

## Progetto di cinghie trapezoidali

Le cinghie trapezoidali sono utilizzate frequentemente per la trasmissione di potenza

### Vantaggi

- ✓ Basso costo
- ✓ Semplicità di installazione
- ✓ Capacità di assorbire vibrazioni torsionali e picchi di coppia

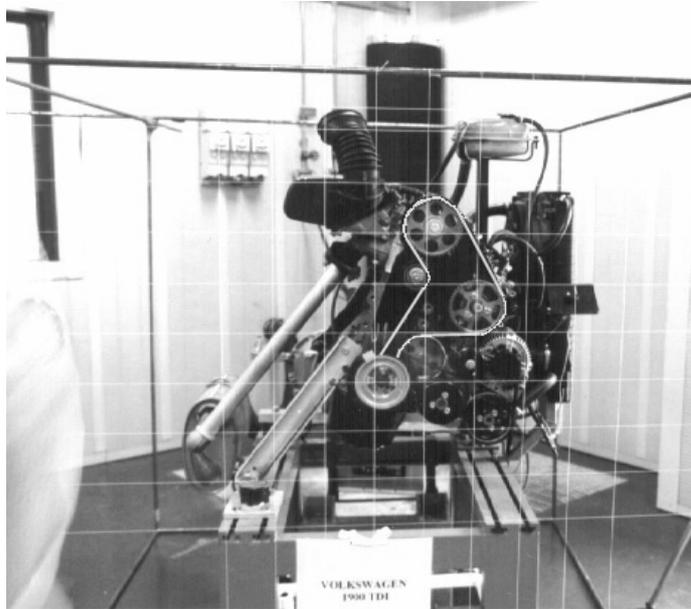
### Svantaggi

- ✓ Mancanza di sincronismo
- ✓ Rendimento non elevato



CDM - Cinghie trapezoidali

Le cinghie dentate, invece, mantengono il sincronismo ma soffrono molto di eventuali fluttuazioni di coppia.



CDM - Cinghie trapezoidali

Gli impieghi delle cinghie sono molteplici. Qui è mostrata una applicazione aeronautica.

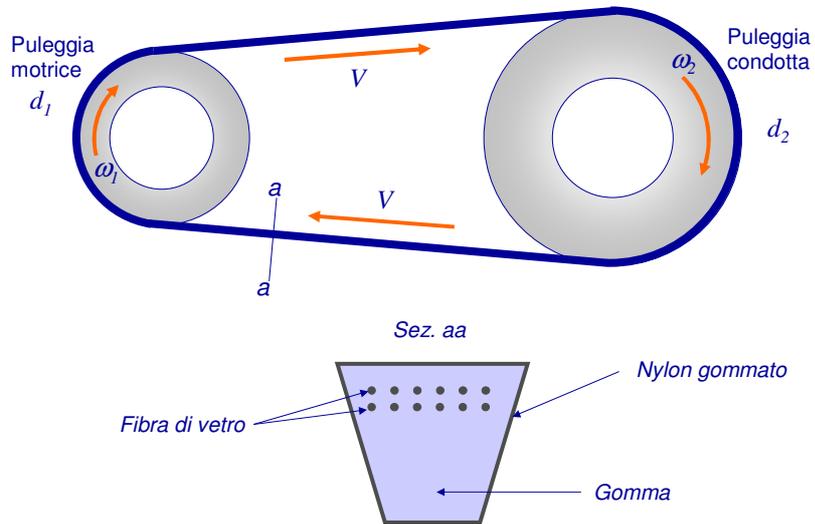
## JEOF: Sax dal suono perfetto

Sempre tesa a perfezionare l'avionizzazione dell'ottimo Sax 86, la JEOF (049-5349320) ha presentato il Fire da 92 cavalli equipaggiato con un riduttore a cinghia più leggero (6 kg in meno) e silenzioso, realizzato con un robustissimo castello di

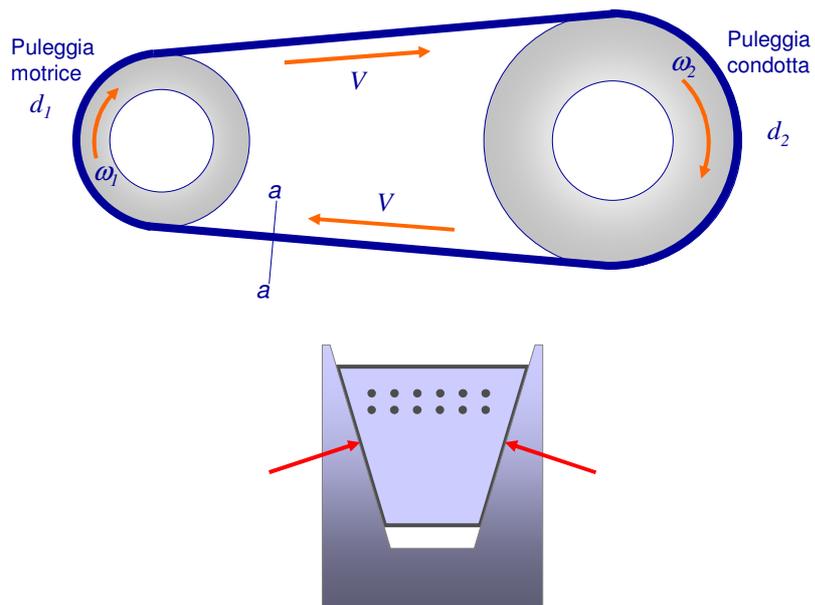


tubi in acciaio 4130 saldati a TIG. La cinghia, prodotta dalla Daico su specifica JEOF, è larga soli 45 mm e consente una potenza continua di 100 cavalli. Il nuovo riduttore equipaggerà di serie sia il Sax 75 (da 70 cavalli) sia il Sax 86. Altra novità, la super-affidabile accensione quadrupla a controllo elettronico con quattro bobine, che riduce al massimo i cablaggi in alta tensione.

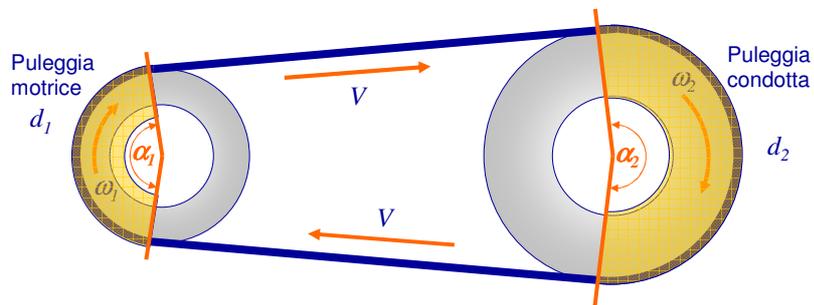
Comportamento dinamico della trasmissione



Comportamento dinamico della trasmissione



Comportamento dinamico della trasmissione



Velocità periferica  $V = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}$

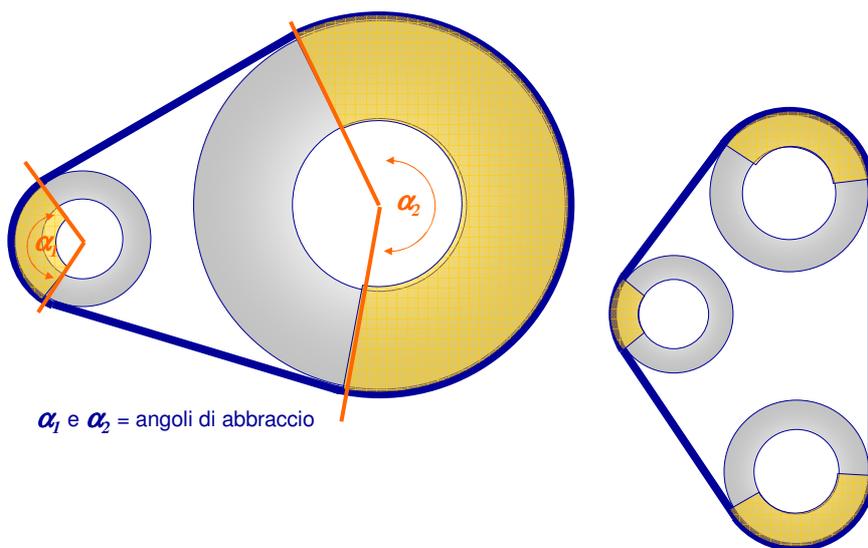
$\alpha_1$  e  $\alpha_2$  = angoli di abbraccio

Rapporto di trasmissione  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$

se  $\tau = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \pi$

Comportamento dinamico della trasmissione

L'angolo di abbraccio della puleggia piccola si riduce se il rapporto di trasmissione si discosta molto dall'unità e se l'interasse non è sufficientemente elevato.



$\alpha_1$  e  $\alpha_2$  = angoli di abbraccio

GDIM - Cinghie trapezoidali

Comportamento dinamico della trasmissione

Velocità periferica  $V = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}$

Rapporto di trasmissione  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau = \frac{M_1}{M_2}$

Equilibrio alla rotazione delle pulegge

Nel caso ideale di rendimento pari ad 1 la potenza in ingresso è uguale a quella in uscita:

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2$$

$$(T - t) \frac{d_1}{2} = M_1 \quad M \omega = (T - t) \frac{d}{2} \omega$$

$$(T - t) \frac{d_2}{2} = M_2 \quad W = (T - t) V$$

GDIM - Cinghie trapezoidali

Comportamento dinamico della trasmissione

Si consideri l'equilibrio di un conico di cinghia di lunghezza circonferenziale infinitesima

Equilibrio radiale

L'equilibrio radiale si può quindi riscrivere in modo più semplice

$$dN + dF_c - (t + dt) \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} - t \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} = 0$$

è un infinitesimo di ordine superiore trascurabile rispetto agli altri termini essendo l'angolo molto piccolo possiamo confondere il seno con l'angolo

$$dt \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} \cong 0$$

$$\operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} \cong \frac{d\alpha}{2}$$

$$dN = 2t \frac{d\alpha}{2} - dF_c = t d\alpha - dF_c$$

$$dN = (t - qV^2) d\alpha$$

$$dF_c = \rho A \frac{dm}{2} \omega^2 \frac{d}{2}$$

$$dF_c = \rho A \omega^2 \frac{d^2}{4} d\alpha = qV^2 d\alpha$$

$$q = \rho A \quad V^2 = \omega^2 \frac{d^2}{4}$$

**GDIM - Cinghie trapezoidali**

### Comportamento dinamico della trasmissione

Si consideri l'equilibrio di un conico di cinghia di lunghezza circonferenziale infinitesima

Equilibrio radiale

$$dN = (t - qV^2) d\alpha$$

Equilibrio tangenziale

$$dT - (t + dt) \cos \frac{d\alpha}{2} + t \cos \frac{d\alpha}{2} = 0$$

essendo  $\cos \frac{d\alpha}{2} \cong 1$

si può scrivere:  $(t + dt) - t = dT \rightarrow dt = dT$

Indicando con  $f$  il coefficiente di attrito tra cinghia e puleggia si ha:  $dt = fdN$

Essendo il prodotto  $qV^2$  costante sono uguali i differenziali:  $dt = d(t - qV^2)$

e quindi si ha:  $d(t - qV^2) = fdN$

$dF_C = \rho A \frac{dm}{2} \omega^2 \frac{d}{2}$   
 $dF_C = \rho A \omega^2 \frac{d^2}{4} d\alpha = qV^2 d\alpha$   
 $q = \rho A \quad V^2 = \omega^2 \frac{d^2}{4}$

**GDIM - Cinghie trapezoidali**

### Il coefficiente di attrito

Si consideri un elemento di sezione di spessore infinitesimo.

Il contatto tra cinghia e puleggia, nelle sezioni trapezoidali, avviene sui fianchi. È necessario, quindi, tenere conto della effettiva pressione di contatto dovuta all'incuneamento della cinghia nella gola della puleggia.

Equilibrio radiale

$$dN = (t - qV^2) d\alpha$$

Equilibrio tangenziale

$$d(t - qV^2) = fdN$$

Equilibrio radiale

$$2dN \sin \frac{\gamma}{2} = dF_R$$

Equilibrio tangenziale

$$dT = 2dN \cdot f$$

$f^* = \frac{f}{\sin \frac{\gamma}{2}}$   
 Per  $\gamma = 30^\circ \rightarrow f^* \cong 3.8f$

$dN = \frac{dF_R}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \rightarrow dT = dF_R \left( \frac{f}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right)$

Separando le variabili si può scrivere:

$$\frac{d(t - qV^2)}{(t - qV^2)} = f^* d\alpha$$

Integrando il primo membro tra  $t - qV^2$  e  $T - qV^2$  ed il secondo tra  $\theta$  ed  $\alpha$  si ottiene:

$$\int_{t - qV^2}^{T - qV^2} \frac{d(t - qV^2)}{(t - qV^2)} = \int_0^\alpha f^* d\alpha$$

$$\frac{T - qV^2}{t - qV^2} = e^{f^* \alpha} \longrightarrow t - qV^2 = \frac{T - qV^2}{e^{f\alpha}} \longrightarrow t = qV^2 + \frac{T - qV^2}{e^{f\alpha}}$$

$$T - t = T - qV^2 - \frac{T - qV^2}{e^{f\alpha}} \longrightarrow T - t = \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} (T - qV^2)$$

Per semplicità nel seguito si ometterà l'asterisco nel coefficiente di attrito:  $f \Rightarrow f^*$

Equilibrio radiale

$$dN = (t - qV^2) d\alpha$$

Equilibrio tangenziale

$$d(t - qV^2) = f^* dN$$

$$d(t - qV^2) = f^* (t - qV^2) d\alpha$$

$$T - t = \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} (T_a - qV^2)$$

$$T_a = \sigma_0 A$$

Dalla differenza  $T - t$  dipende il momento trasmissibile e, di conseguenza, la potenza. Questa relazione può, quindi, essere utilizzata per il progetto della trasmissione introducendo la caratteristica di resistenza della cinghia.

dove  $\sigma_0$  è la tensione ammissibile e  $A$  è l'area resistente della sezione.

La potenza trasmissibile può essere espressa come segue:

$$W_0 = (T - t) V = \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} (\sigma_0 A - qV^2) V$$

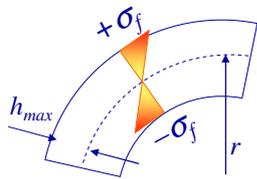
Termine che rappresenta le sollecitazioni inerziali

Termine che rappresenta la resistenza della cinghia

Termine che rappresenta il limite di aderenza della cinghia alla puleggia (con minor angolo di abbraccio).

Effetto della flessione

Oltre alle sollecitazioni di trazione è necessario tenere conto della flessione della cinghia che si verifica nell'assumere la curvatura delle pulegge.



$$\frac{M}{EJ} = \frac{1}{r} = \frac{2}{d} \quad \longrightarrow \quad M = \frac{2EJ}{d}$$

$$\sigma_f = \frac{M}{J} h_{\max} \quad \longrightarrow \quad \sigma_f = \frac{2Eh_{\max}}{d}$$

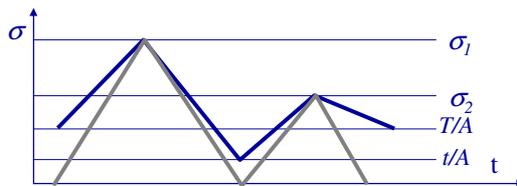
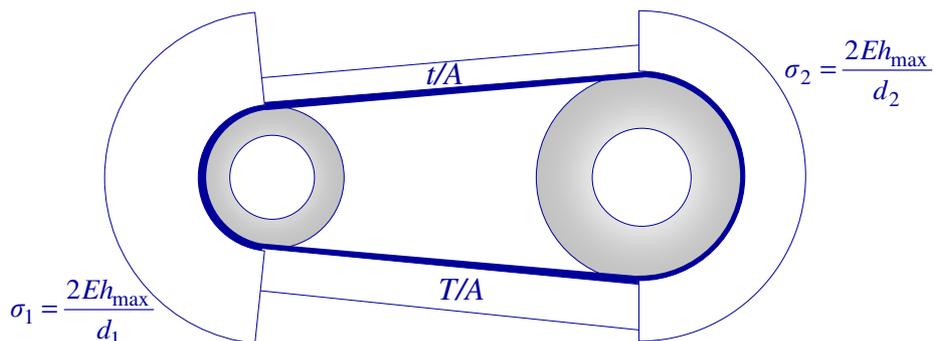
$$\sigma_0 = \sigma_T + \sigma_f = \frac{T}{A} + \frac{2Eh_{\max}}{d} \quad \longrightarrow \quad T = \sigma_0 A - \frac{2EAh_{\max}}{d}$$

La potenza trasmissibile può, quindi, essere espressa come segue:

$$W_0 = \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} (T - qV^2) V = \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} \left( \sigma_0 A - \frac{2EAh_{\max}}{d} - qV^2 \right) V$$

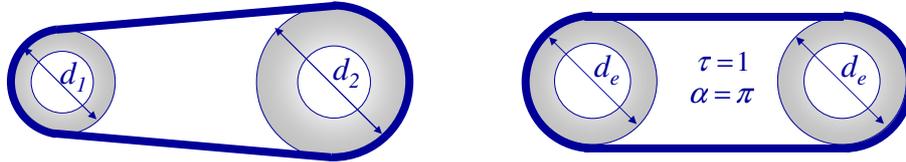
Comportamento a fatica della trasmissione

Diagramma della massima tensione di trazione nella cinghia



Comportamento a fatica della trasmissione

Il diametro equivalente



$$\sigma_1 = \frac{2Eh_{\max}}{d_1}$$

Curva di Wöhler

$$\sigma^\varepsilon N = cost \rightarrow \sigma_1^\varepsilon N_{1c} = \sigma_2^\varepsilon N_{2c} = \sigma_e^\varepsilon N_{ec}$$

$$\sigma_2 = \frac{2Eh_{\max}}{d_2}$$

$$N_{1c} = \frac{\sigma_e^\varepsilon N_{ec}}{\sigma_1^\varepsilon} \quad N_{2c} = \frac{\sigma_e^\varepsilon N_{ec}}{\sigma_2^\varepsilon}$$

$$\frac{2N}{N_{ec}} = \frac{N}{N_{1c}} + \frac{N}{N_{2c}}$$

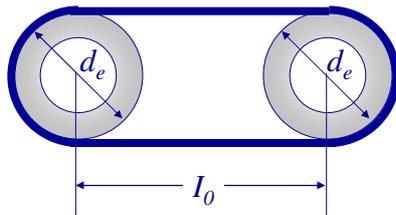
$$\frac{2N}{N_{ec}} = \frac{N\sigma_1^\varepsilon}{\sigma_e^\varepsilon N_{ec}} + \frac{N\sigma_2^\varepsilon}{\sigma_e^\varepsilon N_{ec}}$$

$$\sigma_e = \left( \frac{\sigma_1^\varepsilon + \sigma_2^\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$d_e = d_1 \left( \frac{2}{1 + \tau^\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Equazione di progetto

La trasmissione tipo



$\tau = 1$  rapporto di trasmissione unitario

$\alpha = \pi$  angolo di abbraccio 180°

$$d_e = d_1 \left( \frac{2}{1 + \tau^\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \text{ diametro equivalente}$$

$I_0$  = interasse standard

$L_0$  = lunghezza cinghia standard

$h_0$  = durata standard

Potenza tipo

$$W_0 = \frac{e^{f\pi} - 1}{e^{f\pi}} \left( \sigma_0 A - \frac{2EAh_{\max}}{d_e} - qV^2 \right) V$$

$$C_\alpha = \frac{(e^{f^*\alpha} - 1) \cdot e^{f^*\pi}}{e^{f^*\alpha} \cdot (e^{f^*\pi} - 1)}$$

Potenza attuale

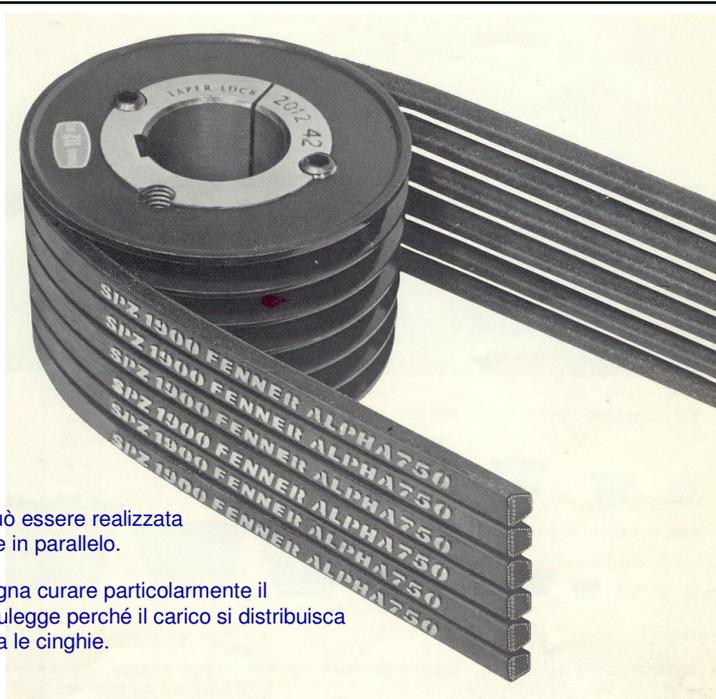
$$W_a = C_\alpha \cdot C_L \cdot C_h \cdot W_0$$

$$C_L = \left( \frac{L}{L_0} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad C_h = \left( \frac{h_0}{h} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$n^\circ \text{ cinghie} = \frac{\text{Potenza da trasmettere}}{\text{Potenza attuale}}$$

$$n_c = \frac{W_e}{W_a}$$

GDW - Cinghie trapezoidali



Una trasmissione può essere realizzata mettendo più cinghie in parallelo.

In questo caso bisogna curare particolarmente il parallelismo tra le pulegge perché il carico si distribuisca in modo uniforme tra le cinghie.

GDW - Cinghie trapezoidali

Equazione di progetto

In alcuni manuali invece della "potenza tipo" è utilizzata la "potenza base" che è relativa ad una trasmissione con le stesse caratteristiche di quella tipo ( $\tau = 1$   $\alpha = \pi$ ) ma che utilizza pulegge di diametro  $d_1$  invece di diametro equivalente.

Potenza base	Potenza supplementare
$W_b = \frac{e^{f\pi} - 1}{e^{f\pi}} \left( \sigma_0 A - \frac{2EAh_{\max}}{d_1} - qV^2 \right) V$	$\Delta W_b$

Nel caso reale (rapporto di trasmissione diverso da 1) la cinghia sarà in grado di trasmettere una potenza maggiore di quella base a causa della minore sollecitazione di fatica che si verifica nella puleggia maggiore.

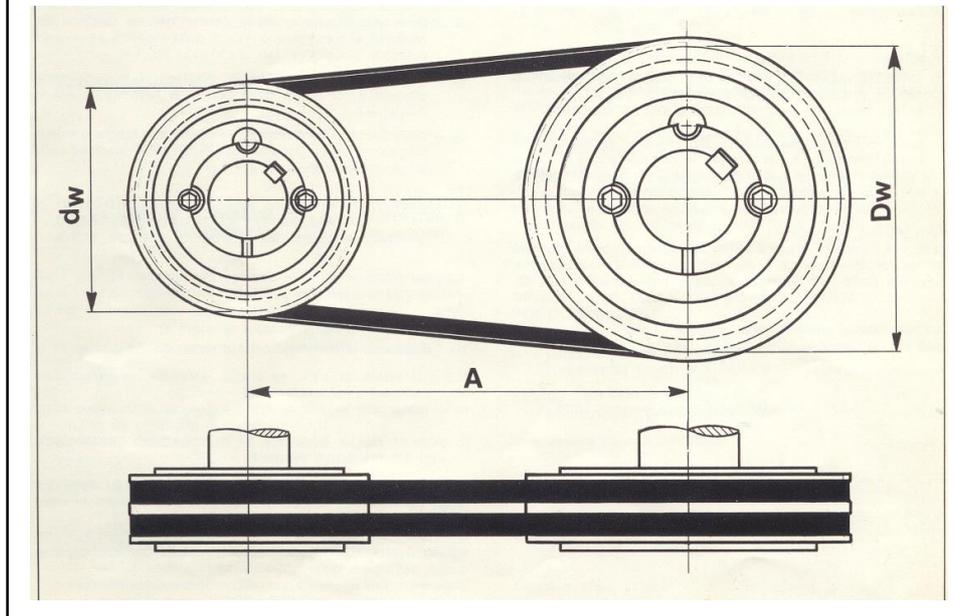
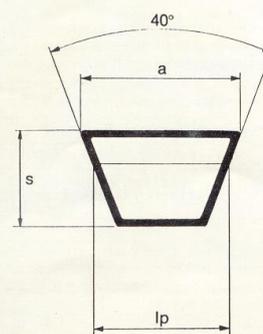
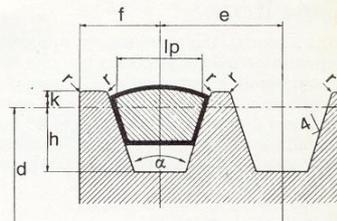


tabella 1

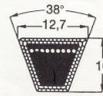
Sezione	a mm	s mm	lp mm
Z	10	6	8,5
A	13	8	11
B	17	11	14
C	22	14	19
D	32	19	27
E	38	25	32
F	51	30	43



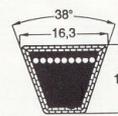
a = larghezza della base maggiore  
 s = spessore della cinghia  
 lp = larghezza primitiva



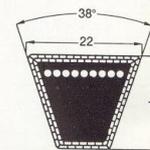
SPZ



SPA



SPB



SPC