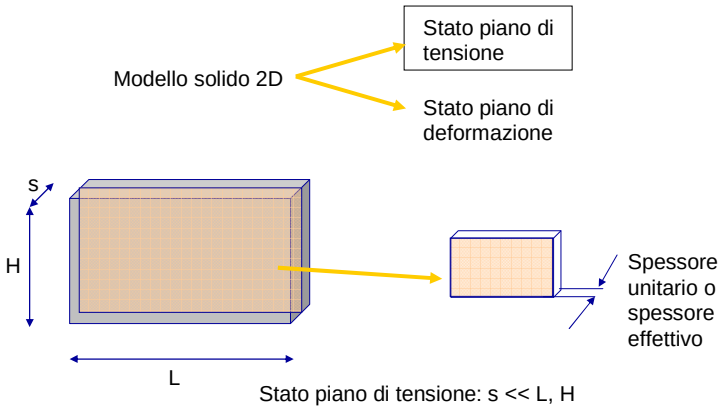
Problemi piani:

L'elemento triangolare a 3 nodi

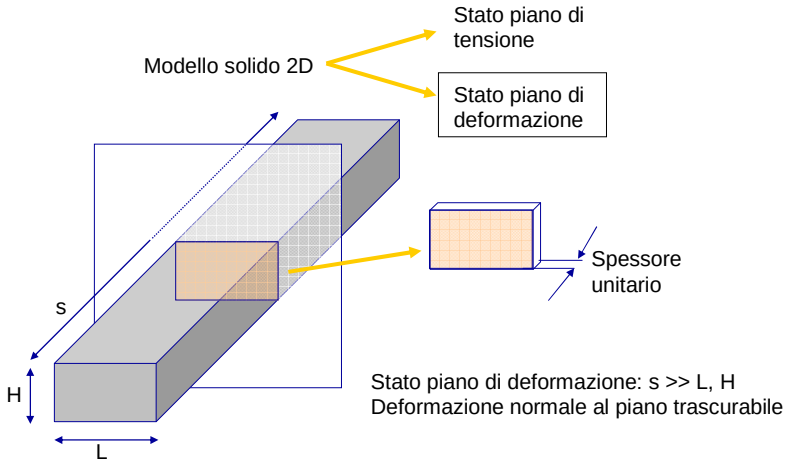
In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo *bidimensionale*, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



Stato piano di tensione: s << L, H
Tensione normale al piano trascurabile

Elementi bidimensionali: stato di deformazione piana

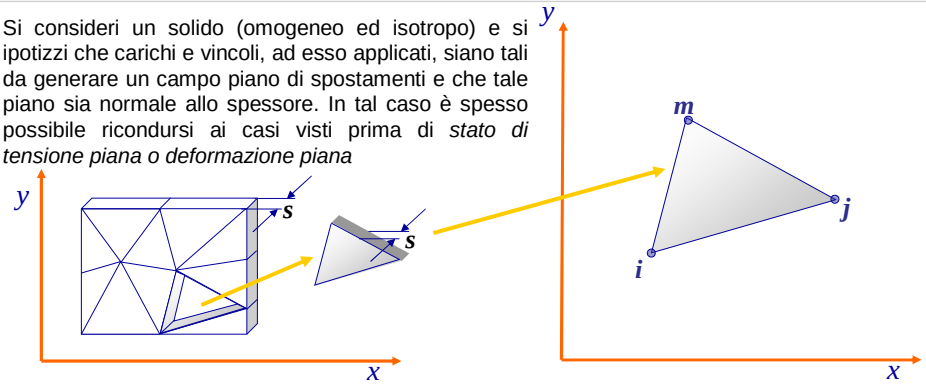
In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo *bidimensionale*, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



Stato piano di deformazione: s >> L, H
Deformazione normale al piano trascurabile

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Si consideri un solido (omogeneo ed isotropo) e si ipotizzi che carichi e vincoli, ad esso applicati, siano tali da generare un campo piano di spostamenti e che tale piano sia normale allo spessore. In tal caso è spesso possibile ricondursi ai casi visti prima di *stato di tensione piana o deformazione piana*



In queste condizioni è possibile rappresentare il comportamento strutturale del solido con un modello piano.

Si divida il solido in una serie di elementi triangolari, di dimensioni finite.

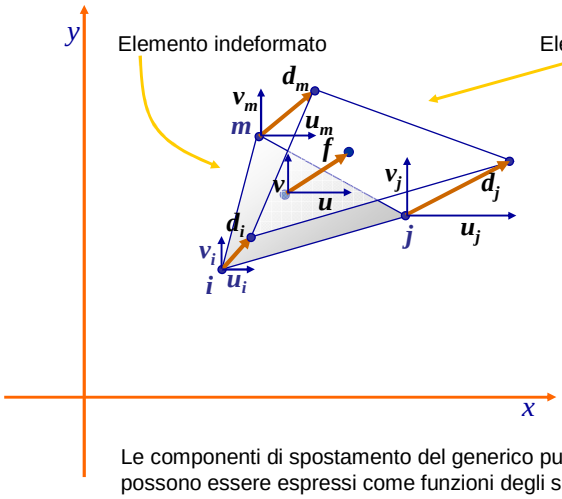
Si immagini ora di estrarre uno di tali triangoli dal continuo e di studiare il suo comportamento riferendolo ad un sistema di coordinate cartesiano.

Per le ipotesi e le assunzioni fatte l'elemento può solo spostarsi, deformandosi, sul piano *x y*.

Ogni suo punto ha quindi due componenti di spostamento, che indicheremo come ***u*** e ***v***.

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Consideriamo quindi l'elemento ***e***, dotato di spessore s, nel piano $x\,y$.
L'elemento è un triangolo di vertici i, j , m



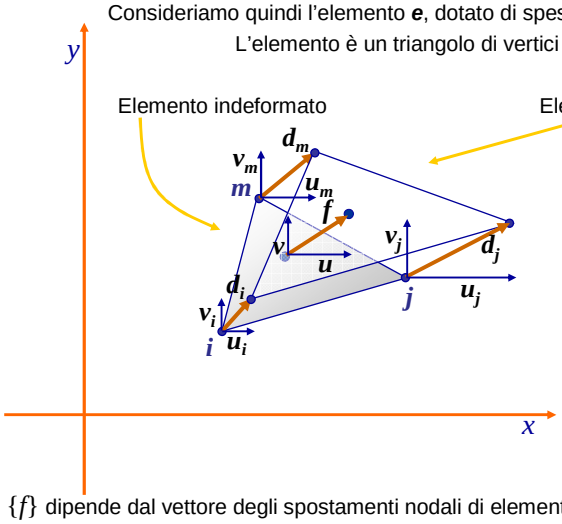
Prendiamo anche in considerazione ciò che accade ad un generico punto interno dell'elemento:

Quando la struttura viene posta sotto carico si deforma. L'elemento subisce un campo di spostamenti, completamente definibile dagli spostamenti dei tre nodi di vertice i, j ed m

Le componenti di spostamento del generico punto interno dell'elemento possono essere espressi come funzioni degli spostamenti nodali.

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Consideriamo quindi l'elemento ***e***, dotato di spessore s, nel piano $x\,y$.
L'elemento è un triangolo di vertici i, j , m



Indichiamo con $\{f\}$ il vettore degli spostamenti di un generico punto interno.

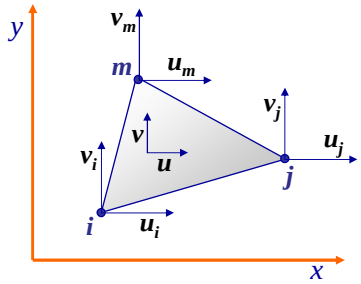
Le componenti del vettore $\{f\}$ sono u e v:

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$\{f\}$ dipende dal vettore degli spostamenti nodali di elemento $\{d\}^e$ tramite una matrice $[N]$ che contiene le funzioni di spostamento:

$$\{f\}=[N]\{d\}^e$$

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma



Nel caso di elemento piano a tre nodi

$r_e = 2$
$m = 3$

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e \quad \rightarrow \quad \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

$[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ sono quadrate di dimensioni *2* x *2*

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le matrici $[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ possono essere viste (sempre, non solo in questo caso particolare!) come il prodotto di una funzione per la matrice identità:

$$[N] = \begin{bmatrix} [I] \cdot N_i' & [I] \cdot N_j' & [I] \cdot N_m' \end{bmatrix} \qquad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

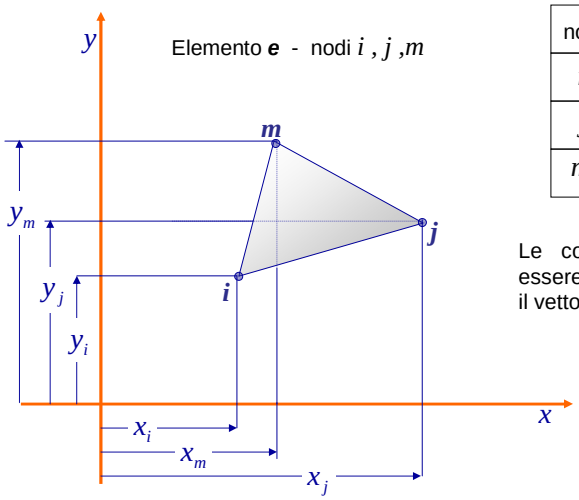
e N'_i , N'_j ed N'_m sono funzioni arbitrarie, note con il nome di ***funzioni di spostamento o di forma***, le quali legano il campo degli spostamenti interni all'elemento al vettore degli spostamenti nodali.

Chiaramente:

$$\{f\} = \{f(x,y,z)\}, \; [N]_k = [N(x,y,z)]_k$$

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le funzioni N'_i , N'_j ed N'_m dipenderanno dalle coordinate nodali dell'elemento



nodo	coordinate
i	x_i y_i
j	x_j y_j
m	x_m y_m

Le coordinate nodali devono essere note per poter calcolare il vettore degli spostamenti.

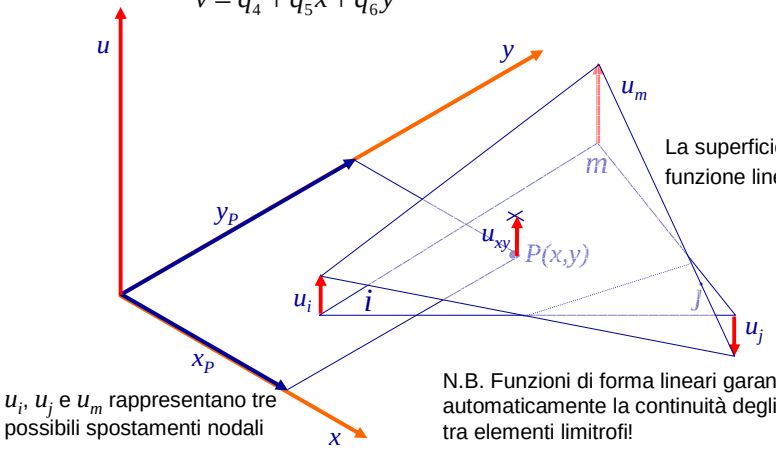
Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le più semplici funzioni di spostamento che possono essere pensate sono di tipo lineare:

$$u = q_1 + q_2 x + q_3 y$$

$$v = q_4 + q_5 x + q_6 y$$

Essendo q sei costanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento

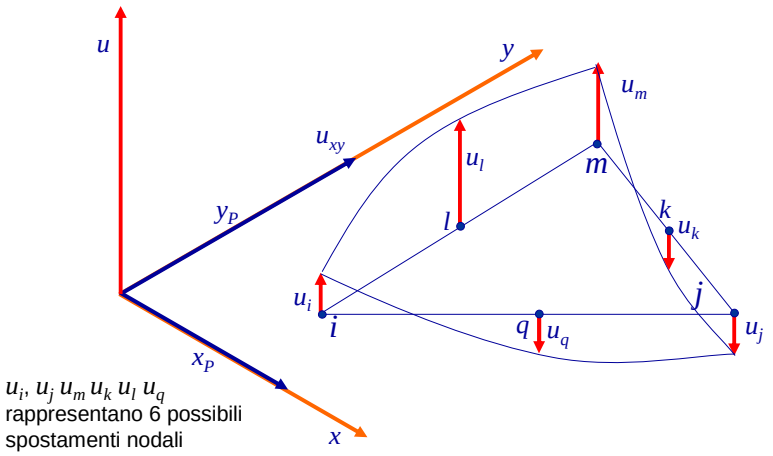


La superficie rappresenta la funzione lineare di x e y

u_i, u_j e u_m rappresentano tre possibili spostamenti nodali

N.B. Funzioni di forma lineari garantiscono automaticamente la continuità degli spostamenti tra elementi limitrofi!

Adottando una funzione di grado superiore si avrebbe una superficie più complessa e la sue definizione richiederebbe un maggior numero di punti nodali



u_i, u_j u_m u_k u_l u_q rappresentano 6 possibili spostamenti nodali

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le costanti possono essere calcolate imponendo che le funzioni di spostamento assumano nei nodi esattamente il valore dello spostamento nodale.

$$u_i = q_1 + q_2 x_i + q_3 y_i \qquad v_i = q_4 + q_5 x_i + q_6 y_i$$

$$u_j = q_1 + q_2 x_j + q_3 y_j \qquad v_j = q_4 + q_5 x_j + q_6 y_j$$

$$u_m = q_1 + q_2 x_m + q_3 y_m \qquad v_m = q_4 + q_5 x_m + q_6 y_m$$

Ne derivano 2 sistemi, di 3 equazioni in 3 incognite, che consentono di calcolare i valori delle q.

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Dal primo dei due sistemi si ha: $q_1 = \dfrac{a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m}{2\Delta}$

Dove a_i, a_j e a_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la prima colonna:

e dove Δ ha il significato: $\Delta = \dfrac{1}{2}\det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$ = area del triangolo $i\ j\ m$

Matrice dei coefficienti

Per i minori:

$a_i = x_j y_m - x_m y_j$ $\quad a_j = -(x_i y_m - x_m y_i)$ $\quad a_m = x_i y_j - x_j y_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & \boxed{x_j} & \boxed{y_j} \\ 1 & \boxed{x_m} & \boxed{y_m} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \boxed{x_i} & \boxed{y_i} \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & \boxed{x_m} & \boxed{y_m} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \boxed{x_i} & \boxed{y_i} \\ 1 & \boxed{x_j} & \boxed{y_j} \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Ancora dal primo dei due sistemi si calcola le seconda incognita: $q_2 = \dfrac{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m}{2\Delta}$

Dove b_i, b_j e b_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la seconda colonna:

$b_i = y_j - y_m$ $\quad b_j = y_m - y_i$ $\quad b_m = y_i - y_j$

e la terza incognita: $q_3 = \dfrac{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m}{2\Delta}$

Dove c_i, c_j e c_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la terza colonna:

$c_i = x_m - x_j$ $\quad c_j = x_i - x_m$ $\quad c_m = x_j - x_i$

Gli altri tre valori delle incognite q si ottengono semplicemente introducendo nelle relazioni precedenti le componenti di spostamento v in luogo di u

$$q_4 = \frac{a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_5 = \frac{b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_6 = \frac{c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m}{2\Delta}$$

avendo a_i, a_j , a_m , b_i, b_j , b_m , c_i, c_j e c_m gli stessi valori calcolati prima in funzione delle coordinate nodali dell'elemento e riportati qui per riepilogo.

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ a_j &= x_m y_i - x_i y_m \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_m \\ b_j &= y_m - y_i \\ b_m &= y_i - y_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_i &= x_m - x_j \\ c_j &= x_i - x_m \\ c_m &= x_j - x_i \end{aligned}$$

A questo punto sono calcolabili le componenti del vettore $\{f\}$ di spostamento dei punti interni all'elemento, u e v, in funzione degli spostamenti nodali e delle coordinate x e y.

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\cdot u_i + (a_j + b_j x + c_j y)\cdot u_j + (a_m + b_m x + c_m y)\cdot u_m\right]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)\cdot v_i + (a_j + b_j x + c_j y)\cdot v_j + (a_m + b_m x + c_m y)\cdot v_m\right]$$

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left[N_i' \cdot u_i + N_j' \cdot u_j + N_m' \cdot u_m\right]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta}\left[N_i' \cdot v_i + N_j' \cdot v_j + N_m' \cdot v_m\right]$$

Dove le funzioni N'_k sono espresse da:

$$N_k' = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le relazioni precedenti possono scriversi in forma matriciale come segue:

$$\{f\}=\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[I]N_i' & [I]N_j' & [I]N_m'\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\\u_m\\v_m\end{Bmatrix}^e$$

ed in modo più compatto:

$$\{f\}=\begin{bmatrix}N_i & N_j & N_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_i\\d_j\\d_m\end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\}=[N]\{d\}^e$$

Si ricorda che le funzioni di spostamento di pendono dalle coordinate del punto interno all'elemento e dalle coordinate dei nodi mediante le a_k, b_k, c_k e Δ:

$$N_k'=\frac{1}{2\Delta}(a_k+b_k x+c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

$$2\Delta=x_j y_m-x_m y_j-x_i\cdot(y_m-y_j)+y_i\cdot(x_m-x_j)$$