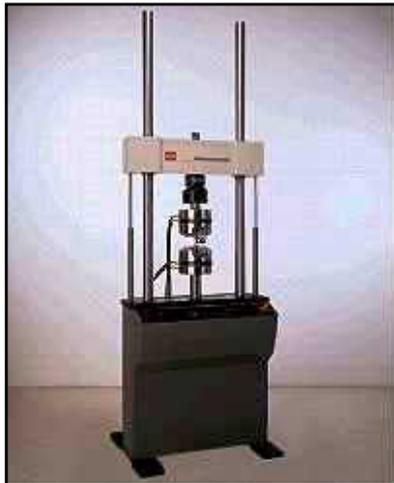
La forza applicata dalla macchina al provino viene incrementata gradualmente fino alla rottura.



Prova di trazione

Trazione & compressione

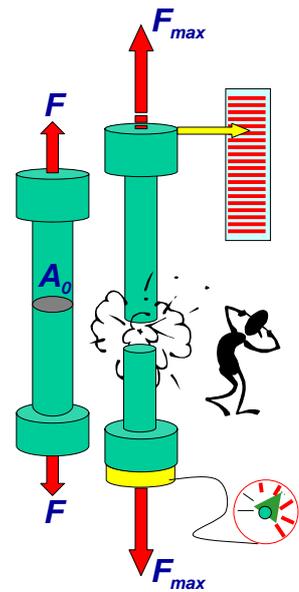
Misura delle prestazioni del materiale: La prova di trazione



Macchina di trazione-compressione da 20 tonn

La forza applicata dalla macchina al provino viene incrementata gradualmente fino alla rottura.

F_{max} è il carico massimo al quale il provino può resistere.



Prova di trazione

Trazione & compressione

Misura delle prestazioni del materiale: La prova di trazione

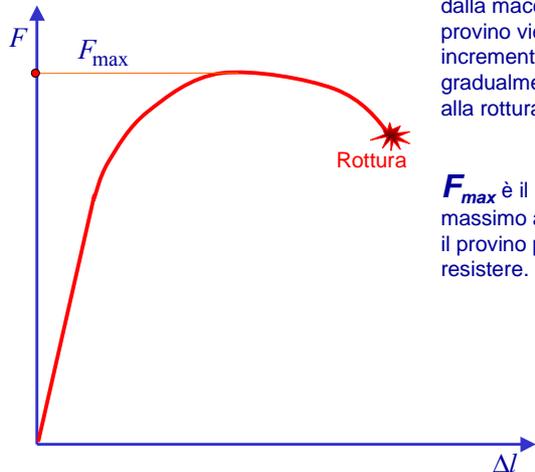
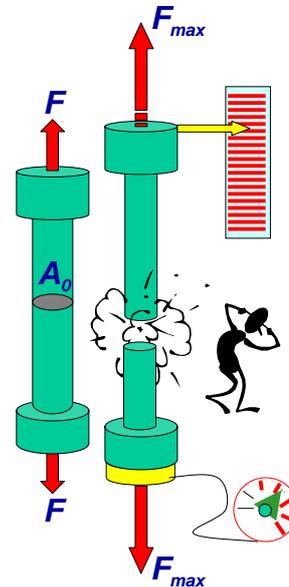


Grafico ottenuto dalla prova di trazione

La forza applicata dalla macchina al provino viene incrementata gradualmente fino alla rottura.

F_{max} è il carico massimo al quale il provino può resistere.

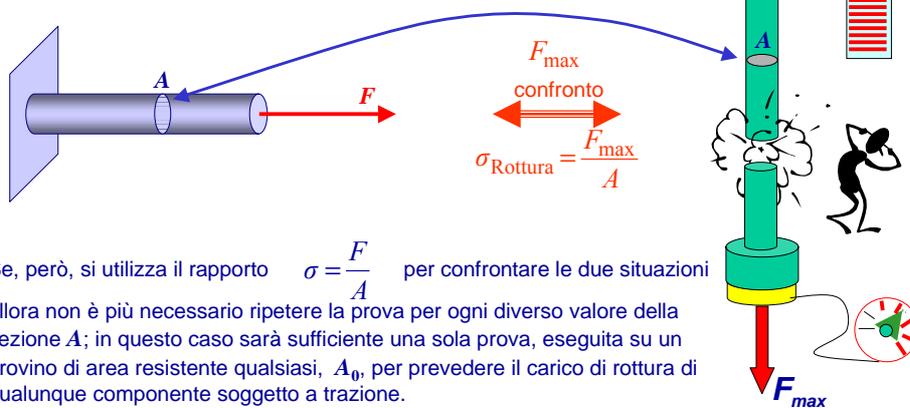


Prova di trazione

Trazione & compressione

Il valore misurato **F_{max}** nella prova di trazione dipende certamente dal materiale con cui il provino è realizzato ma dipende anche dalla sezione resistente **A**: dunque la prova non caratterizza il materiale.

Utilizzando il valore **F_{max}** per progettare un tirante si è costretti ad eseguire una prova su una barra identica, con la medesima sezione **A**.

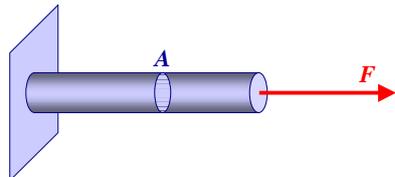


Se, però, si utilizza il rapporto $\sigma = \frac{F}{A}$ per confrontare le due situazioni allora non è più necessario ripetere la prova per ogni diverso valore della sezione **A**; in questo caso sarà sufficiente una sola prova, eseguita su un provino di area resistente qualsiasi, **A₀**, per prevedere il carico di rottura di qualunque componente soggetto a trazione.

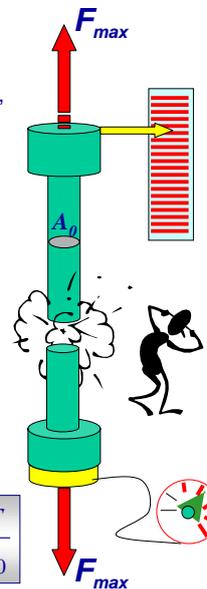
Il valore limite $\sigma_{Rottura}$ è indipendente dalla sezione e può quindi essere considerato una **caratteristica del materiale**.

Utilizzando tale valore limite, il progetto del tirante, ovvero la determinazione dell'area della sezione necessaria a sopportare il carico F , previsto dalla specifica, risulta agevole.

Dalla prova di trazione si ricava $\sigma_{Limite} = \sigma_{Rottura} = \frac{F_{max}}{A_0}$



confronto $\sigma_{Rottura} = \frac{F_{max}}{A}$



L'area della sezione del tirante necessaria per resistere alla forza F senza che si verifichi la rottura si calcola semplicemente

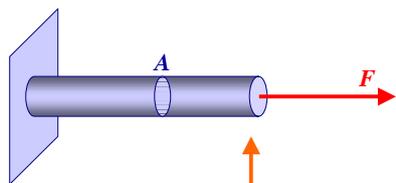
$A = \frac{F}{\sigma_L}$

Rispetto al valore minimo necessario è opportuno mantenere un margine di sicurezza

$A = X_S \frac{F}{\sigma_L} = \frac{F}{\sigma_0}$

$X_S \geq 1$ $\frac{\sigma_L}{X_S} = \sigma_0$ ← Tensione ammissibile

Relazione di progetto



Introducendo il concetto di sforzo specifico, ovvero di forza per unità di area si può scrivere:

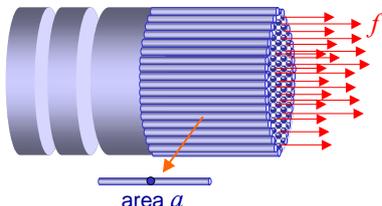
$F = \sum f \rightarrow F = \sum \sigma \cdot a$

Considerando, con maggiore aderenza alla realtà, che la sezione sia un continuo e non un numero discreto di fibre, la sommatoria precedente si può scrivere come integrale calcolato sulla sezione:

$F = \int_A \sigma dA$

Nell'ipotesi che la distribuzione di forza sia uniforme nella sezione si può scrivere:

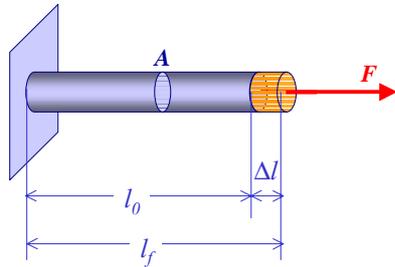
$\sigma = \frac{F}{A} \quad \frac{N}{m^2} \rightarrow Pa$



σ è la grandezza che deve essere confrontata con il valore limite consentito dal materiale: σ_L

Per effetto del carico F la barra subisce un allungamento Δl (o un accorciamento, in dipendenza dal verso della forza).

$$\Delta l = l_f - l_0$$



Anche in questo caso è conveniente ragionare in termini specifici piuttosto che assoluti.

Dividendo l'allungamento per la lunghezza della barra si ottiene l'allungamento specifico:

$$\varepsilon = \frac{l_f - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

L'allungamento specifico è detto deformazione

È possibile definire la deformazione in modo diverso:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l_f} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_f}{l_0}$$

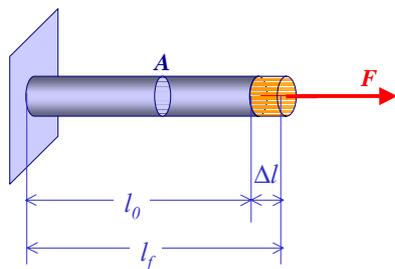
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

La deformazione così definita è detta "ingegneristica"

$$\varepsilon = \ln \frac{l_f}{l_0}$$

La deformazione così definita è detta "logaritmica" o anche "deformazione vera" (true strain)

Per effetto del carico F la barra subisce un allungamento Δl (o un accorciamento, in dipendenza dal verso della forza).



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

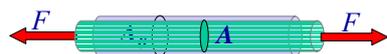
Deformazione "ingegneristica"

$$\varepsilon = \ln \frac{l_f}{l_0}$$

Deformazione "logaritmica"

Oltre alla variazione di lunghezza nella direzione di applicazione del carico, si osserva un altro effetto:

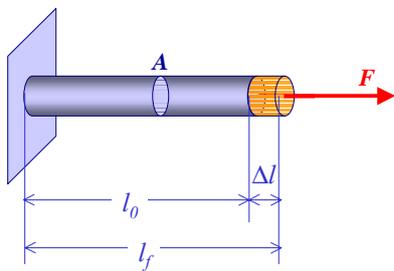
una variazione trasversale di dimensioni, sempre opposta a quella osservata parallelamente alla direzione di applicazione del carico



ν = coefficiente di Poisson

$$\varepsilon_{trasversale} = -\nu \varepsilon_{longitudinale}$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_{trasversale}}{\varepsilon_{longitudinale}}$$



Per molti materiali, entro un certo limite della tensione, esiste un rapporto di proporzionalità tra la forza F e l'allungamento Δl .

Causa

$$F = \Delta l \cdot K$$

Costante di proporzionalità

Effetto

La costante K è definita anche come *rigidezza* della struttura.

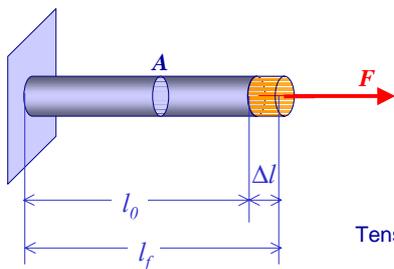
$$K = \frac{EA}{l_0}$$

$$F = \Delta l \cdot \frac{EA}{l_0}$$

La costante K dipende dalla geometria e dal materiale.

E è un parametro dipendente dal materiale.

Ricordando la definizione di tensione ed applicando la definizione di deformazione la relazione tra forza e spostamento può essere scritta in una forma indipendente dalla geometria e legata solo al materiale con cui è costruito il componente:



Normalizzando rispetto all'area della sezione si ottiene:

Tensione $\sigma = \frac{F}{A}$

Deformazione $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

$$F = \Delta l \frac{EA}{l_0}$$

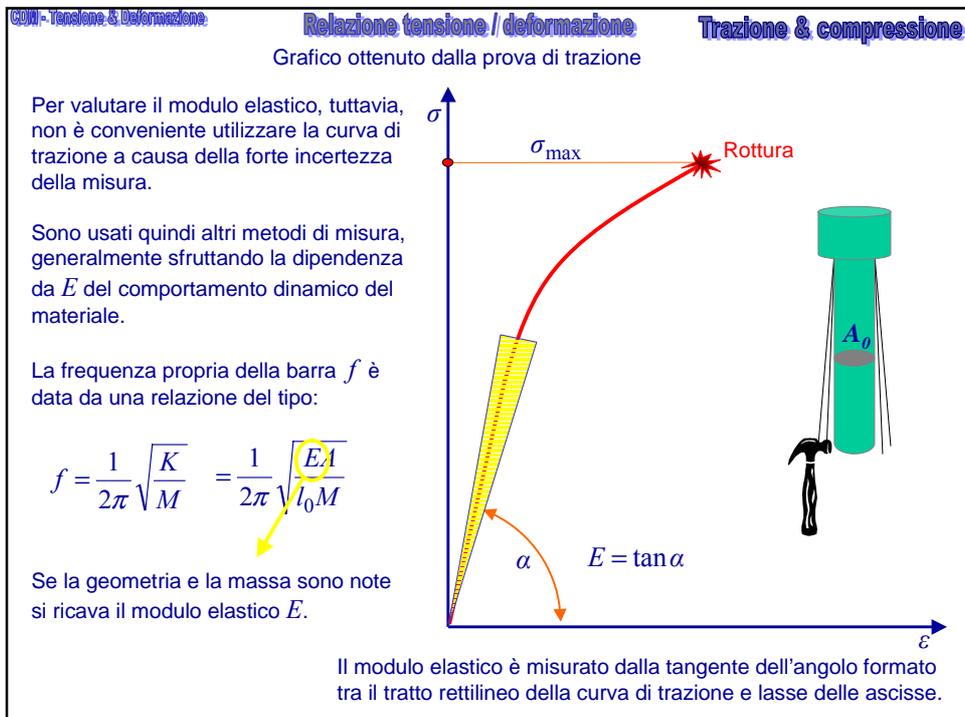
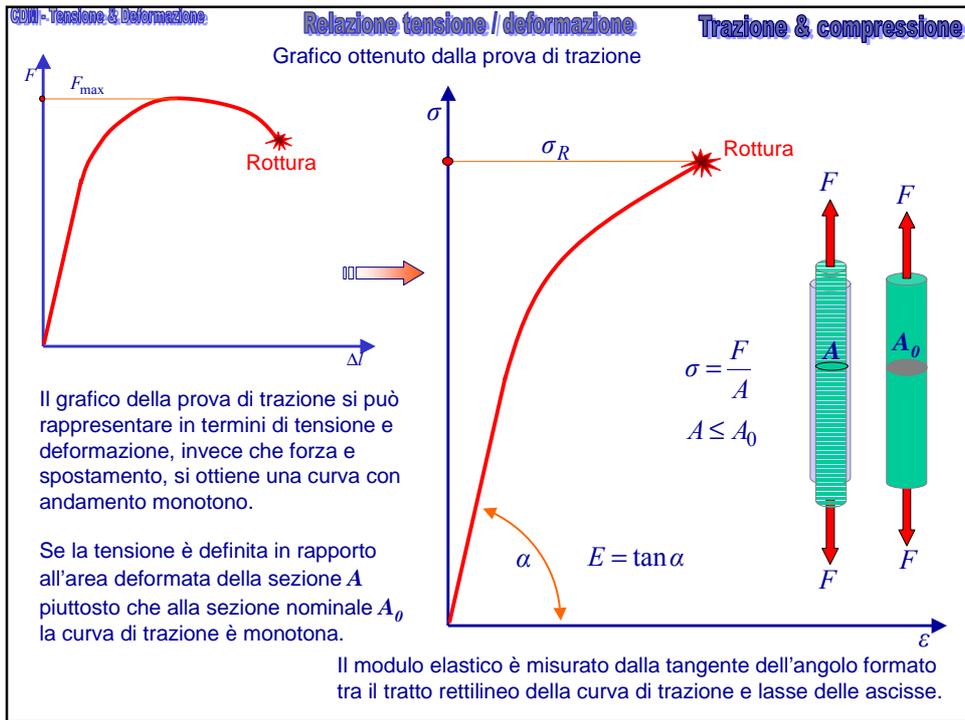
$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

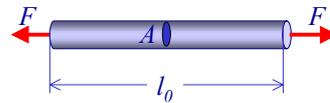
Relazione costitutiva

E è detto modulo elastico del materiale o modulo di Young

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$



Utilizzando i soli concetti discussi fin ora è già possibile impostare il progetto o la verifica di semplici strutture, costituite da tiranti e puntoni, utilizzando come condizione la **resistenza** o la **rigidezza**.



Calcolo a resistenza

Specifica: forza applicata F
 coefficiente di sicurezza X_s
 la struttura si considera danneggiata quando la tensione supera il valore limite σ_L

Definizione di tensione

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow A = X_s \frac{F}{\sigma_L}$$

Relazione di progetto

Calcolo a rigidezza (o a deformazione)

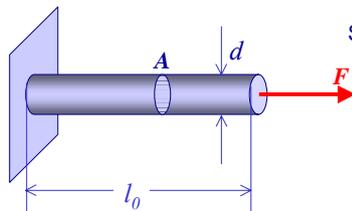
Specifica: forza applicata F
 lunghezza indeformata del tirante l_0
 modulo elastico E
 la struttura si considera danneggiata quando lo spostamento supera il valore limite Δl_L

Relazione forza spostamento

$$F = K \cdot \Delta l = \Delta l \frac{EA}{l_0}$$

$$A = X_s \frac{F \cdot l_0}{E \cdot \Delta l_L}$$

Relazione di progetto



Specifica: tirante a sezione piena circolare retta
 carico $F = 10$ kN
 lunghezza del tirante $l_0 = 900$ mm
 allungamento limite $\Delta l = 1$ mm
 fattore di sicurezza $X_s = 1.5$

Materiale (alluminio): tensione limite $\sigma_L = 120$ MPa
 modulo di Young $E = 70$ GPa

In base alla specifica si determini il diametro del tirante d

Dalla condizione di resistenza si ha:

$$A = X_s \frac{F}{\sigma_0} = 1.5 \cdot \frac{10000}{120E6} = 125.0 \text{ E-6 m}^2 = 125.0 \text{ mm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 125}{\pi}} = 12.6 \text{ mm}$$

Resistenza	$d = 12.6 \text{ mm}$
rigidezza	$d = 15.7 \text{ mm}$

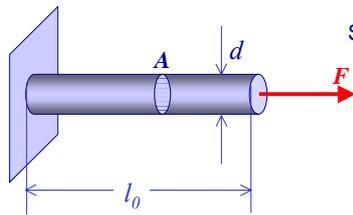
Dalla condizione di rigidezza si ha:

$$A = X_s \frac{F \cdot l_0}{E \cdot \Delta l_L} = 1.5 \cdot \frac{10000 \cdot 0.9}{70E9 \cdot 0.001} = 192.9 \text{ E-6 m}^2 = 192.9 \text{ mm}^2$$

$d = 15.7 \text{ mm}$ La condizione di rigidezza è più stringente e richiede un diametro maggiore.

Esempio di calcolo

Trazione & compressione



Specifica: tirante a sezione piena circolare retta
 carico $F = 10 \text{ kN}$
 allungamento limite $\Delta l = 1 \text{ mm}$
 fattore di sicurezza $X_s = 1.5$
 Materiale (alluminio): tensione limite $\sigma_L = 120 \text{ MPa}$
 modulo di Young $E = 70 \text{ GPa}$

In base alla specifica si calcolino le dimensioni del tirante: d ed l_0

Non è più data in specifica la lunghezza l_0 ; le variabili di progetto sono quindi 2: d ed l_0

La condizione di resistenza non è cambiata $A = X_s \frac{F}{\sigma_0}$

quindi i valori dell'area e del diametro che rispettano questa condizione sono:
 $A = 125.0 \text{ mm}^2$
 $d = 12.6 \text{ mm}$

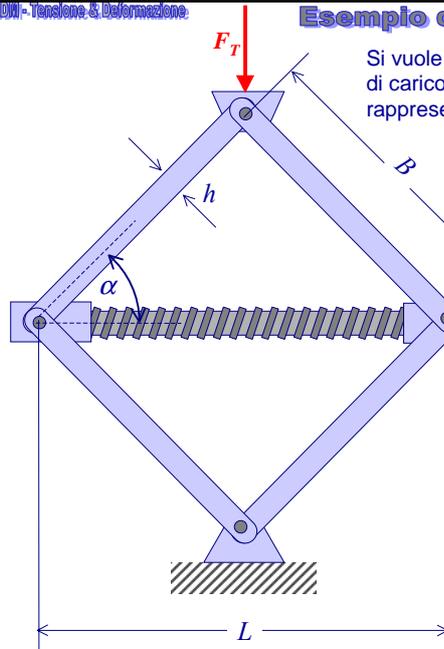
Dimensioni:
 $d = 12.6 \text{ mm}$
 $l_0 = 583.3 \text{ mm}$

Dalla condizione di rigidezza si ha:

$$A = X_s \frac{F \cdot l_0}{E \cdot \Delta l_L} \rightarrow l_0 = \frac{E \cdot \Delta l_L \cdot A}{X_s \cdot F} = \frac{70E9 \cdot 0.001 \cdot 125E-6}{1.5 \cdot 10000} = 583.3 \text{ mm}$$

Esempio di calcolo

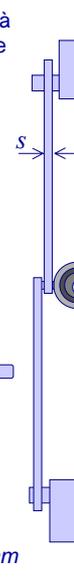
Trazione & compressione



Si vuole verificare la capacità di carico del martinetto a vite rappresentato nello schizzo

DATI
 $B = 200 \text{ mm}$
 $h = 20 \text{ mm}$
 $s = 8 \text{ mm}$
 $L = \text{tale che}$
 $20^\circ < \alpha < 60^\circ$
 $d \text{ (vite)} = 15 \text{ mm}$

Materiale:
 $\sigma_R = 300 \text{ MPa}$



Sfruttando la simmetria rispetto al piano verticale nel quale giace l'asse della vite, è possibile studiare solo metà della struttura.

Della vite si considera solo metà della sezione.

CDM - Tensione & Deformazione **Esempio di calcolo** **Trazione & compressione**

F_T è la forza totale applicata al martinetto;
 F è la forza applicata alla metà del martinetto in esame.

$F = \frac{F_T}{2}$

Analisi delle forze applicate ai vari componenti

Facendo l'equilibrio nel nodo A si ottiene:

$$F = 2 \cdot F_P \cdot \sin \alpha$$

$$F_P = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha}$$

Facendo l'equilibrio nel nodo D (o C è lo stesso) si ottiene:

$$F_V = 2 \cdot F_P \cdot \cos \alpha$$

$$F_V = 2 \cdot \frac{F}{2 \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{F}{\tan \alpha}$$

La forza applicata al tirante centrale è metà di quella applicata in realtà alla vite, della quale però si considera solo metà della sezione resistente.

La configurazione più sfavorevole si verifica per il valore minimo di α , quindi 20°

CDM - Tensione & Deformazione **Esempio di calcolo** **Trazione & compressione**

F_T è la forza totale applicata al martinetto;
 F è la forza applicata alla metà del martinetto in esame.

$F = \frac{F_T}{2}$

Le forze nei puntoni valgono quindi:

$$F_P = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{F_T}{4 \cdot \sin \alpha}$$

La forze nel tirante, ovvero nella vite valgono:

$$F_V = \frac{F}{\tan \alpha} = \frac{F_T}{2 \cdot \tan \alpha}$$

The diagram shows the same scissor mechanism as above, but with force directions and types indicated. At nodes A and B, the forces are labeled 'compressione' (compression) with red arrows pointing towards the nodes. At nodes C and D, the forces are labeled 'compressione' with red arrows pointing away from the nodes. The horizontal force at node D is labeled 'trazione' (tension) with a red arrow pointing towards node D. The angle alpha is shown between the scissor arms and the horizontal, and 20 degrees between the scissor arms and the vertical.

In conclusione si ha:

$$F_P = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{F_T}{4 \cdot \sin \alpha} \quad \text{Area puntone: } A_P = h \cdot s = 0.02 \cdot 0.008 = 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$F_V = \frac{F}{2 \cdot \tan \alpha} = \frac{F_T}{2 \cdot \tan \alpha} \quad \text{Area vite: } A_V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.015^2}{4} = 1.7671 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Si assume quale coefficiente di sicurezza X_S il valore 2.5

$$\text{quindi la tensione ammissibile vale} \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_R}{X_S} = \frac{300E6}{2.5} = 120 \text{ MPa}$$

$$\text{Tensione nella vite: } \sigma_V = \frac{F_V}{A_V/2} = \frac{2 \cdot F_V}{A_V} = \frac{2 \cdot F_T}{2 \cdot \tan \alpha \cdot A_V} = \sigma_0 \quad \rightarrow \quad F_T = \tan \alpha \cdot A_V \cdot \sigma_0$$

$$\text{Tensione nei puntone: } \sigma_P = \frac{F_P}{A_P} = \frac{F_T}{4 \cdot \sin \alpha \cdot A_P} = \sigma_0 \quad \rightarrow \quad F_T = 4 \cdot \sin \alpha \cdot A_P \cdot \sigma_0$$

In conclusione si ha:

$$F_P = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{F_T}{4 \cdot \sin \alpha} \quad \text{Area puntone: } A_P = h \cdot s = 0.02 \cdot 0.008 = 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$F_V = \frac{F}{2 \cdot \tan \alpha} = \frac{F_T}{2 \cdot \tan \alpha} \quad \text{Area vite: } A_V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.015^2}{4} = 1.7671 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Si assume quale coefficiente di sicurezza X_S il valore 2.5

$$\text{quindi la tensione ammissibile vale} \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_R}{X_S} = \frac{300E6}{2.5} = 120 \text{ MPa}$$

Quindi per $\alpha = 20^\circ$ si ha:

$$\text{Per la vite: } F_T = \tan \alpha \cdot A_V \cdot \sigma_0 = \tan 20 \cdot 1.7671 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6 = 7718 \text{ N}$$

$$\text{Nei puntone: } F_T = 4 \cdot \sin \alpha \cdot A_P \cdot \sigma_0 = 4 \cdot \sin 20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6 = 26267 \text{ N}$$

La vite risulta essere l'elemento debole del sistema.

È opportuno, quindi, un aumento di sezione per la vite.

In conclusione si ha:

$$F_P = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{F_T}{4 \cdot \sin \alpha} \quad \text{Area puntone: } A_P = h \cdot s = 0.02 \cdot 0.008 = 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$F_V = \frac{F}{2 \cdot \tan \alpha} = \frac{F_T}{2 \cdot \tan \alpha} \quad \text{Area vite: } A_V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.015^2}{4} = 1.7671 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Si assume quale coefficiente di sicurezza X_S il valore 2.5

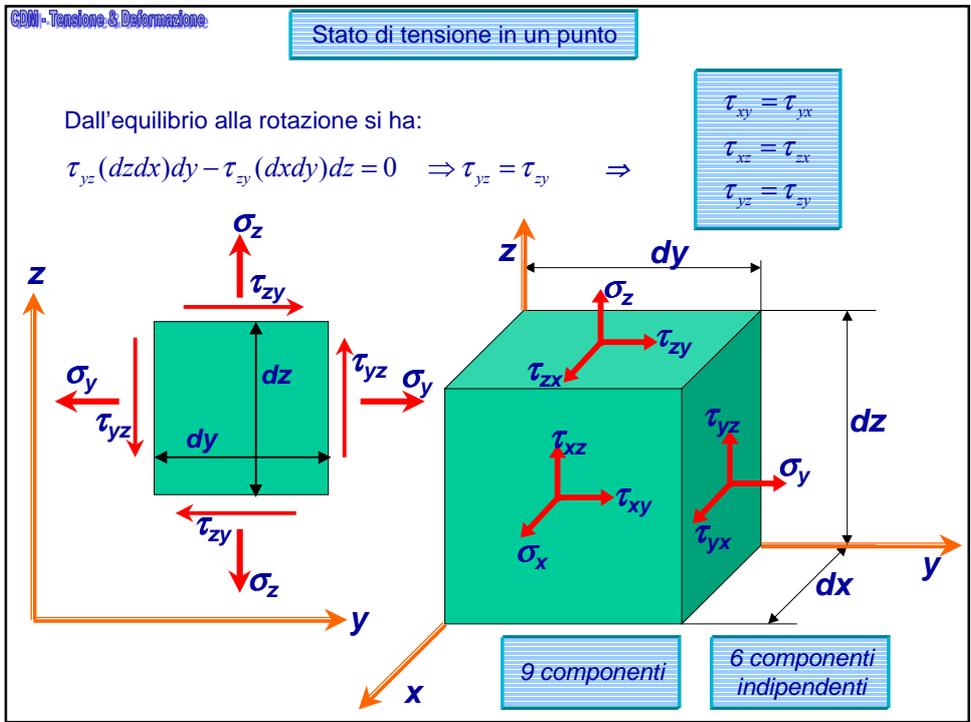
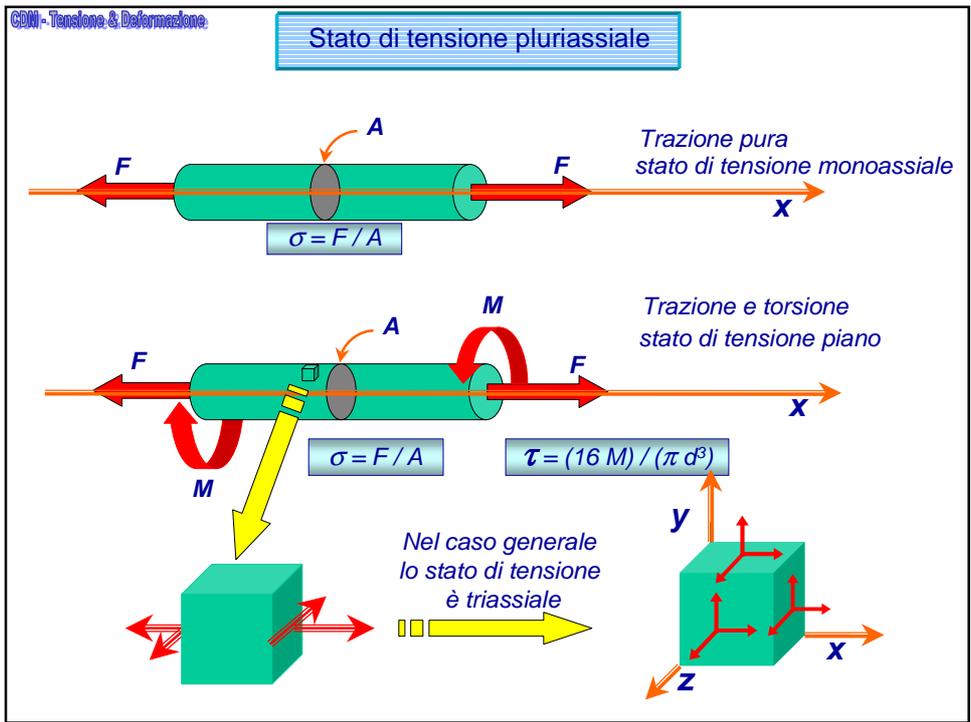
quindi la tensione ammissibile vale $\sigma_0 = \frac{\sigma_R}{X_S} = \frac{300 \text{ E}6}{2.5} = 120 \text{ MPa}$

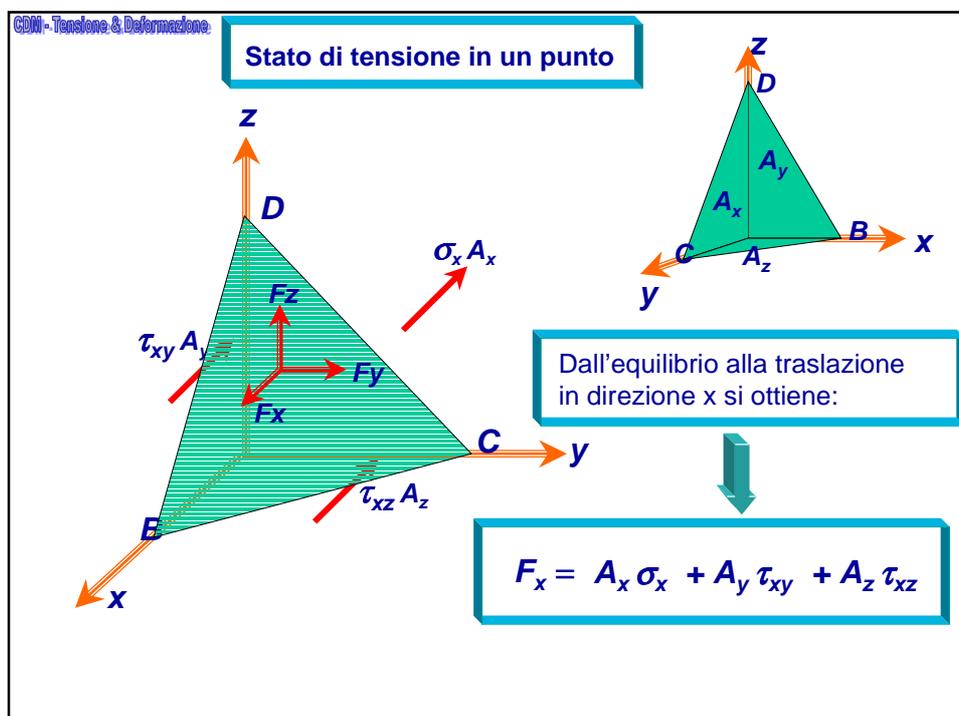
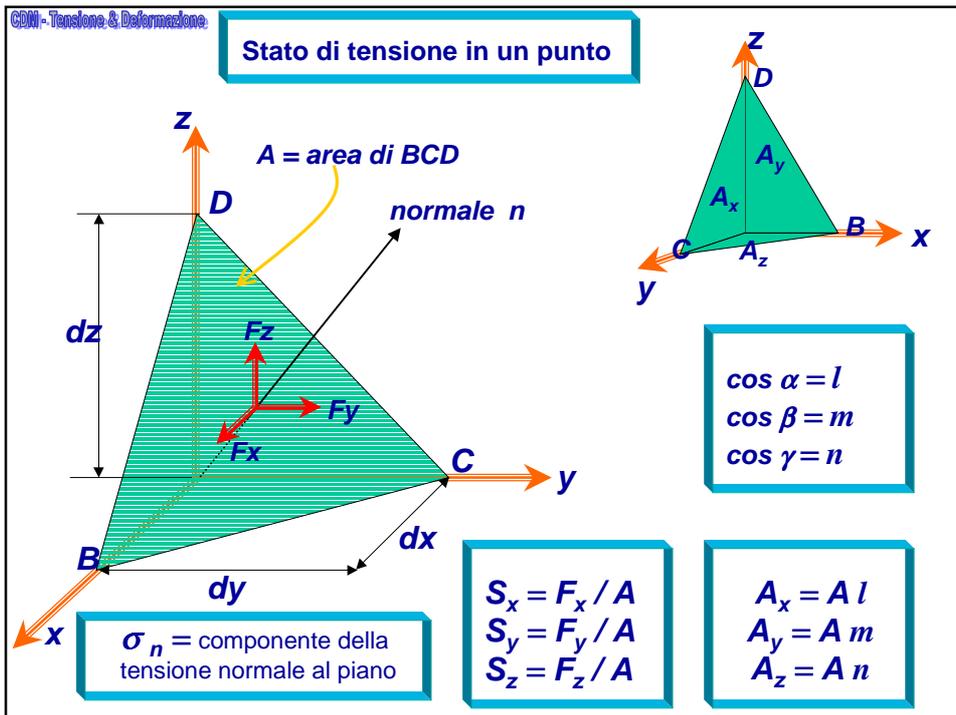
L'area della vite che assicura la stessa resistenza dei puntoni vale:

$$A_V = \frac{F_T}{\tan \alpha \cdot \sigma_0} = \frac{26267}{\tan 20 \cdot 120 \cdot 10^6} = 6.014 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

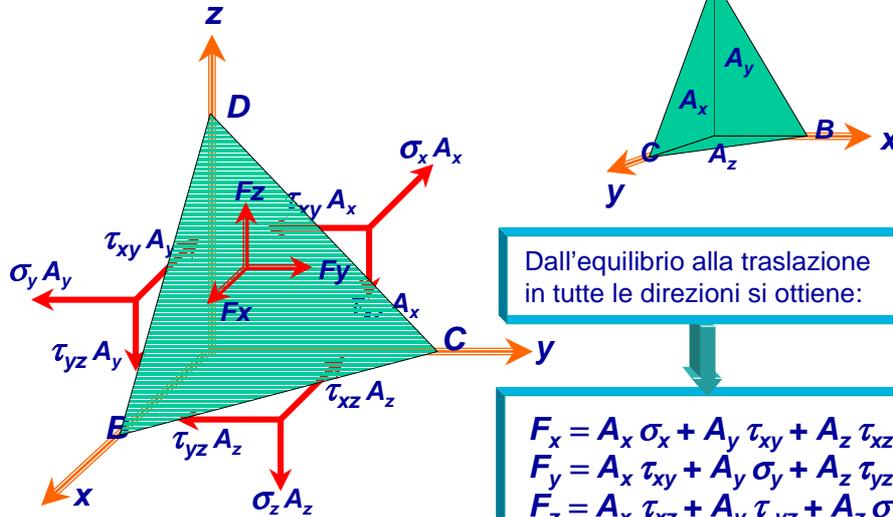
e quindi il diametro vale: $d = \sqrt{\frac{4 \cdot A_V}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6.014 \cdot 10^{-4}}{3.1415}} = 27.7 \text{ mm}$

Stato di tensione pluriassiale





Stato di tensione in un punto



$$\begin{aligned}
 F_x &= A_x \sigma_x + A_y \tau_{xy} + A_z \tau_{xz} \\
 F_y &= A_x \tau_{xy} + A_y \sigma_y + A_z \tau_{yz} \\
 F_z &= A_x \tau_{xz} + A_y \tau_{yz} + A_z \sigma_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_x &= F_x / A \\
 S_y &= F_y / A \\
 S_z &= F_z / A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_x &= A l \\
 A_y &= A m \\
 A_z &= A n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_x / A &= A_x / A \sigma_x + A_y / A \tau_{xy} + A_z / A \tau_{xz} \\
 F_y / A &= A_x / A \tau_{xy} + A_y / A \sigma_y + A_z / A \tau_{yz} \\
 F_z / A &= A_x / A \tau_{xz} + A_y / A \tau_{yz} + A_z / A \sigma_z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_x &= A_x \sigma_x + A_y \tau_{xy} + A_z \tau_{xz} \\ F_y &= A_x \tau_{xy} + A_y \sigma_y + A_z \tau_{yz} \\ F_z &= A_x \tau_{xz} + A_y \tau_{yz} + A_z \sigma_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= F_x / A \\ S_y &= F_y / A \\ S_z &= F_z / A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_x &= A l \\ A_y &= A m \\ A_z &= A n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xn} &= l S_x \\ S_{yn} &= m S_y \\ S_{zn} &= n S_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= l \sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz} \\ S_y &= l \tau_{xy} + m \sigma_y + n \tau_{yz} \\ S_z &= l \tau_{xz} + m \tau_{yz} + n \sigma_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xn} &= l^2 \sigma_x + l m \tau_{xy} + l n \tau_{xz} \\ S_{yn} &= l m \tau_{xy} + m^2 \sigma_y + m n \tau_{yz} \\ S_{zn} &= l n \tau_{xz} + m n \tau_{yz} + n^2 \sigma_z \end{aligned}$$

σ_n = componente della tensione normale al piano

$$\sigma_n = S_{xn} + S_{yn} + S_{zn}$$

$$\sigma_n = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2(l m \tau_{xy} + l n \tau_{xz} + m n \tau_{yz})$$

$$\begin{aligned} F_x &= A_x \sigma_x + A_y \tau_{xy} + A_z \tau_{xz} \\ F_y &= A_x \tau_{xy} + A_y \sigma_y + A_z \tau_{yz} \\ F_z &= A_x \tau_{xz} + A_y \tau_{yz} + A_z \sigma_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= F_x / A \\ S_y &= F_y / A \\ S_z &= F_z / A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_x &= A l \\ A_y &= A m \\ A_z &= A n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xn} &= l S_x \\ S_{yn} &= m S_y \\ S_{zn} &= n S_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= l \sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz} \\ S_y &= l \tau_{xy} + m \sigma_y + n \tau_{yz} \\ S_z &= l \tau_{xz} + m \tau_{yz} + n \sigma_z \end{aligned}$$

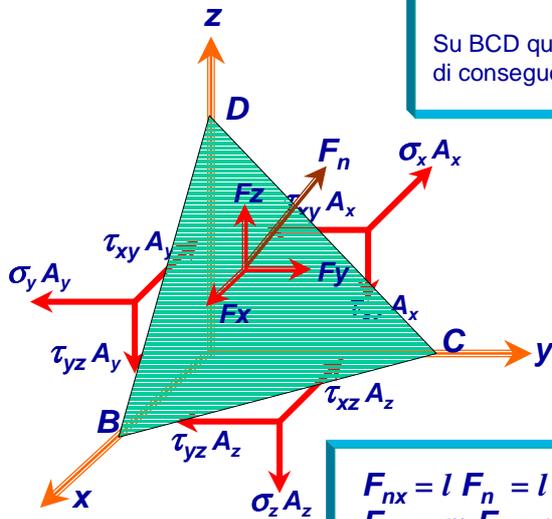
$$\begin{aligned} S_{xn} &= l^2 \sigma_x + l m \tau_{xy} + l n \tau_{xz} \\ S_{yn} &= l m \tau_{xy} + m^2 \sigma_y + m n \tau_{yz} \\ S_{zn} &= l n \tau_{xz} + m n \tau_{yz} + n^2 \sigma_z \end{aligned}$$

σ_n = componente della tensione normale al piano

$$\sigma_n = S_{xn} + S_{yn} + S_{zn}$$

$$\sigma_n = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2(l m \tau_{xy} + l n \tau_{xz} + m n \tau_{yz})$$

Tensioni principali



Il piano BCD è ora orientato parallelamente ad un piano principale.
 Su BCD quindi $\tau = 0$ e $\sigma_n = \sigma$ di conseguenza:

$$F_n = \sigma A$$

$$\begin{aligned} F_{nx} &= AS_x \\ F_{ny} &= AS_y \\ F_{nz} &= AS_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{nx} &= l F_n = l \sigma A \\ F_{ny} &= m F_n = m \sigma A \\ F_{nz} &= n F_n = n \sigma A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= l \sigma \\ S_y &= m \sigma \\ S_z &= n \sigma \end{aligned}$$

Tensioni principali

$$\begin{aligned} S_x &= l \sigma \\ S_y &= m \sigma \\ S_z &= n \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= l \sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz} \\ S_y &= l \tau_{xy} + m \sigma_y + n \tau_{yz} \\ S_z &= l \tau_{xz} + m \tau_{yz} + n \sigma_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l \sigma &= l \sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz} \\ m \sigma &= l \tau_{xy} + m \sigma_y + n \tau_{yz} \\ n \sigma &= l \tau_{xz} + m \tau_{yz} + n \sigma_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(\sigma - \sigma_x) - m \tau_{xy} - n \tau_{xz} &= 0 \\ -l \tau_{xy} + m(\sigma - \sigma_y) - n \tau_{yz} &= 0 \\ -l \tau_{xz} - m \tau_{yz} + n(\sigma - \sigma_z) &= 0 \end{aligned}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Equazione cubica dello stato di tensione

$$\begin{vmatrix} (\sigma - \sigma_x) & -\tau_{xy} & -\tau_{xz} \\ -\tau_{xy} & (\sigma - \sigma_y) & -\tau_{yz} \\ -\tau_{xz} & -\tau_{yz} & (\sigma - \sigma_z) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) + \\ -(\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned}$$

Tensioni principali

$$\sigma^3 - \sigma^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0$$

Le tensioni principali sono le soluzioni dell'equazione cubica dello stato di tensione

I coefficienti della cubica devono essere indipendenti dall'orientamento del sistema di riferimento scelto

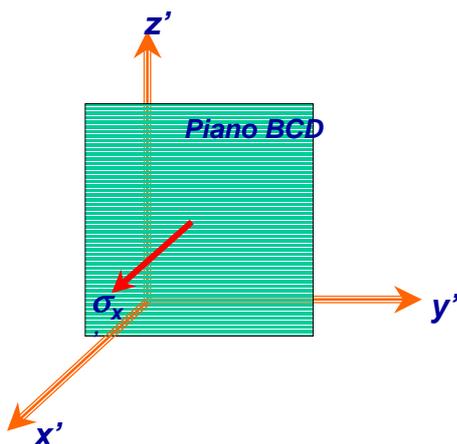
$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

Le tre quantità I_1 , I_2 e I_3 sono invarianti rispetto all'orientamento del sistema di riferimento

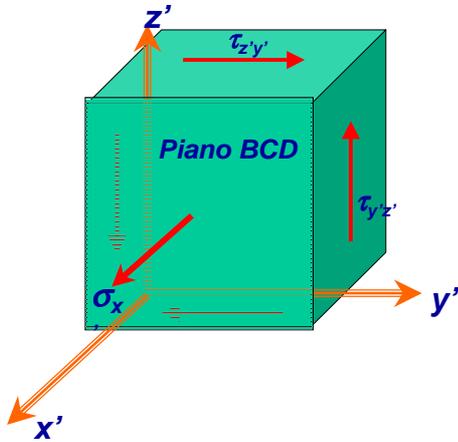
Tensioni principali



Il sistema di riferimento $x'y'z'$ è orientato con l'asse x' parallelo alla normale del piano BCD (che è un piano principale)

Sul piano BCD deve essere $\tau_{x'y'} = \tau_{x'z'} = 0$

Tensioni principali

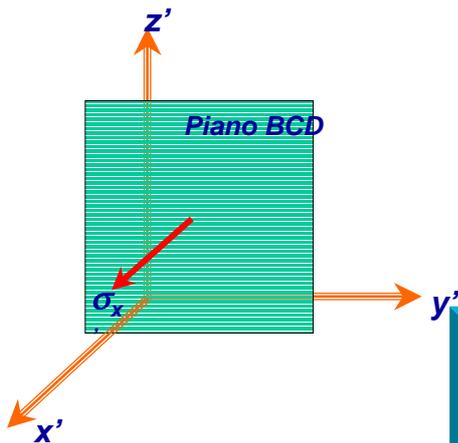


Il sistema di riferimento $x'y'z'$ è orientato con l'asse x' parallelo alla normale del piano BCD (che è un piano principale)

Sul piano BCD deve essere $\tau_{x'y'} = \tau_{x'z'} = 0$

L'unica componente tangenziale diversa da 0 è quindi $\tau_{y'z'} = \tau_{z'y'}$

Tensioni principali



Il sistema di riferimento $x'y'z'$ è orientato con l'asse x' parallelo alla normale del piano BCD (che è un piano principale)

Sul piano BCD deve essere $\tau_{x'y'} = \tau_{x'z'} = 0$

L'equazione cubica dello stato di tensione calcolata nel sistema $x'y'z'$ diventa:

$$\sigma^3 - \sigma^2 (\sigma_x + \sigma_{y'} + \sigma_{z'}) + \sigma (\sigma_x \sigma_{y'} + \sigma_{y'} \sigma_{z'} + \sigma_x \sigma_{z'} - \tau_{y'z'}^2) - (\sigma_x \sigma_{y'} \sigma_{z'} - \sigma_x \tau_{y'z'}^2) = 0$$

$$[\sigma - \sigma_x] [(\sigma - \sigma_{y'}) (\sigma - \sigma_{z'}) - \tau_{y'z'}^2] = 0$$

$$[\sigma - \sigma_{x'}] [(\sigma - \sigma_{y'}) (\sigma - \sigma_{z'}) - \tau_{y'z'}^2] = 0$$

L'equazione ha tre soluzioni

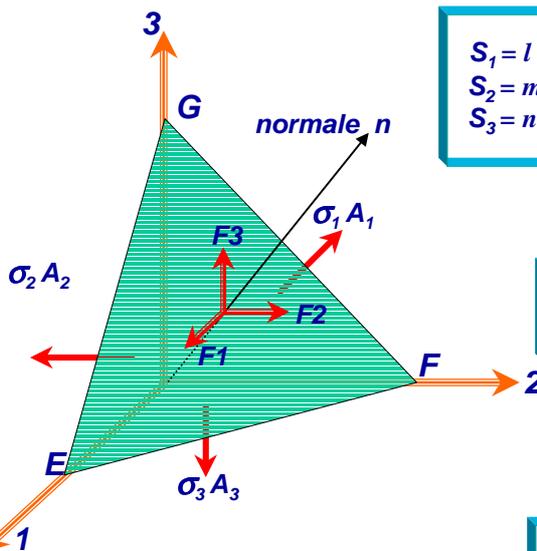
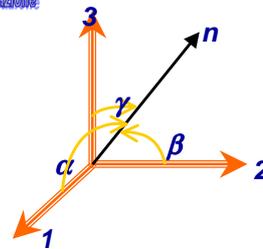
$$\sigma_1 = \sigma_{x'}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{y'} + \sigma_{z'}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{y'} - \sigma_{z'}}{2}\right)^2 + \tau_{y'z'}^2}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{y'} + \sigma_{z'}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{y'} - \sigma_{z'}}{2}\right)^2 + \tau_{y'z'}^2}$$

Tensioni principali: piani di massimo taglio

$$\begin{aligned} S_1 &= l \sigma_1 \\ S_2 &= m \sigma_2 \\ S_3 &= n \sigma_3 \end{aligned}$$



ricordando l'espressione di σ_n :

$$\sigma_n = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2(lm \tau_{xy} + ln \tau_{xz} + mn \tau_{yz})$$

e tenendo conto della particolare orientazione del sistema di riferimento, la tensione normale agente sul piano EFG è data da:

$$\sigma_n = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3$$

Il sistema di riferimento 1 2 3 è orientato secondo le direzioni principali

Tensioni principali: piani di massimo taglio

La forza risultante agente sul piano EFG può essere espressa come somma vettoriale delle sue componenti:

$$P_r = P_1 + P_2 + P_3$$

$$\sigma_r^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

$$\sigma_r^2 = \sigma_n^2 + \tau^2$$

$$\sigma_r^2 = l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2$$

$$\tau^2 = \sigma_r^2 - \sigma_n^2$$

ricordando la relazione

$$\sigma_n = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3$$

$$\tau^2 = l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 - (l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3)^2$$

Tensioni principali: piani di massimo taglio

$$\tau^2 = l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 - (l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3)^2$$

Calcolando le derivate parziali della τ^2 rispetto a $l m n$ e uguagliandole a 0 si ottengono i valori dei coseni direttori che individuano i piani di massimo taglio:

$$\begin{matrix} l = 0 \\ m = \pm \sqrt{1/2} \\ n = \pm \sqrt{1/2} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} l = \pm \sqrt{1/2} \\ m = 0 \\ n = \pm \sqrt{1/2} \end{matrix}$$

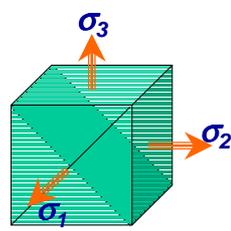
$$\begin{matrix} l = \pm \sqrt{1/2} \\ m = \pm \sqrt{1/2} \\ n = 0 \end{matrix}$$

E i valori del taglio su tali piani sono dati dalle relazioni:

$$\begin{matrix} \tau_1 = \pm 1/2 (\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_2 = \pm 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3) \\ \tau_3 = \pm 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2) \end{matrix}$$

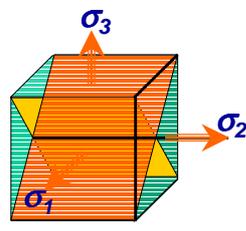
Tensioni principali: piani di massimo taglio

La giacitura dei piani di massimo taglio può essere rappresentata graficamente:



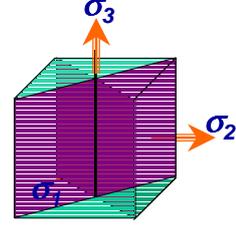
$$\begin{aligned}
 l &= 0 \\
 m &= \pm\sqrt{1/2} \\
 n &= \pm\sqrt{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\tau_1 = \pm 1/2 (\sigma_2 - \sigma_3)$$



$$\begin{aligned}
 l &= \pm\sqrt{1/2} \\
 m &= 0 \\
 n &= \pm\sqrt{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\tau_2 = \pm 1/2 (\sigma_1 - \sigma_3)$$



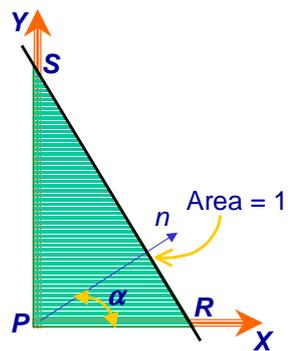
$$\begin{aligned}
 l &= \pm\sqrt{1/2} \\
 m &= \pm\sqrt{1/2} \\
 n &= 0
 \end{aligned}$$

$$\tau_3 = \pm 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2)$$

Il cerchio di Mohr

Si consideri il piano RS
parallelo all'asse z
ed inclinato di α rispetto all'asse x

Ipotesi: stato piano di tensione



Si immagini ora di spostare il punto di vista sull'asse z

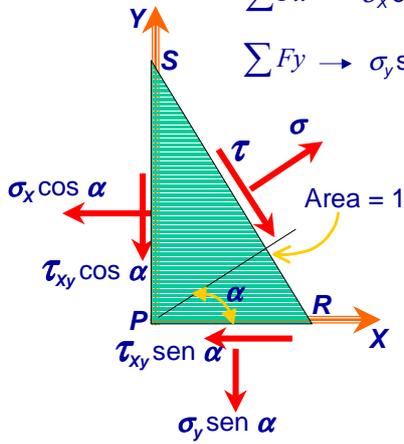
Il cerchio di Mohr

Si consideri lo stato tensionale sul piano RS

Dall'equilibrio alla traslazione si ha:

$$\sum F_x \rightarrow \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma \cos \alpha - \tau \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y \rightarrow \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma \sin \alpha + \tau \cos \alpha = 0$$



moltiplicando la prima per $\cos \alpha$
e la seconda per $\sin \alpha$ si ha:

$$\sigma_x \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma \cos^2 \alpha +$$

$$- \tau \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma \sin^2 \alpha +$$

$$+ \tau \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

sommando le due equazioni si ottiene:

$$\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma$$

Il cerchio di Mohr

$$\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma$$

ricordando che: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

l'equazione precedente può essere riscritta in forma leggermente diversa:

$$(\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha) + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma$$

quindi, moltiplicando e dividendo per 2 il primo termine, si ha:

$$1/2 (2 \sigma_x \cos^2 \alpha + 2 \sigma_y \sin^2 \alpha) + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma$$

ricordando, inoltre, che: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

da cui si ottiene: $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$ e $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

si può ancora riscrivere l'equazione precedente nella forma seguente:

$$1/2 [\sigma_x (1 + \cos 2\alpha) + \sigma_y (1 - \cos 2\alpha)] + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma$$

che equivale a:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

Il cerchio di Mohr

tornando ora alle due equazioni di equilibrio:

$$\sum F_x \rightarrow \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma \cos \alpha - \tau \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y \rightarrow \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma \sin \alpha + \tau \cos \alpha = 0$$

moltiplicando questa volta la prima per $\sin \alpha$ e la seconda per $\cos \alpha$ si ha:

$$\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \sin^2 \alpha - \sigma \sin \alpha \cos \alpha - \tau \sin^2 \alpha = 0$$

$$\sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha - \sigma \sin \alpha \cos \alpha + \tau \cos^2 \alpha = 0$$

sottraendo le due equazioni si ottiene:

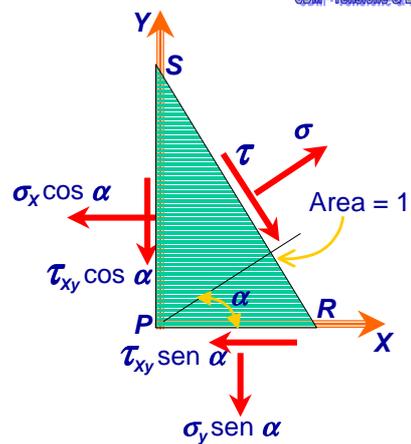
$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \tau = 0$$

che equivale a:

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Il cerchio di Mohr

Le componenti della tensione σ e τ sul piano RS e possono dunque essere espresse in funzione delle componenti σ_x e σ_y e dell'angolo α mediante le seguenti relazioni:



$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Il cerchio di Mohr

L'angolo α che individua i piani principali può essere ricavato cercando il massimo della funzione $\sigma(\alpha)$:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

ovvero, uguagliando a 0 la derivata $d\sigma/d\alpha$

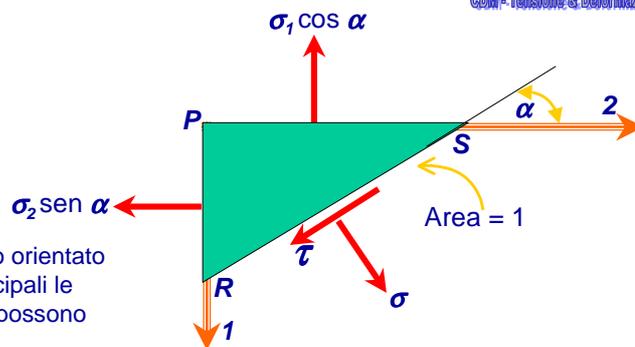
$$d\sigma/d\alpha = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2 \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha = 2 \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

e quindi

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Il cerchio di Mohr



Nel sistema di riferimento orientato secondo le direzioni principali le equazioni di equilibrio si possono scrivere come segue:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha$$

Posto:

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \delta$$

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \rho$$

$$(\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$

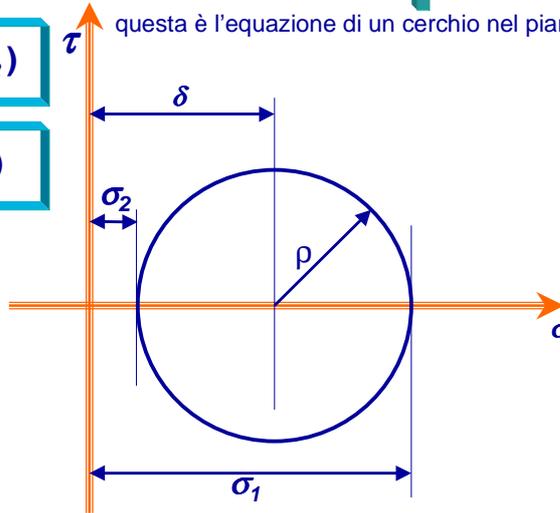
Il cerchio di Mohr

$$(\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$

questa è l'equazione di un cerchio nel piano $\sigma - \tau$

$$\delta = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\rho = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$



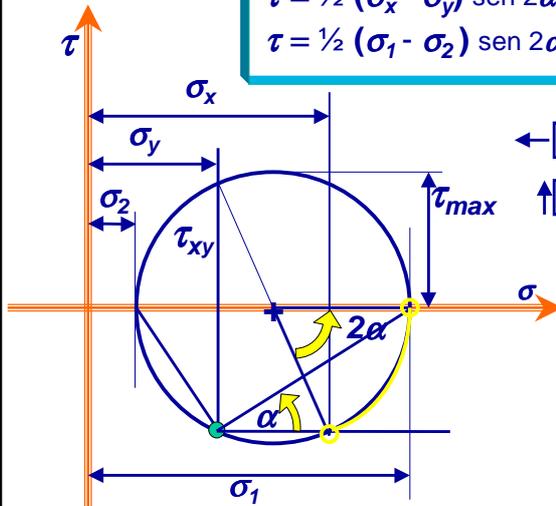
$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha$$

Il cerchio di Mohr

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha$$



$\left[\begin{array}{c} + \\ \sigma \\ - \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} - \\ \sigma \\ + \end{array} \right]$ convenzione sui segni delle tensioni
 $\left[\begin{array}{c} + \\ \tau \\ - \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} - \\ \tau \\ + \end{array} \right]$

L'angolo α che individua il piano principale rispetto alla direzione x è dato dalla relazione:

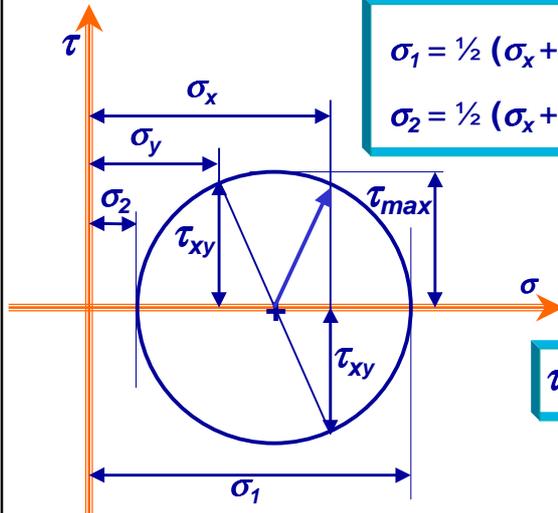
$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Il cerchio di Mohr

Le tensioni principali possono essere ricavate geometricamente dal cerchio di Mohr se sono note le componenti di tensione nel sistema xy :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left\{ \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \right\}}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\left\{ \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \right\}}$$



e il massimo valore del taglio è dato da:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left\{ \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \right\}}$$

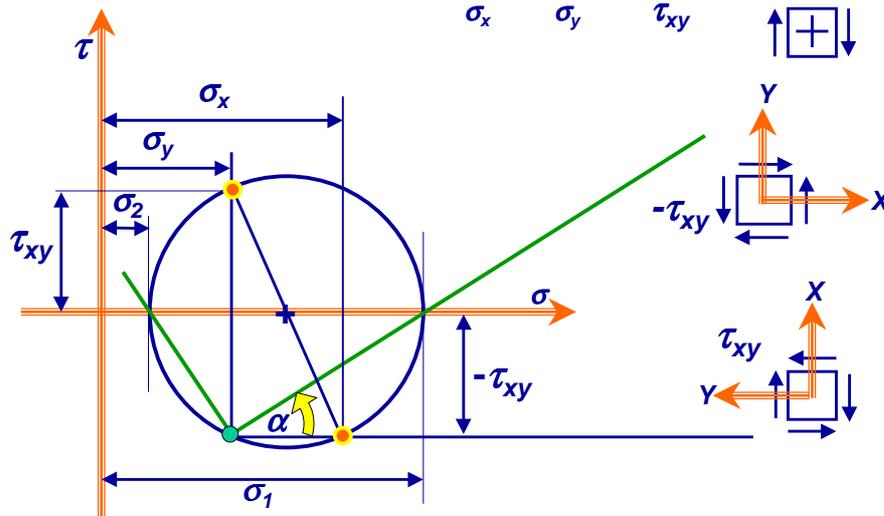
$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2$$

Il cerchio di Mohr

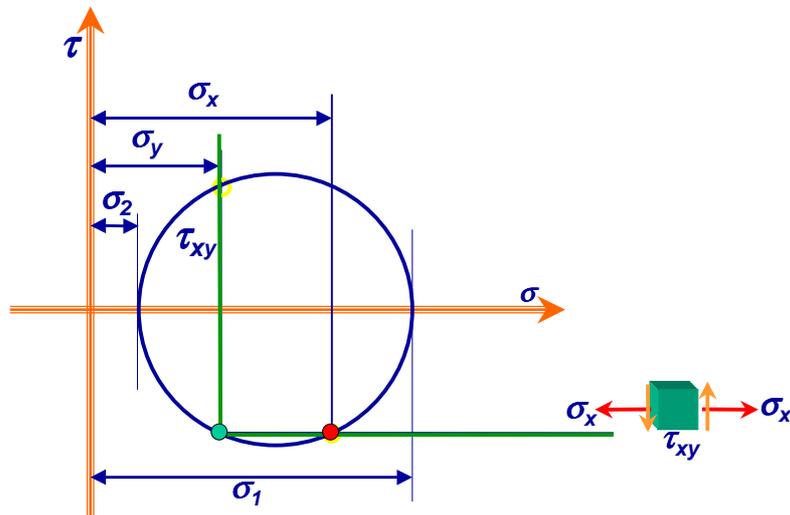
Costruzione del cerchio di Mohr

Dati:

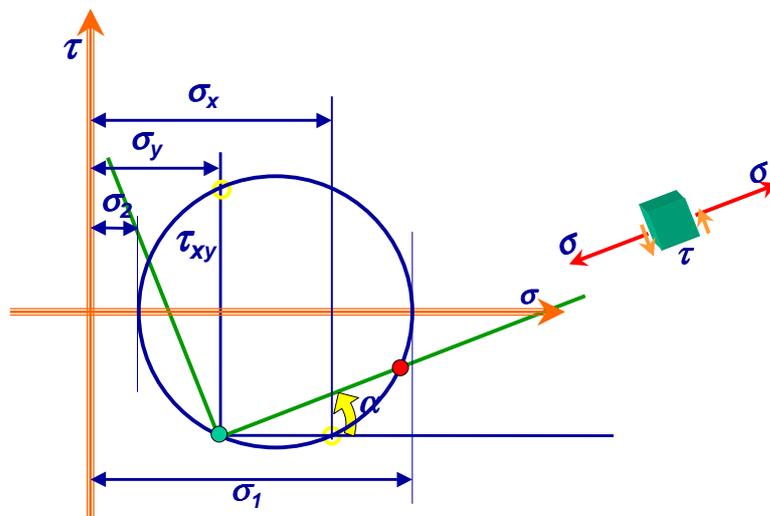
σ_x σ_y τ_{xy}



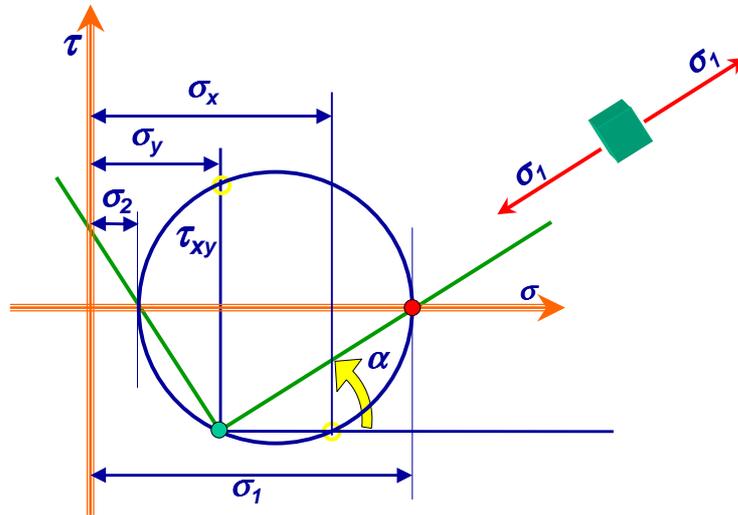
Il cerchio di Mohr



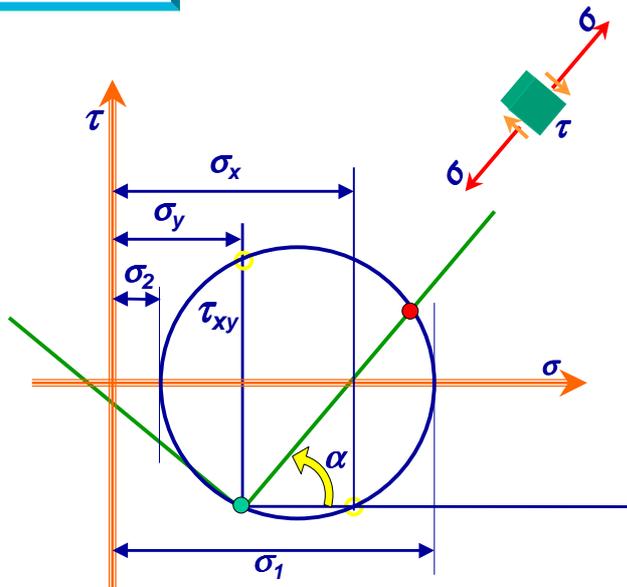
Il cerchio di Mohr



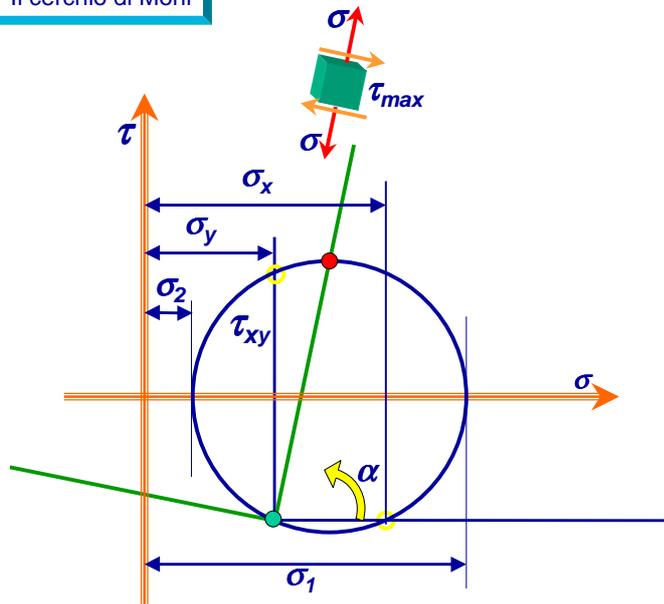
Il cerchio di Mohr



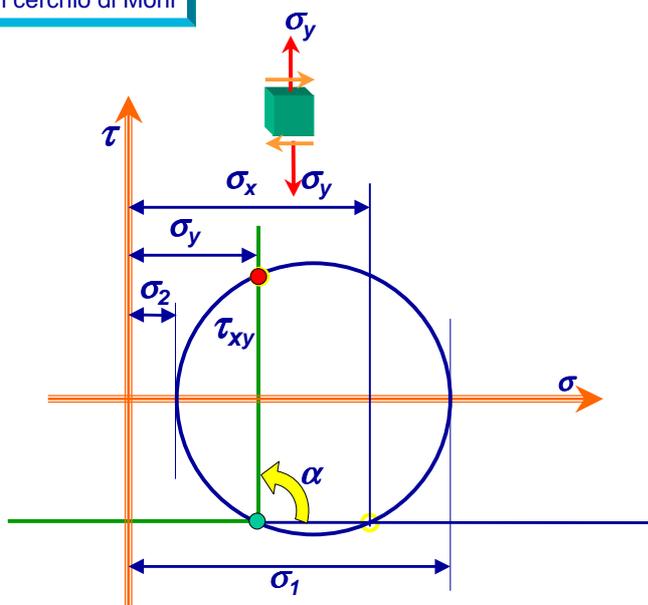
Il cerchio di Mohr



Il cerchio di Mohr

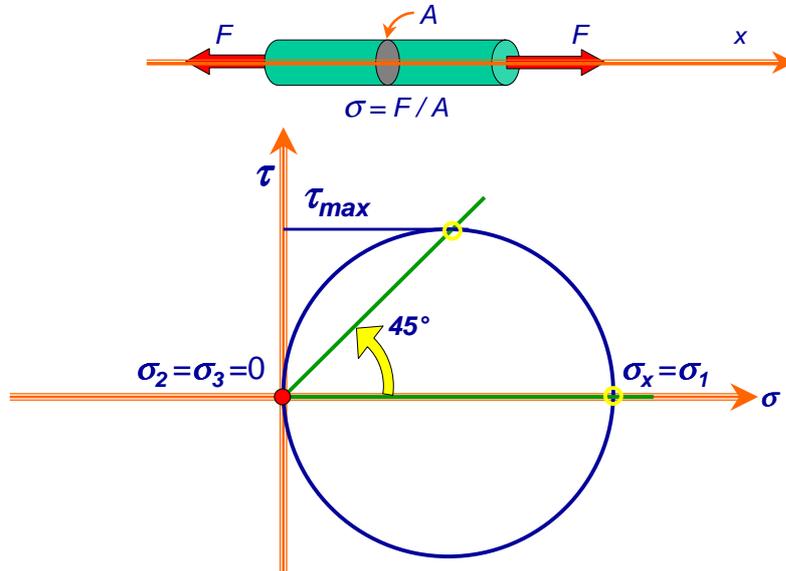


Il cerchio di Mohr



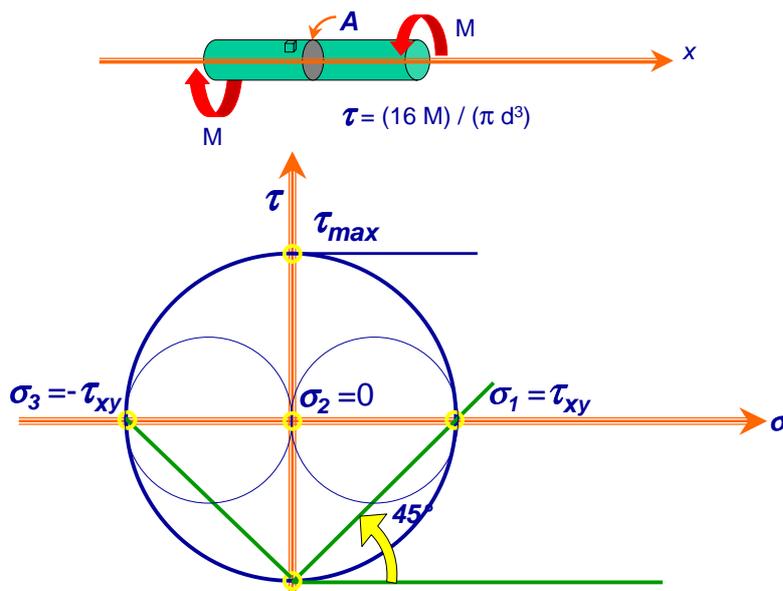
Il cerchio di Mohr

Caso della trazione pura



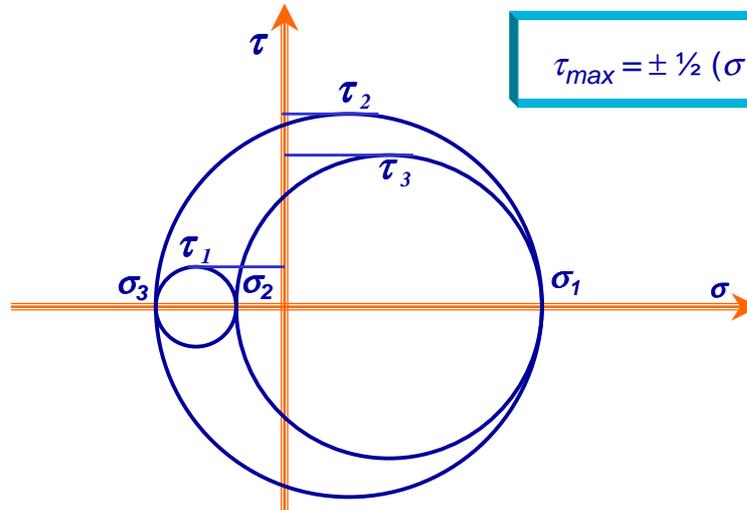
Il cerchio di Mohr

Caso della torsione pura



Il cerchio di Mohr

Stato di tensione triassiale



$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

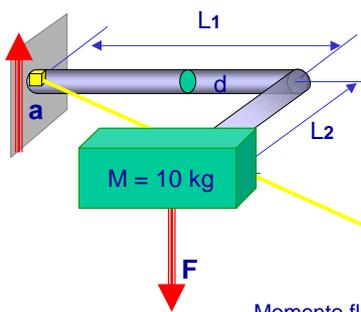
$$\tau_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\tau_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\tau_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

Esempio di calcolo

Il supporto rappresentato nello schizzo è costituito da una barra in alluminio a sezione circolare retta. Si vuol calcolare il diametro in base alla seguente specifica:



Specifica: $L_1 = 0.5m$ $L_2 = 0.5m$
 $M = 10 \text{ kg}$
 $a = 4g \cong 40 \text{ m/s}^2$

Tensione ammissibile $\tau_{max} = 50 \text{ MPa}$

$$F = M \cdot a = 40 \cdot 10 = 400 \text{ N}$$

d?

Nella sezione d'incastro si ha:

Momento flettente $M_f = F \cdot L_1$ $\sigma_f = \frac{32M_f}{\pi d^3} = \frac{32FL_1}{\pi d^3}$

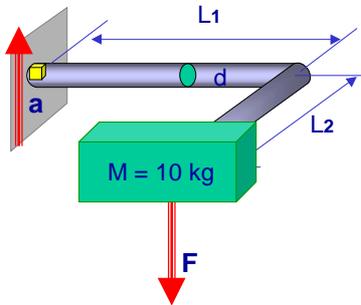
Momento torcente $M_t = F \cdot L_2$ $\tau = \frac{16M_t}{\pi d^3} = \frac{16FL_2}{\pi d^3}$

Le tensioni principali sono calcolate dall'equazione:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{dove } \sigma_x = \sigma_f \text{ e } \sigma_y = 0$$

Esempio di calcolo

Il supporto rappresentato nello schizzo è costituito da una barra in alluminio a sezione circolare retta. Si vuol calcolare il diametro in base alla seguente specifica:



Specifica: $L_1 = 0.5\text{m}$ $L_2 = 0.5\text{m}$
 $M = 10\text{ kg}$
 $a = 4\text{g} \cong 40\text{ m/s}^2$
 Tensione ammissibile $\tau_{\max} = 50\text{ MPa}$
 $F = M \cdot a = 40 \cdot 10 = 400\text{ N}$

$$\sigma_f = \frac{32FL_1}{\pi d^3} \quad \tau = \frac{16FL_2}{\pi d^3}$$

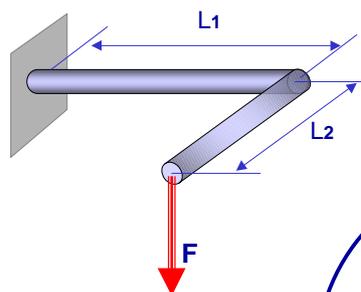
$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{32FL_1}{2\pi d^3} \pm \sqrt{\left(\frac{32FL_1}{2\pi d^3}\right)^2 + \left(\frac{16FL_2}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{16F}{\pi d^3} \left[L_1 \pm \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right]$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{16F}{2\pi d^3} \left(L_1 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} - L_1 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right) = \frac{16F}{\pi d^3} \left(\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right)$$

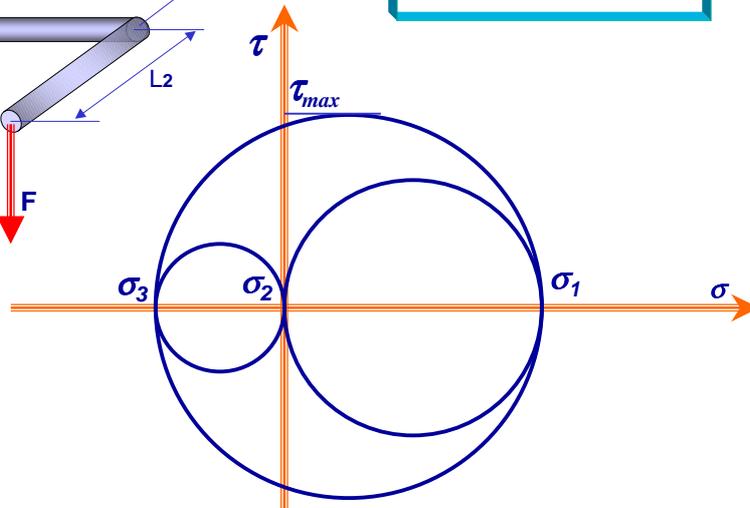
$$d = \sqrt[3]{\frac{16F}{\pi \tau_{\max}} \left(\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right)} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 400}{\pi \cdot 50E6} \left(\sqrt{0.5^2 + 0.5^2} \right)} = 36.2\text{mm}$$

Esempio di calcolo

Il cerchio di Mohr nella sezione di incastro nel caso $L_1 = L_2$

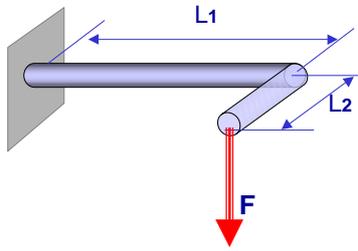


$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

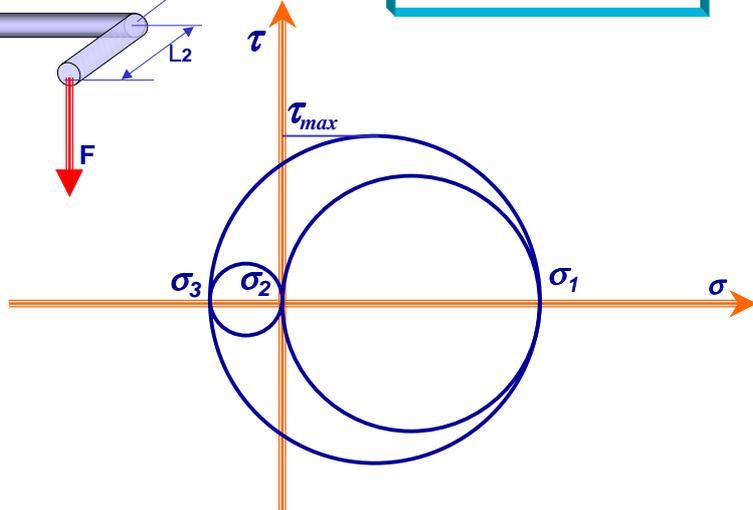


Esempio di calcolo

Il cerchio di Mohr nella sezione di incastro
nel caso $L_1 > L_2$

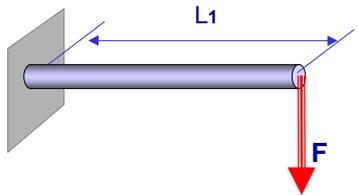


$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

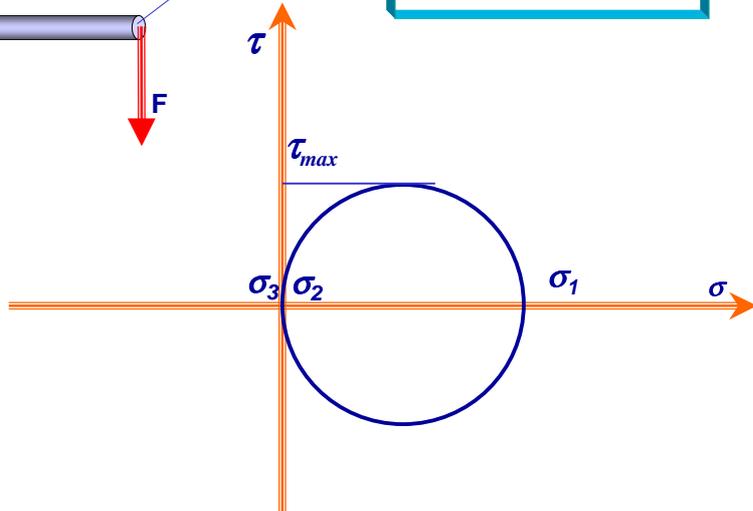


Esempio di calcolo

Il cerchio di Mohr nella sezione di incastro
nel caso $L_2 = 0$



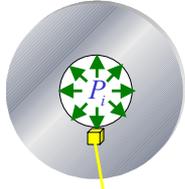
$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$



Esempio di calcolo

Il disco rappresentato nello schizzo è soggetto ad una pressione di forzamento.

In corrispondenza del raggio interno lo stato tensionale è dato dalle seguenti relazioni:



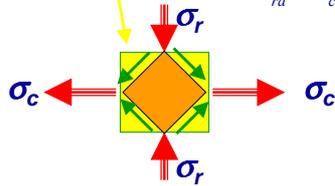
$$\sigma_r = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 - \frac{R_e^2}{R_i^2} \right) \quad \text{tensione radiale}$$

$$\sigma_c = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_e^2}{R_i^2} \right) \quad \text{tensione circonferenziale}$$

$$\sigma_a = 0 \quad \text{la tensione assiale è nulla}$$

$$\tau_{rc} = 0 \quad \text{la tensione tangenziale è nulla}$$

$$\tau_{ra} = \tau_{ca} = 0 \quad \text{nulle sono anche le altre tensioni di taglio}$$



σ_c e σ_r sono quindi tensioni principali
la $\sigma_a = 0$ è la terza tensione principale

Esempio di calcolo

Disco soggetto ad una pressione di forzamento.

Posto: $P_i = 30 \text{ MPa}$
 $R_e = 0.25 \text{ m}$ $R_i = 0.05 \text{ m}$

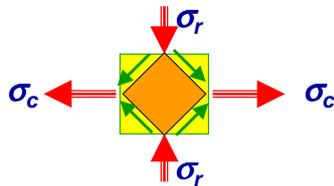
si ha:



$$\sigma_c = \sigma_1 = \frac{30 \cdot 0.05^2}{0.25^2 - 0.05^2} \left(1 + \frac{0.25^2}{0.05^2} \right) = 32.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r = \sigma_3 = \frac{30 \cdot 0.05^2}{0.25^2 - 0.05^2} \left(1 - \frac{0.25^2}{0.05^2} \right) = -30 \text{ MPa}$$

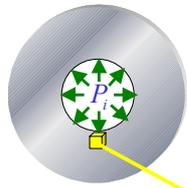
$$\sigma_a = \sigma_2 = 0$$



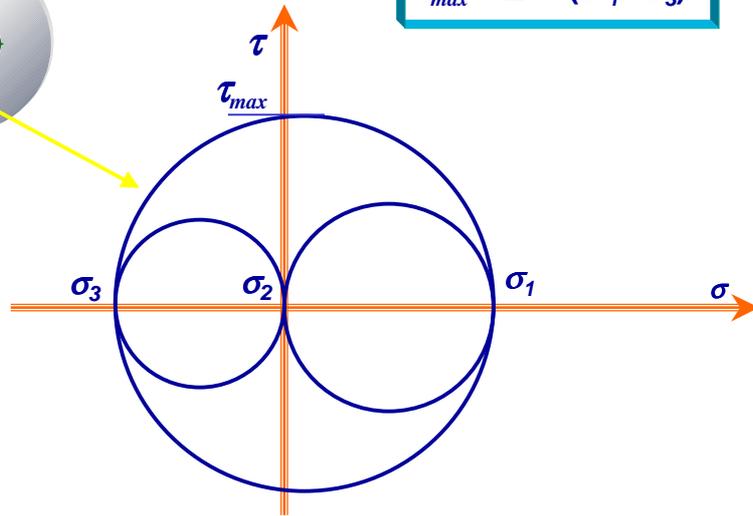
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}(32.5 \text{ MPa} - (-30 \text{ MPa})) = 31.25 \text{ MPa}$$

Esempio di calcolo

Disco soggetto ad una pressione di forzamento.



$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

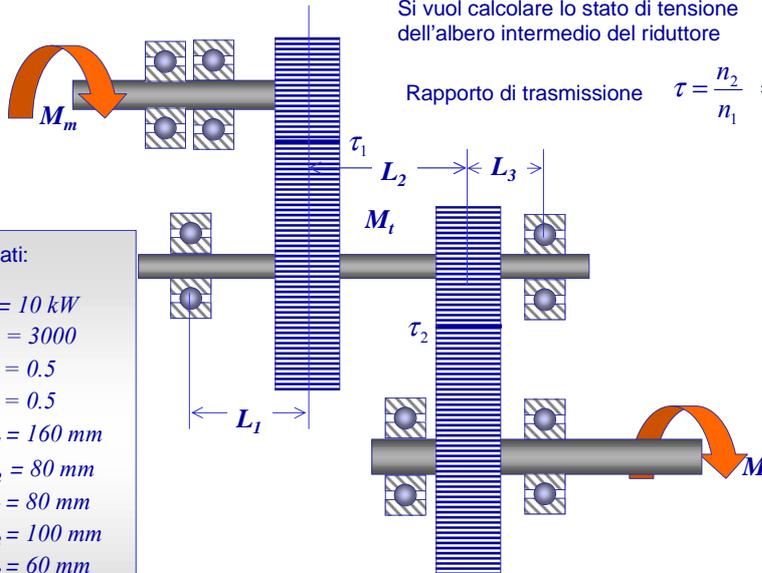


Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.

Si vuol calcolare lo stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Rapporto di trasmissione $\tau = \frac{n_2}{n_1} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{d_1}{d_2}$



Dati:

- $P = 10 \text{ kW}$
- $n_1 = 3000$
- $\tau_1 = 0.5$
- $\tau_2 = 0.5$
- $D_1 = 160 \text{ mm}$
- $D_2 = 80 \text{ mm}$
- $L_1 = 80 \text{ mm}$
- $L_2 = 100 \text{ mm}$
- $L_3 = 60 \text{ mm}$
- $d = 20 \text{ mm}$

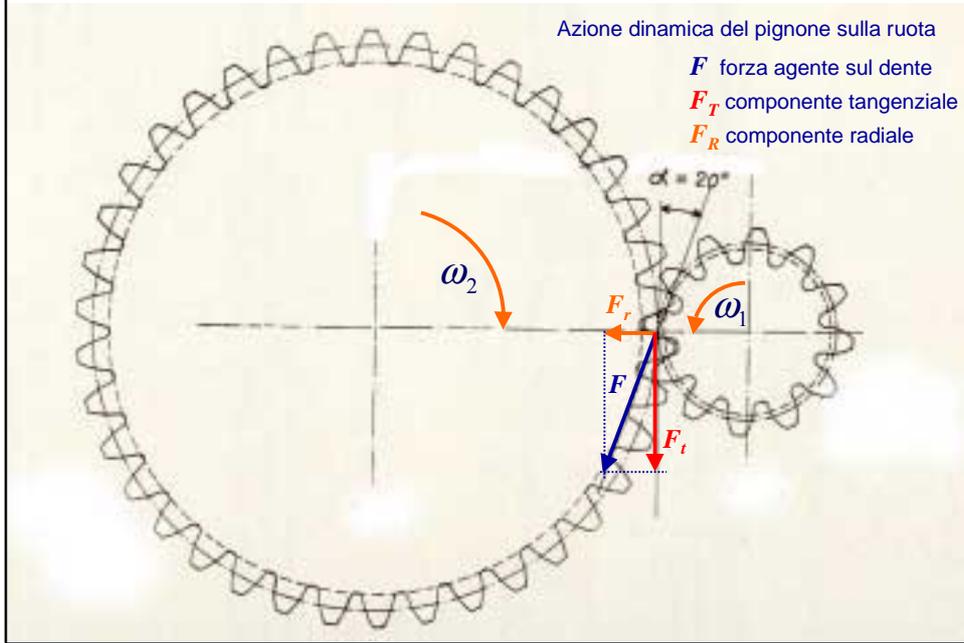
$$M_m = \frac{P_m}{\omega_1}$$

$$M_t = \frac{M_m}{\tau_1}$$

$$M_r = \frac{M_t}{\tau_2}$$

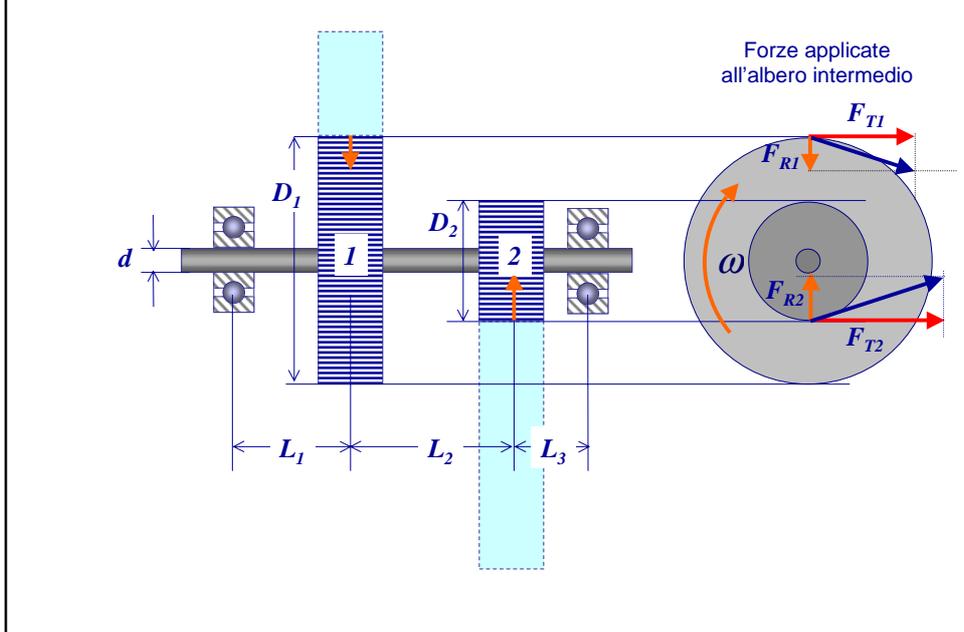
Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.



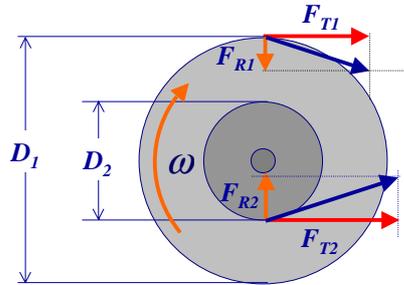
Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
 Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore



Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore



Equilibrio
alla rotazione

$$\sum M = 0 \quad F_{T1} \cdot \frac{D_1}{2} - F_{T2} \cdot \frac{D_2}{2} = 0$$

$$F_{T2} = F_{T1} \cdot \frac{D_1}{D_2}$$

$$F_{T1} = \frac{2M_i}{D_1} = \frac{2M_m}{D_1 \tau_1} = \frac{2P_m}{D_1 \tau_1 \omega_1}$$

$$F_{T2} = \frac{2P_m}{D_2 \tau_1 \omega_1}$$

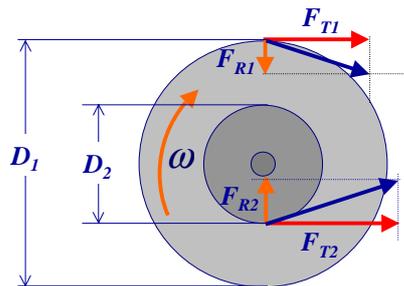
$$F_{R1} = F_{T1} \cdot \operatorname{tg} \alpha = F_{T1} \cdot \operatorname{tg} 20$$

$$F_{R2} = F_{T2} \cdot \operatorname{tg} 20$$

Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Posto: $P = 10 \text{ kW}$
 $\tau_1 = 0.5 \quad n_1 = 3000$
 $D_1 = 160 \text{ mm} \quad D_2 = 80 \text{ mm}$



$$F_{T1} = \frac{2P_m}{D_1 \tau_1} \cdot \frac{60}{2\pi \cdot n_1}$$

$$F_{T1} = \frac{2 \cdot 10000}{0.16 \cdot 0.5} \cdot \frac{60}{2 \cdot \pi \cdot 3000} = 796 \text{ N}$$

$$F_{T2} = F_{T1} \cdot \frac{D_1}{D_2} = 796 \cdot \frac{0.16}{0.08} = 1592 \text{ N}$$

$$F_{R1} = F_{T1} \cdot \operatorname{tg} \alpha = F_{T1} \cdot \operatorname{tg} 20 = 796 \cdot 0.36397 = 290 \text{ N}$$

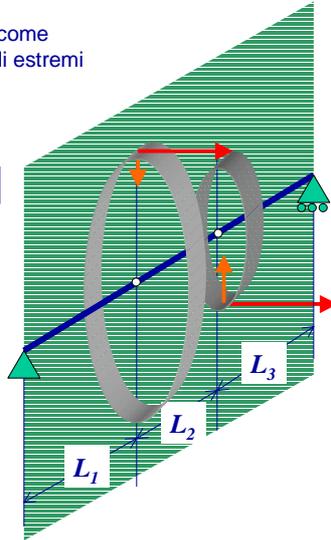
$$F_{R2} = F_{T2} \cdot \operatorname{tg} 20 = 1592 \cdot 0.36397 = 580 \text{ N}$$

Esempio di calcolo

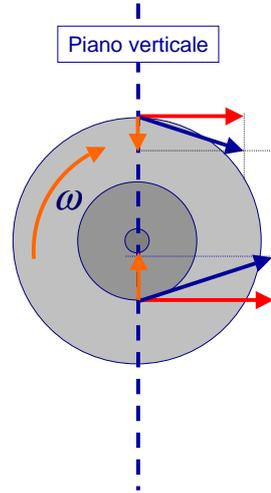
Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi

Piano verticale



Piano verticale

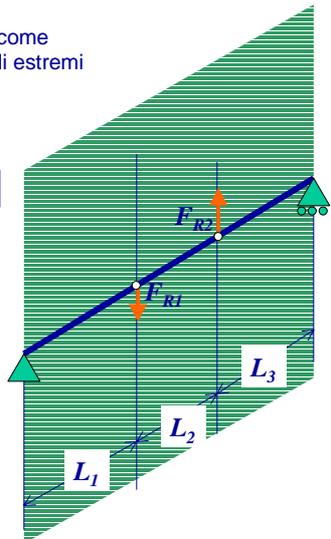


Esempio di calcolo

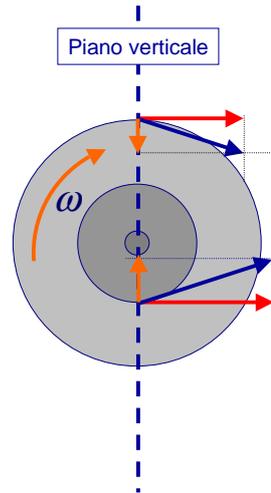
Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi

Piano verticale



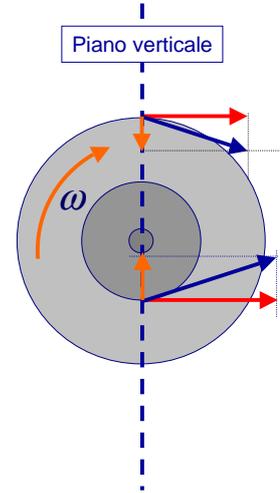
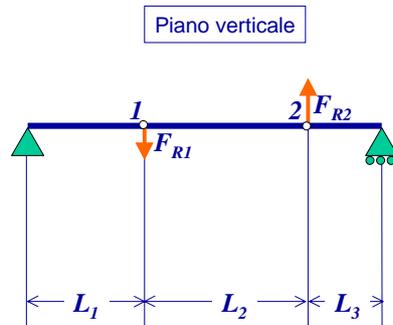
Piano verticale



Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

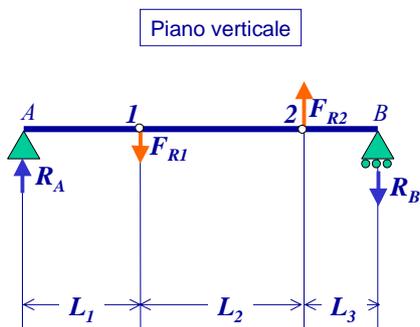
Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi



Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi



Calcolo delle reazioni vincolari

Equilibrio alla rotazione intorno al punto A

$$\sum M = 0 \quad A$$

$$F_{R1} \cdot L_1 - F_{R2} \cdot (L_1 + L_2) + R_B \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = 0$$

$$R_B = \frac{F_{R2} \cdot (L_1 + L_2) - F_{R1} \cdot L_1}{(L_1 + L_2 + L_3)}$$

Equilibrio alla traslazione verticale

$$\sum F_V = 0$$

$$F_{R2} + R_A - F_{R1} - R_B = 0$$

$$R_A = F_{R1} + R_B - F_{R2}$$

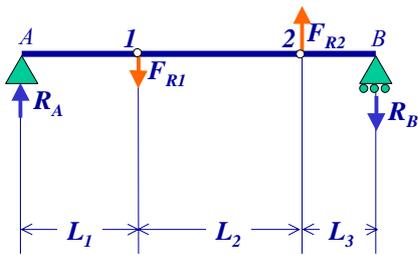
Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi

Posto: $L_1 = 80 \text{ mm}$
 $L_2 = 100 \text{ mm}$
 $L_3 = 60 \text{ mm}$

Piano verticale



$$R_B = \frac{F_{R2} \cdot (L_1 + L_2) - F_{R1} \cdot L_1}{(L_1 + L_2 + L_3)}$$

$$R_B = \frac{580 \cdot (0.08 + 0.1) - 290 \cdot 0.08}{(0.08 + 0.1 + 0.06)} = 338 \text{ N}$$

$$R_A = F_{R1} + R_B - F_{R2}$$

$$R_A = 290 + 338 - 580 = 48 \text{ N}$$

Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi

Posto: $L_1 = 80 \text{ mm}$
 $L_2 = 100 \text{ mm}$
 $L_3 = 60 \text{ mm}$

Piano verticale

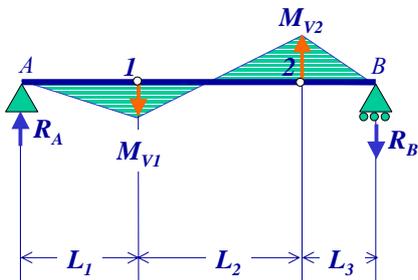


Diagramma dei momenti

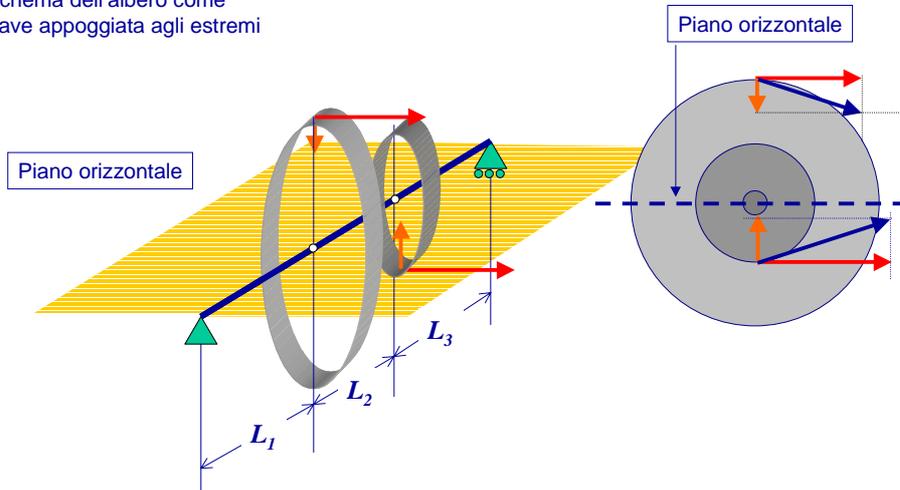
$$M_{V1} = R_A \cdot L_1 = 48 \cdot 0.08 = 3.8 \text{ Nm}$$

$$M_{V2} = R_B \cdot L_3 = 338 \cdot 0.06 = 20.3 \text{ Nm}$$

Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

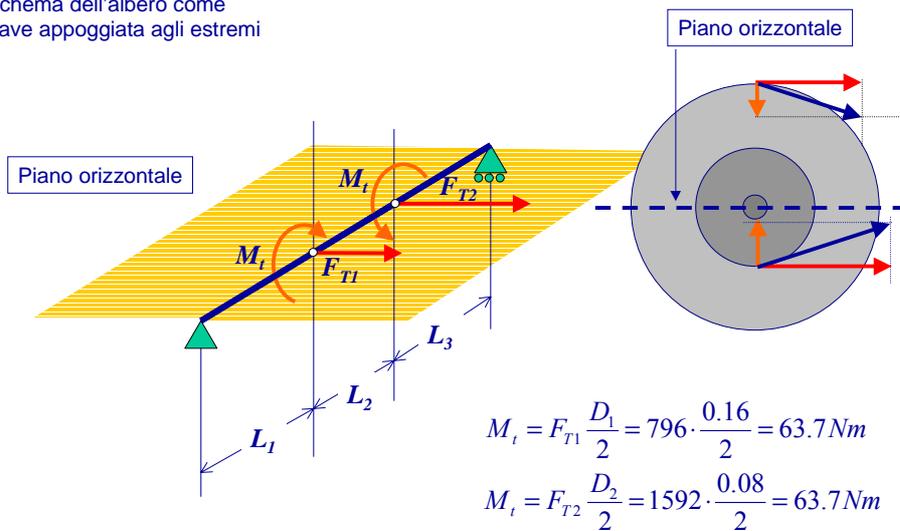
Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi



Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi



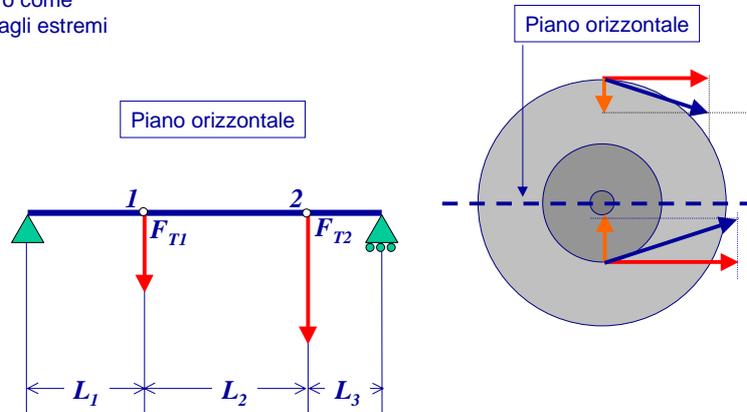
$$M_i = F_{T1} \frac{D_1}{2} = 796 \cdot \frac{0.16}{2} = 63.7 \text{ Nm}$$

$$M_i = F_{T2} \frac{D_2}{2} = 1592 \cdot \frac{0.08}{2} = 63.7 \text{ Nm}$$

Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
 Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come
 trave appoggiata agli estremi

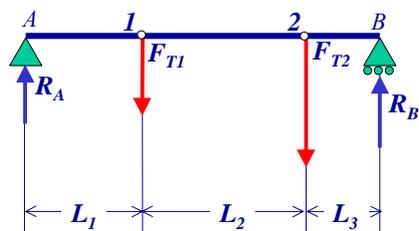


Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
 Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come
 trave appoggiata agli estremi

Piano orizzontale



Calcolo delle reazioni vincolari

Equilibrio alla rotazione
 intorno al punto A

$$\sum M = 0 \quad A$$

$$F_{T1} \cdot L_1 + F_{T2} \cdot (L_1 + L_2) - R_B \cdot (L_1 + L_2 + L_3) = 0$$

$$R_B = \frac{F_{T1} \cdot L_1 + F_{T2} \cdot (L_1 + L_2)}{(L_1 + L_2 + L_3)}$$

Equilibrio alla traslazione verticale

$$\sum F_V = 0$$

$$R_A + R_B - F_{T1} - F_{T2} = 0$$

$$R_A = F_{T1} + F_{T2} - R_B$$

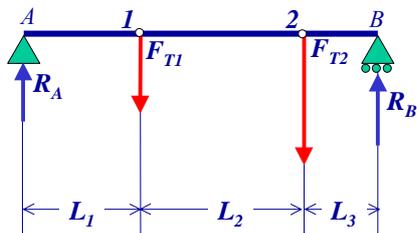
Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi

Posto: $L_1 = 80 \text{ mm}$
 $L_2 = 100 \text{ mm}$
 $L_3 = 60 \text{ mm}$

Piano orizzontale



$$R_B = \frac{F_{T1} \cdot L_1 + F_{T2} \cdot (L_1 + L_2)}{(L_1 + L_2 + L_3)}$$

$$R_B = \frac{796 \cdot 0.08 + 1592 \cdot (0.08 + 0.1)}{(0.08 + 0.1 + 0.06)} = 1459 \text{ N}$$

$$R_A = F_{T1} + F_{T2} - R_B$$

$$R_A = 796 + 1592 - 1459 = 929 \text{ N}$$

Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Schema dell'albero come trave appoggiata agli estremi

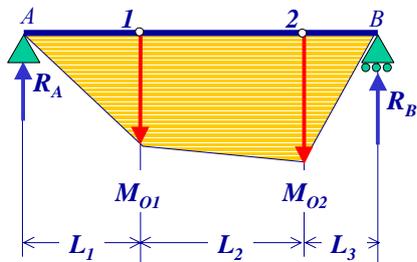
Posto: $L_1 = 80 \text{ mm}$
 $L_2 = 100 \text{ mm}$
 $L_3 = 60 \text{ mm}$

Piano orizzontale

Diagramma dei momenti

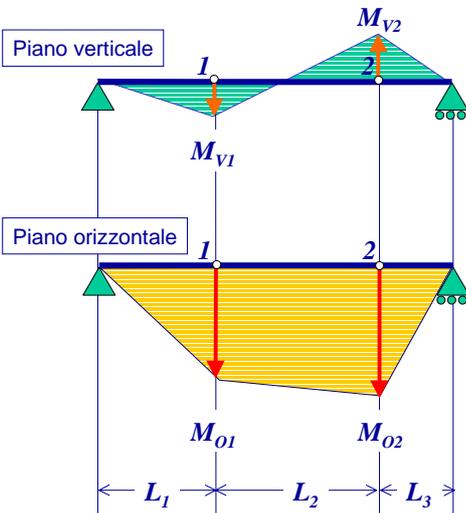
$$M_{O1} = R_A \cdot L_1 = 929 \cdot 0.08 = 74.3 \text{ Nm}$$

$$M_{O2} = R_B \cdot L_3 = 1459 \cdot 0.06 = 87.5 \text{ Nm}$$



Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore



Momento flettente complessivo nella sezione 1

$$M_1 = \sqrt{M_{v1}^2 + M_{o1}^2}$$

$$M_1 = \sqrt{3.8^2 + 74.3^2} = 74.4 Nm$$

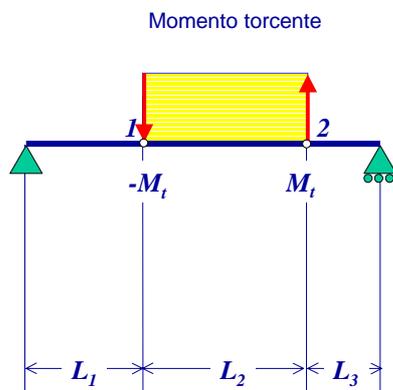
Momento flettente complessivo nella sezione 2

$$M_2 = \sqrt{M_{v2}^2 + M_{o2}^2}$$

$$M_2 = \sqrt{20.3^2 + 87.5^2} = 89.8 Nm$$

Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore



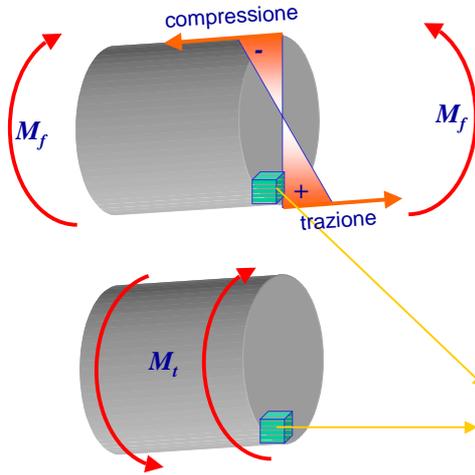
Momento torcente

$$M_t = F_{T2} \frac{D_2}{2} = 1592 \cdot \frac{0.08}{2} = 63.7 Nm$$

Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Stato di tensione nella sezione 2

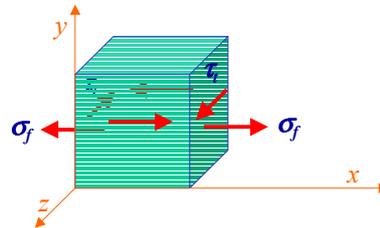


$$\sigma_f = \frac{M_f}{W_f} = M_f \frac{32}{\pi d^3}$$

$$\sigma_f = 89.8 \frac{32}{\pi \cdot 0.02^3} = 114.3 \text{ MPa}$$

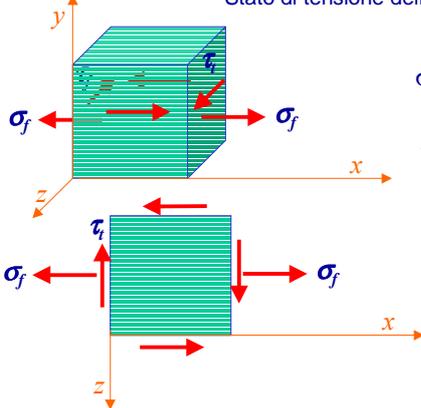
$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t} = M_t \frac{16}{\pi d^3}$$

$$\tau_t = 63.7 \frac{16}{\pi \cdot 0.02^3} = 40.6 \text{ MPa}$$



Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore



$$\sigma_f = 114.3 \text{ MPa}$$

$$\tau_t = 40.6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{127.2 - (-12.9)}{2} = 70.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{114.3}{2} + \sqrt{\left(\frac{114.3}{2}\right)^2 + 40.6^2} = 127.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

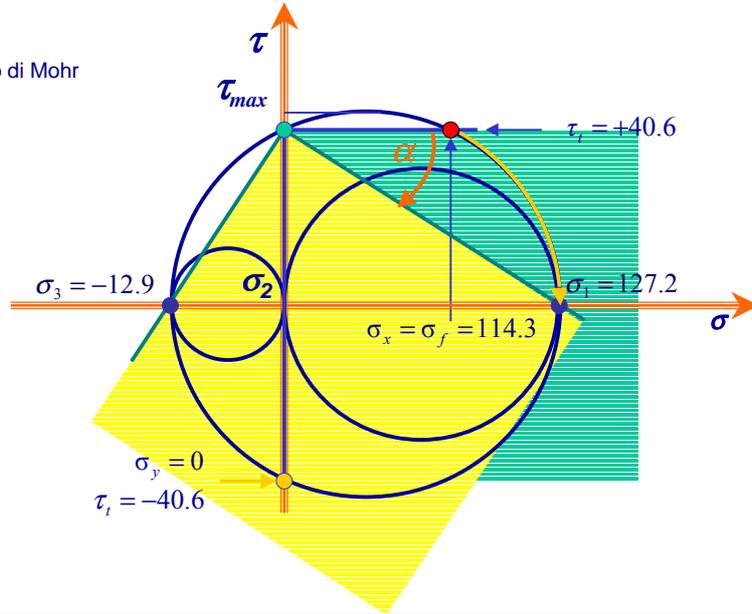
$$\sigma_3 = \frac{114.3}{2} - \sqrt{\left(\frac{114.3}{2}\right)^2 + 40.6^2} = -12.9 \text{ MPa}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{atg} \left(\frac{2\tau_t}{\sigma_f} \right) = 17.7^\circ$$

Esempio di calcolo

Riduttore di velocità ad ingranaggi.
Stato di tensione dell'albero intermedio del riduttore

Il cerchio di Mohr



Tensioni e deformazioni in campo elastico

Fine

CDM - Tensione & Deformazione

