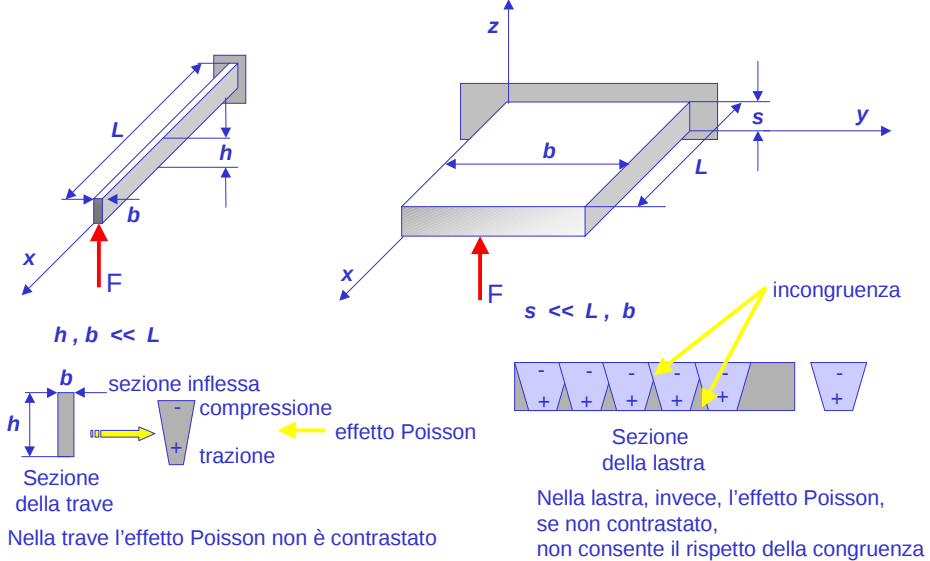


Lastre piane

Lastre piane

Le travi sono caratterizzate da due dimensioni piccole, b ed h , rispetto alla terza, la lunghezza L .

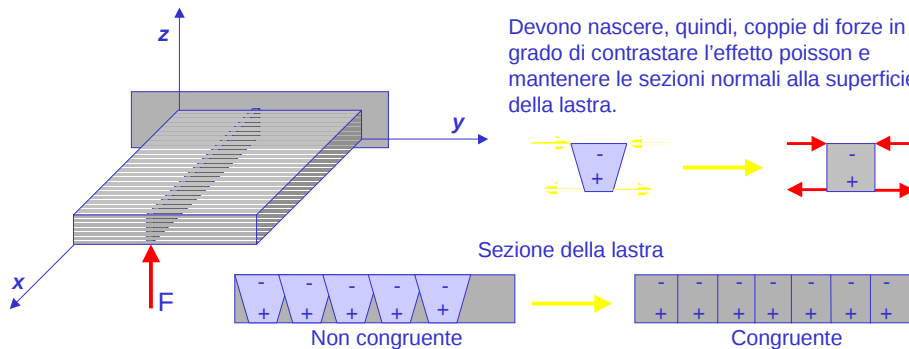
Le lastre o piastre, invece, possono essere considerate solidi con una dimensione piccola, lo spessore s , in confronto alle altre due: L e b .



Lastre piane

Per rispettare la congruenza, la deformazione attraverso lo spessore, in direzione y , in una lastra la cui deformata sia cilindrica, deve essere nulla.

Devono nascere, quindi, coppie di forze in grado di contrastare l'effetto poisson e mantenere le sezioni normali alla superficie della lastra.



Avendo imposto la congruenza, valgono le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (\sigma_z = 0) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_y = \nu\sigma_x$$

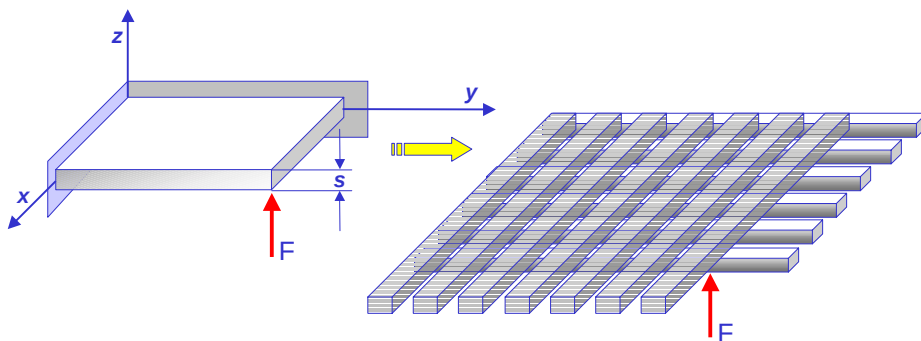
$$\text{e quindi: } \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\nu\sigma_x)] = \frac{1}{E}\sigma_x(1 - \nu^2) = \frac{(1 - \nu^2)}{E}\sigma_x = \frac{1}{E'}\sigma_x \quad \text{con: } E' = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$$

Di conseguenza la rigidità (per unità di larghezza) di una lastra (b grande), incastrata ad un bordo, è maggiore rispetto ad una trave (b piccolo) nella stessa situazione.

Lastre piane

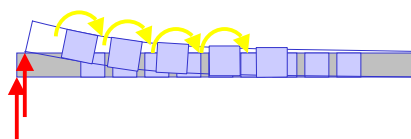
Flessione semplice

Quando il vincolo agisce su più di un lato della lastra, questa si deforma in modo più complesso.



La lastra può essere immaginata come un tessuto di travi incrociate ed interconnesse.

La sollecitazione agente su una di queste travi si trasmette alle altre

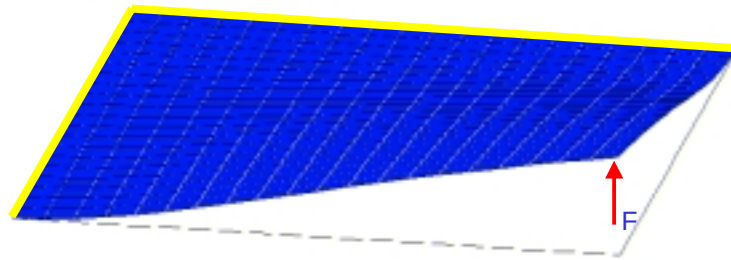


che saranno soggette a flessione e a torsione.

Lastre piane

Flessione semplice

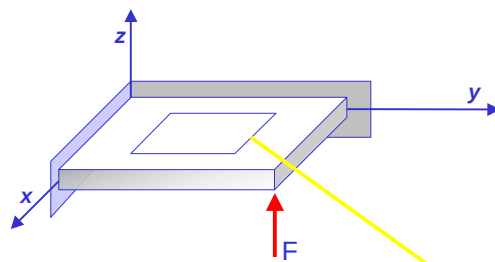
Superficie elastica di una lastra ottenuta con un modello ad elementi finiti.



Lastre piane

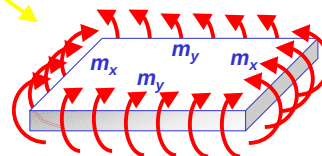
Flessione semplice

Studiamo, dunque, lo stato di sollecitazione della lastra quando è inflessa, con spostamenti normali al piano di giacitura della sua superficie media.



Immaginiamo di estrarre dalla lastra una porzione

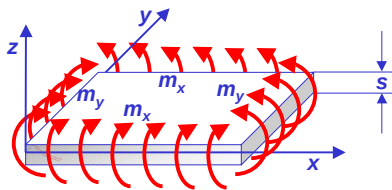
Questa risulterà sollecitata da coppie flettenti, indicate in rosso nello schema qui accanto, e da forze di taglio.



Lastre piane

Flessione semplice

m_x, m_y = momenti per unità di lunghezza



IPOTESI:

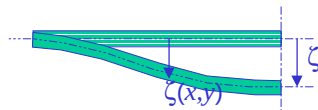
il materiale è omogeneo, isotropo e si comporta elasticamente;

lo spessore s è costante e piccolo rispetto alle dimensioni nel piano xy ;

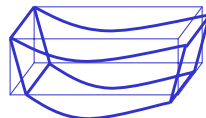
lo spostamento ζ è piccolo rispetto allo spessore.



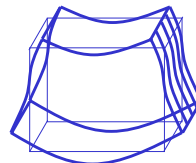
ne deriva che ogni segmento rettilineo e normale al piano medio della lastra si conserva rettilineo anche dopo la deformazione e normale alla superficie elastica



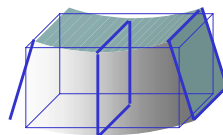
$\zeta(x,y)$ è lo spostamento della lastra, normale al piano di giacitura, per effetto del carico



le sezioni non sono normali alla superficie elastica ma rimangono piane



le sezioni non rimangono piane



Lastre piane

Flessione semplice

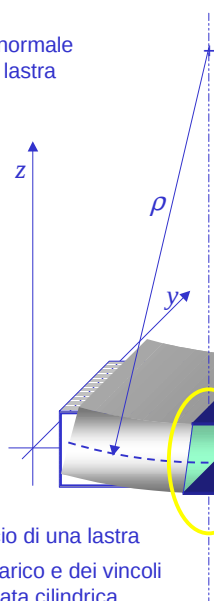
Le componenti della deformazione nel piano della lastra

ζ = spostamento normale al piano della lastra

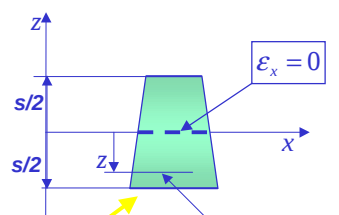
$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$$

In modo analogo si definisce la curvatura in direzione y

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{d^2 \zeta}{dy^2}$$



Si consideri un concio di una lastra che per effetto del carico e dei vincoli assuma una deformata cilindrica



$$\epsilon_x = 0$$

$$\epsilon_x = z \frac{d^2 \zeta}{dx^2}$$

$$\epsilon_x = \frac{z}{\rho_x}$$

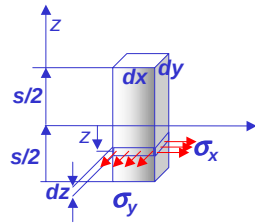
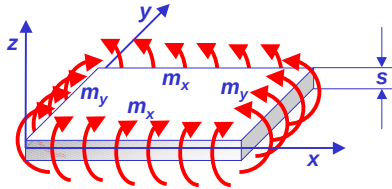
e la componente in direzione y della deformazione

$$\epsilon_y = \frac{z}{\rho_y}$$

Lastre piane

Flessione semplice

In base alle ipotesi precedenti (ζ piccolo rispetto allo spessore) è accettabile ritenere che sul piano medio della lastra le deformazioni ε_x ed ε_y provocate da m_y ed m_x siano nulle.



Le deformazioni ε_x ε_y fuori dal piano medio sono legate alla curvatura locale:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} \quad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y}$$

dove z è la quota nello spessore e $1/\rho$ è la curvatura della superficie elastica.

Inoltre, sempre in seguito alle ipotesi fatte si può affermare che la σ_z sia nulla.

Le tensioni σ_x e σ_y sono legate alle deformazioni dalle relazioni costitutive:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

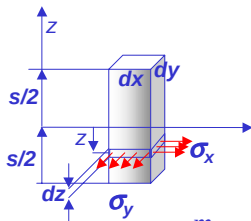
e quindi:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right) \quad \sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right)$$

Lastre piane

Flessione semplice

I momenti unitari m_x ed m_y sono legati alle tensioni dalle relazioni:



$$m_x = \int_{-s/2}^{+s/2} \sigma_y z dz \quad m_y = \int_{-s/2}^{+s/2} \sigma_x z dz$$

sostituendo alle tensioni le espressioni ricavate in funzione delle deformazioni si ha:

$$m_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right) \int_{-s/2}^{+s/2} z^2 dz = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right)$$

$$m_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right) \int_{-s/2}^{+s/2} z^2 dz = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right)$$

avendo posto: $D = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)}$

si può scrivere sinteticamente:

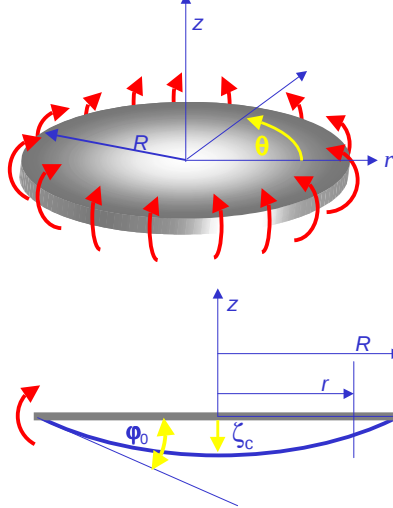
$$m_x = D \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right)$$

$$m_y = D \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right)$$

Lastre piane

Flessione semplice

La condizione $m_x = m_y = m$ si verifica nelle piastre circolari soggette a coppie agenti in piani radiali e uniformemente ripartite lungo il contorno



Se la flessione è uniforme, ovvero i momenti unitari m_x ed m_y sono uguali: $m_x = m_y = m$ anche le curvature $1/\rho$ sono uguali.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{m}{(1+\nu)D} = (1-\nu) \frac{m}{EJ}$$

ricordando che: $D = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{EJ}{1-\nu^2}$

Ciò significa che la superficie elastica è sferica con raggio ρ .

In questo caso la rotazione ϕ in corrispondenza di un raggio generico r vale:

$$\phi = \frac{r}{\rho} = \frac{mr}{(1+\nu)D}$$

Al raggio R si ha: $\phi_0 = \frac{R}{\rho} = \frac{mR}{(1+\nu)D}$

mentre lo spostamento ζ_c nel centro è dato da:

$$\zeta_c = \frac{R^2}{2\rho} = \frac{mR^2}{2(1+\nu)D}$$

Lastre piane

Flessione semplice

La relazione $\zeta_c = \frac{R^2}{2\rho}$

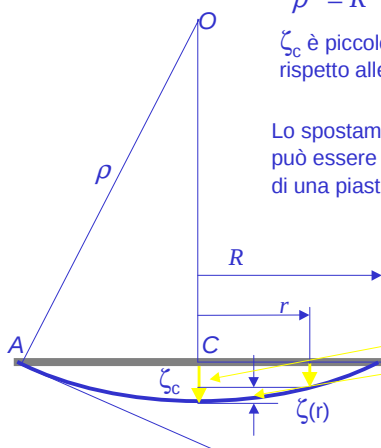
si dimostra facilmente: $\overline{AO}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OC}^2$

$$\rho^2 = R^2 + (\rho - \zeta_c)^2 = R^2 + \rho^2 + \cancel{\zeta_c^2} - 2\rho\zeta_c$$

ζ_c è piccolo e, quindi, il suo quadrato è trascurabile rispetto alle altre grandezze. Si ottiene dunque:

$$\zeta_c = \frac{R^2}{2\rho}$$

Lo spostamento $\zeta(r)$ in corrispondenza di un raggio generico r può essere calcolato come differenza tra lo spostamento al centro di una piastra di raggio R e di una di raggio generico r :



$$\zeta(r) = \frac{mR^2}{2(1+\nu)D} - \frac{mr^2}{2(1+\nu)D}$$

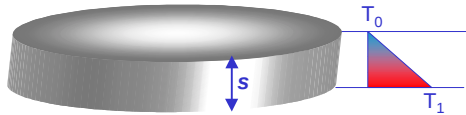
quindi si può scrivere:

$$\zeta(r) = \frac{m}{2D(1+\nu)}(R^2 - r^2)$$

Lastre piane

Flessione semplice: applicazione

Si consideri una parete in metallo nella quale si verifica un gradiente termico.



La parete è assimilabile ad una piastra circolare incastrata al bordo.

La temperatura varia linearmente lungo lo spessore dal valore minimo T_0 al valore massimo T_1

Poniamo $T_1 - T_0 = \Delta T$

Se la piastra fosse libera di dilatarsi

la superficie media diventerebbe sferica, di raggio ρ :

$$\varepsilon = \frac{s/2}{\rho} = \alpha \frac{\Delta T}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \alpha \frac{\Delta T}{s}$$

L'incastrato impedisce tale deformazione, costringendo la lastra a rimanere piana.

Il momento d'incastrato può essere calcolato come segue: $m = \frac{D(1+\nu)}{\rho} = \frac{\alpha \Delta T (1+\nu) D}{s}$

Quindi la tensione massima risulta: $\sigma_{\max} = \frac{6m}{s^2} = \frac{6\alpha \Delta T (1+\nu) D}{s^3} = \frac{\alpha \Delta T}{2} \frac{E}{1-\nu}$

Come si vede la tensione massima non dipende dalle dimensioni della piastra.

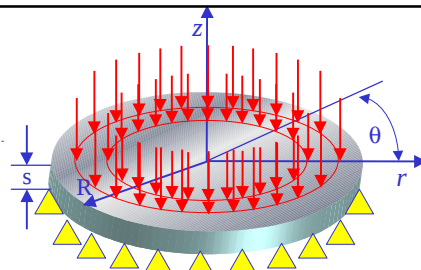
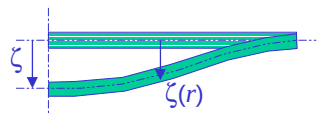
Esempio numerico: $\Delta T = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5}$ $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$

$$\sigma_{\max} = \frac{1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \cdot 200 \cdot 10^9}{2(1-0.3)} \approx 171 \text{ MPa} \quad = 1.71 \text{ MPa / } ^\circ\text{C}$$

Lastre piane circolari

Lastra circolare di raggio R e spessore costante s
 $s \ll R$

Ipotesi:

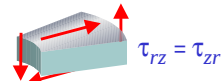
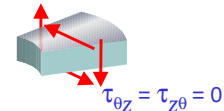
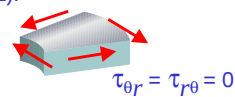
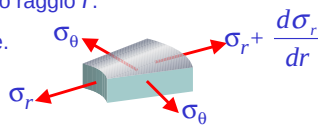
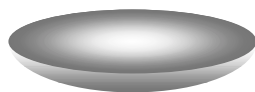


- Materiale omogeneo ed isotropo.
- Vincoli assialsimmetrici: appoggio o incastrato lungo il contorno.
- Carichi assialsimmetrici e normali al piano della lastra (paralleli all'asse z).

La legge di variazione del carico è funzione di r ma non dipende da θ .

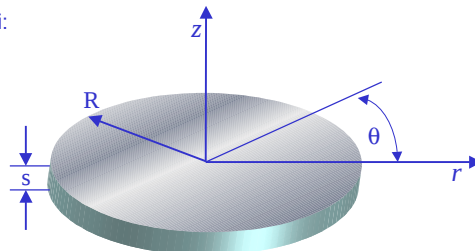
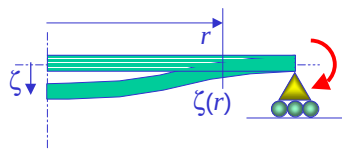
Se sono valide queste ipotesi si ha:

- Le tensioni tangenziali $\tau_{\theta r}$ e $\tau_{\theta z}$ sono nulle.
- La tensione normale σ_z è nulla.
- Le tensioni σ_θ , σ_r e τ_{rz} sono indipendenti da θ .
- Lo spostamento ζ è funzione del solo raggio r .
- La superficie elastica è di rivoluzione.



Lastre piane circolari

Ipotesi ulteriori:

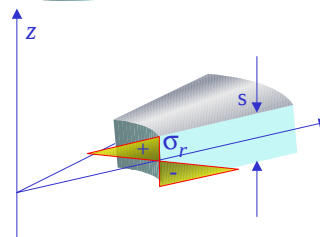


Al contorno la lastra è libera di spostarsi nel proprio piano.

Lo spostamento $\zeta(r)$ è piccolo rispetto allo spessore s .



Le tensioni normali σ_r e σ_θ sono nulle nel piano $z=0$
Non è chiamata in causa la rigidità membranale.

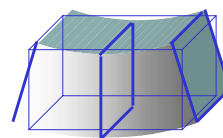


Nel piano radiale rz le sezioni si deformano in modo tale che ogni segmento rettilineo normale al piano si conservi rettilineo anche dopo la deformazione (ipotesi di Bernulli-Navier).

Se c'è taglio tale ipotesi è accettabile se $s \ll R$.

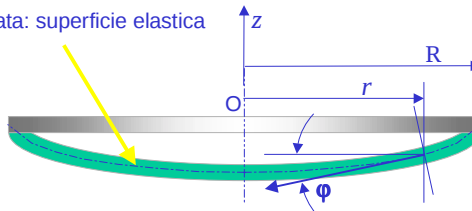
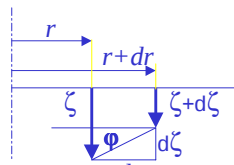


Le tensioni variano linearmente nello spessore.



Lastre piane circolari

Deformata: superficie elastica



Essendo lo spostamento $\zeta(r)$ piccolo rispetto allo spessore s , l'inclinazione ϕ della superficie elastica nel piano rz sarà anch'essa molto piccola.

Quindi l'inclinazione ϕ e lo spostamento ζ sono legati dalla relazione:

$$\tan(\phi) \cong \phi = -\frac{d\zeta}{dr}$$

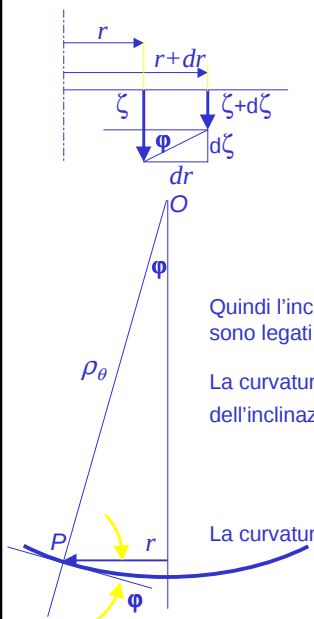
La curvatura $1/\rho_r$ della superficie elastica nel piano rz è legata al gradiente dell'inclinazione ϕ e, quindi, alla derivata seconda dello spostamento ζ .

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{d\phi}{dr} = -\frac{d^2\zeta}{dr^2}$$

La curvatura nel piano normale al piano rz è data da:

$$\frac{1}{\rho_\theta} = \frac{\phi}{r}$$

Infatti: $\rho_\theta = \frac{r}{\sin \phi} \cong \frac{r}{\phi}$



Lastre piane circolari

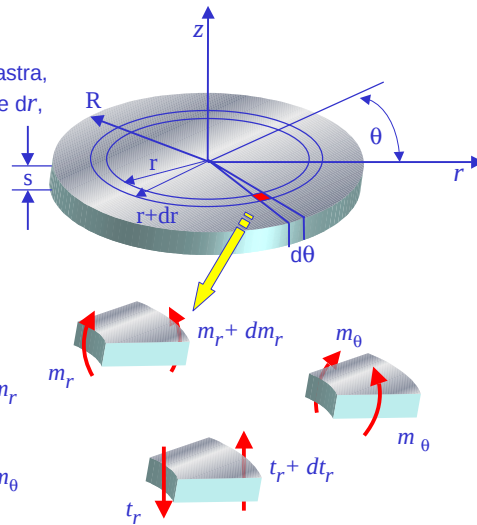
Consideriamo un elementino infinitesimo della lastra, ottenuto con due sezioni cilindriche, al raggio r e dr , del settore individuato dall'angolo $d\theta$.

Per effetto dei carichi e dei vincoli prima definiti, sull'elementino agiranno momenti flettenti e forze di taglio:

il momento flettente, per unità di lunghezza, m_r agente nel piano rz

il momento flettente, per unità di lunghezza, m_θ agente in un piano normale al piano rz

la forza di taglio, per unità di lunghezza, t_r agente nel piano rz



Lastre piane circolari

Ricordando che tra momenti flettenti e curvature valgono le relazioni:

e ricordando ancora che:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_r} = \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{1}{\rho_\theta} = \frac{\varphi}{r} \end{cases} \quad \begin{cases} m_r = D \left(\frac{1}{\rho_r} + \nu \frac{1}{\rho_\theta} \right) \\ m_\theta = D \left(\frac{1}{\rho_\theta} + \nu \frac{1}{\rho_r} \right) \end{cases}$$

Si può scrivere:

$$\begin{cases} m_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) \\ m_\theta = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \end{cases}$$

Si considerino le coppie e le forze agenti sull'elementino nel piano rz :

sul lato a agisce la coppia: $m_r r d\vartheta$ e la forza: $t_r r d\vartheta$

sul lato b agisce la coppia: $(m_r + dm_r)(r + dr)d\vartheta$

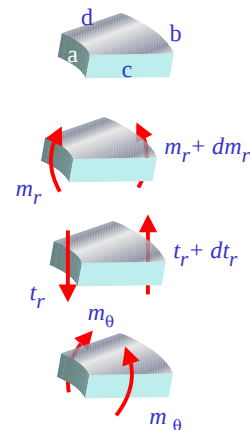
e la forza: $(t_r + dt_r)(r + dr)d\vartheta$

sui lati c e d agiscono due coppie uguali: $2 \times m_\theta dr \sin \frac{d\vartheta}{2}$

Per l'equilibrio alla rotazione dell'elementino, nel piano rz , confondendo $\sin(d\theta)$ con $d\theta$, si ha:

$$(m_r + dm_r)(r + dr)d\vartheta - m_r r d\vartheta - 2m_\theta dr \frac{d\vartheta}{2} + t_r r dr d\vartheta = 0$$

coppia dovuta alla forza di taglio



Lastre piane circolari

Ricordando che tra momenti flettenti e curvature valgono le relazioni:

e ricordando ancora che:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_r} = \frac{d\varphi}{dr} \\ \frac{1}{\rho_\vartheta} = \frac{\varphi}{r} \end{cases} \quad \begin{cases} m_r = D \left(\frac{1}{\rho_r} + \nu \frac{1}{\rho_\vartheta} \right) \\ m_\vartheta = D \left(\frac{1}{\rho_\vartheta} + \nu \frac{1}{\rho_r} \right) \end{cases}$$

Si può scrivere:

$$\begin{cases} m_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) \\ m_\vartheta = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \end{cases}$$

$$(m_r + dm_r)(r + dr)d\vartheta - m_r r d\vartheta - 2m_\vartheta dr \frac{d\vartheta}{2} + t_r r dr d\vartheta = 0$$

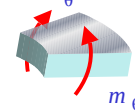
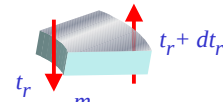
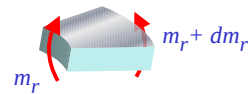
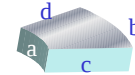
Sviluppando i prodotti e trascurando gli infinitesimi del terzo ordine si ottiene:

$$m_r dr d\vartheta + dm_r r d\vartheta - m_\vartheta dr d\vartheta + t_r r dr d\vartheta = 0$$

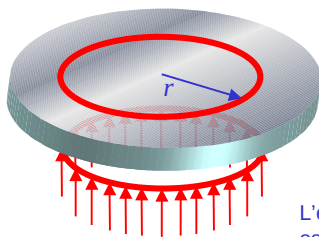
che si può scrivere: $m_r + \frac{dm_r}{dr} r - m_\vartheta + t_r r = 0$

I momenti possono essere espressi in funzione dell'angolo di rotazione φ ottenendo l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} = -\frac{t_r}{D}$$



Lastre piane circolari



L'espressione di t_r dipende dal carico applicato alla piastra.

Nel caso di pressione uniforme p ed un carico concentrato P , applicato al centro della piastra, nella sezione cilindrica generica di raggio r il taglio totale:

$$t_r 2\pi r$$

deve fare equilibrio al carico: $p\pi r^2 + P$

e, quindi, si può scrivere:

$$t_r 2\pi r = p\pi r^2 + P \quad \longrightarrow \quad t_r = \frac{pr}{2} + \frac{P}{2\pi r}$$

L'equazione differenziale di equilibrio, scritta in precedenza, può essere riscritta in una forma più comoda per l'integrazione:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r} = -\frac{t_r}{D} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{1}{D} \left(\frac{pr}{2} + \frac{P}{2\pi r} \right)$$

Integrando una prima volta si ha:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) = -\frac{1}{D} \left(\frac{pr^2}{4} + \frac{P}{2\pi} \ln r \right) + C_1$$

Per integrare nuovamente è utile ricordare che:

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln x - 1]$$

Quindi, moltiplicando per r ed integrando nuovamente, si ha:

$$r\varphi = -\frac{pr^4}{16D} - \frac{P}{2\pi D} \left(\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$

Lastre piane circolari

$$r\varphi = -\frac{pr^4}{16D} - \frac{P}{2\pi D} \left(\frac{r^2 \ln r}{2} - \frac{r^2}{4} \right) + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$

da cui si ottiene:
$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

A questo punto può essere ricavata l'equazione della superficie elastica.

Ricordando che:
$$\varphi = -\frac{d\zeta}{dr}$$
 con un'ulteriore integrazione, si ottiene:

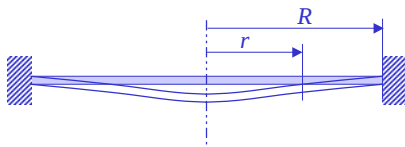
$$\zeta = \frac{pr^4}{64D} + \frac{Pr^2}{8\pi D} (\ln r - 1) - C_1 \frac{r^2}{4} - C_2 \ln r + C_3$$

Le costanti C_1 , C_2 e C_3 si determinano mediante le condizioni al contorno.

Le condizioni al contorno dipendono dai vincoli che sono imposti alla lastra.

Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno



Condizioni al contorno:

- 1) per $r = 0$ si ha $\varphi = 0$
- 2) per $r = R$ si ha $\varphi = 0$
- 3) per $r = R$ si ha $\zeta = 0$

Dalla 1° condizione si ricava $C_2 = 0$, altrimenti per $r = 0$ l'equazione:

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad \text{comporterebbe: } \varphi = \infty$$

Dalla 2° condizione si ricava:
$$\varphi = -\frac{pR^3}{16D} - \frac{PR}{8\pi D} (2 \ln R - 1) + C_1 \frac{R}{2} = 0$$

da cui si ottiene il valore della costante:
$$C_1 = \frac{pR^2}{8D} + \frac{P}{4\pi D} (2 \ln R - 1)$$

Quindi la funzione $\varphi(r)$ è ora nota:
$$\varphi = \frac{p}{16D} r (R^2 - r^2) + \frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{R}{r}$$

Dalla 3° condizione si ottiene:
$$\zeta = \frac{pR^4}{64D} + \frac{PR^2}{8\pi D} (\ln R - 1) - C_1 \frac{R^2}{4} + C_3 = 0$$

Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno

Introducendo il valore calcolato della prima costante $C_1 = \frac{pR^2}{8D} + \frac{P}{4\pi D}(2\ln R - 1)$

nell'equazione: $\zeta = \frac{pR^4}{64D} + \frac{PR^2}{8\pi D}(\ln R - 1) - C_1 \frac{R^2}{4} + C_3 = 0$

si ottiene: $\frac{pR^4}{64D} + \frac{PR^2}{8\pi D}(\ln R - 1) - \frac{pR^4}{32D} - \frac{PR^2}{16\pi D}(2\ln R - 1) + C_3 = 0$

da cui si ricava il valore della terza costante: $C_3 = \frac{pR^4}{64D} + \frac{PR^2}{16\pi D}$

Note tutte le costanti, si può scrivere l'equazione della superficie elastica:

$$\zeta = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2 + \frac{P}{16\pi D}\left(R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r}\right)$$

Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Esaminiamo ora il caso in cui agisca sulla lastra la sola pressione p : quindi $P = 0$.

Scriviamo le funzioni $\varphi(r)$ e $\zeta(r)$
$$\begin{cases} \varphi = \frac{p}{16D}r(R^2 - r^2) + \frac{P}{4\pi D}r \ln \frac{R}{r} \\ \zeta = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2 + \frac{P}{16\pi D}\left(R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r}\right) \end{cases}$$

nel caso in cui sia $P=0$: $\varphi = \frac{p}{16D}r(R^2 - r^2)$ $\zeta = \frac{p}{64D}(R^2 - r^2)^2$

e la derivata di $\varphi(r)$ vale: $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{p}{16D}(R^2 - 3r^2)$

I momenti flettenti possono essere calcolati ricordando le relazioni:

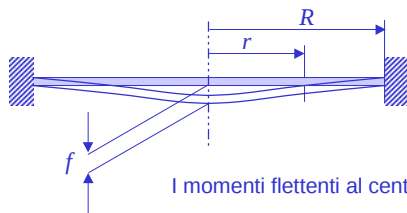
$$m_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r}\right) \quad m_\theta = D\left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr}\right)$$

e sostituendo le espressioni ora calcolate per $\varphi(r)$ e per la relativa derivata:

$$m_r = \frac{p}{16}\left[(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2\right] \quad m_\theta = \frac{p}{16}\left[(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2\right]$$

Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



Lo spostamento massimo (freccia f) si verifica al centro della lastra

$$\zeta_{(r=0)} = f = \frac{pR^4}{64D} = \frac{3(1-\nu^2)}{16} \frac{pR^4}{Es^3}$$

I momenti flettenti al centro della lastra si ottengono ponendo $r = 0$

$$m_r = m_\theta = (1+\nu) \frac{pR^2}{16} = (1+\nu) \frac{Q}{16\pi} \quad \text{avendo posto: } Q = p\pi R^2$$

$$\text{Al contorno } (r = R) \text{ si ha: } m_r = -\frac{pR^2}{8} = -\frac{Q}{8\pi} \quad m_\theta = -\nu \frac{pR^2}{8} = -\nu m_r$$

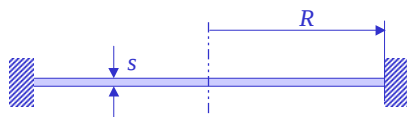
Sul bordo incastrato, infatti, la curvatura $\frac{1}{\rho_\theta} = \frac{\varphi}{r}$ è nulla e, quindi, il momento m_θ è dovuto unicamente all'effetto poisson. Il momento massimo è m_r al contorno,

La tensione massima si verifica, quindi, all'incastro e vale:

$$\sigma_r = \frac{m_r}{W} = \frac{6m_r}{s^2} \quad \rightarrow \quad \sigma_r(\max) = \pm \frac{3}{4} \frac{pR^2}{s^2}$$

Lastre piane circolari

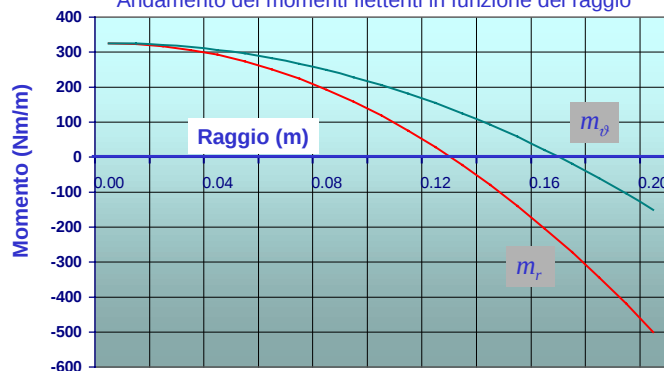
Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



Esempio di calcolo:

$$\begin{aligned} \text{Dati: } R &= 200 \text{ mm} & s &= 5 \text{ mm} \\ E &= 200 \text{ GPa} & \nu &= 0.3 \\ p &= 0.1 \text{ MPa} \end{aligned}$$

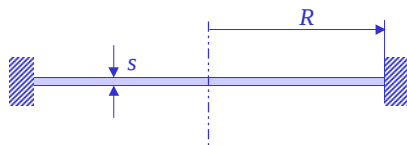
Andamento dei momenti flettenti in funzione del raggio



$$m_r = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2] \quad m_\theta = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

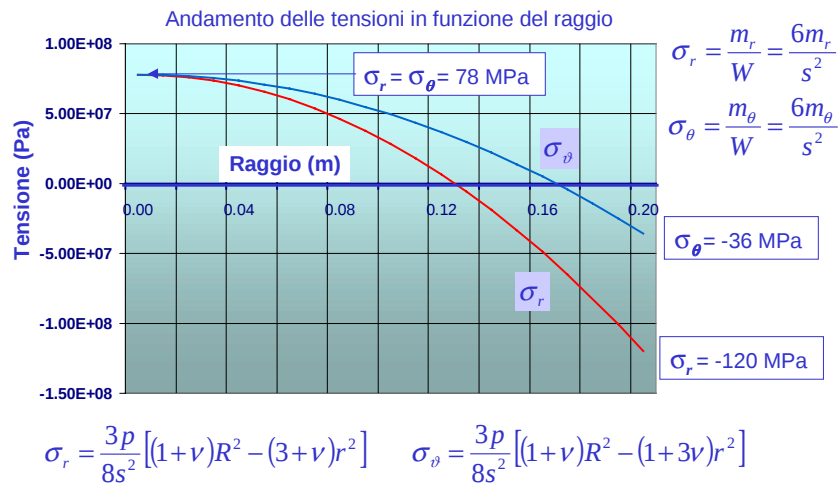
Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



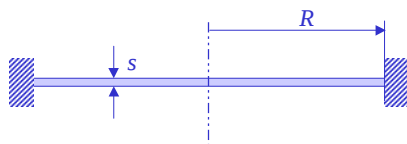
Esempio di calcolo:

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



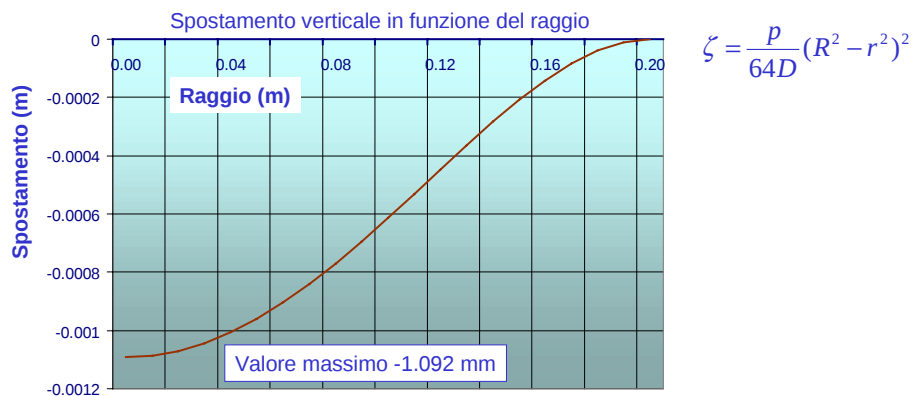
Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



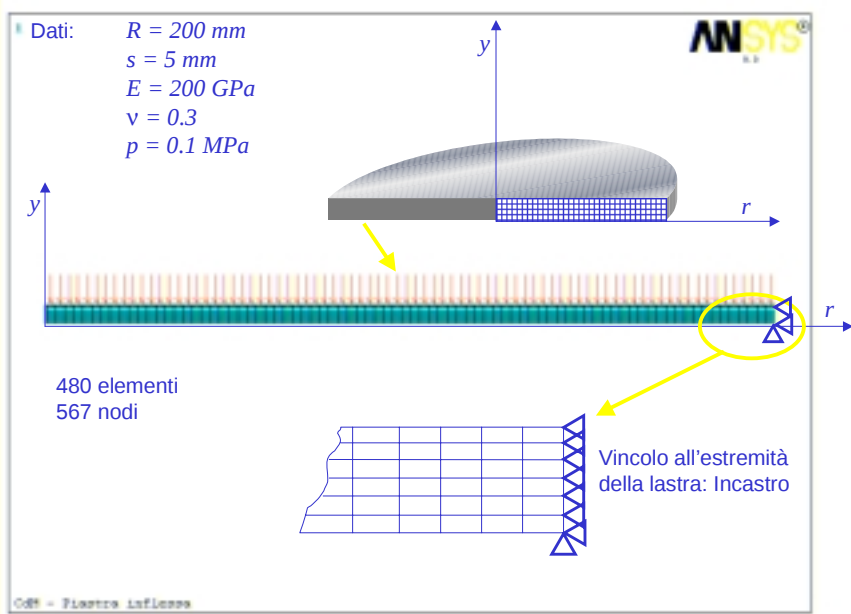
Esempio di calcolo:

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



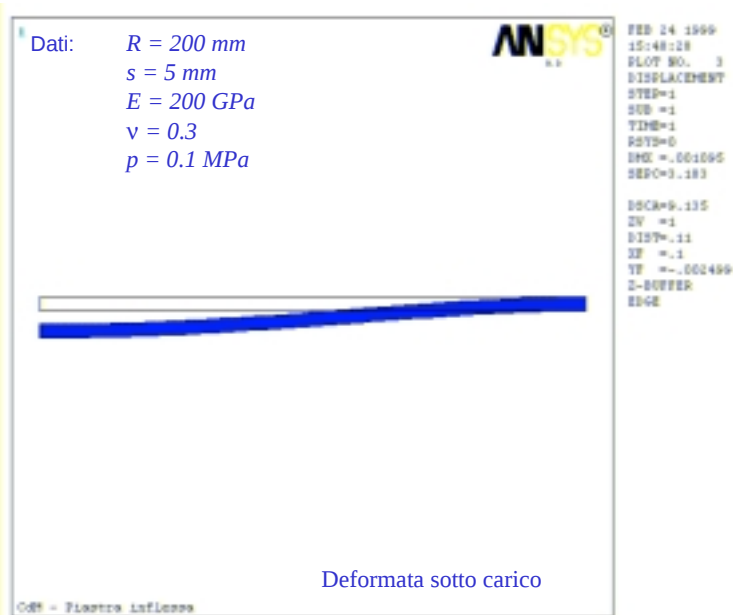
Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme
Modello ad elementi finiti



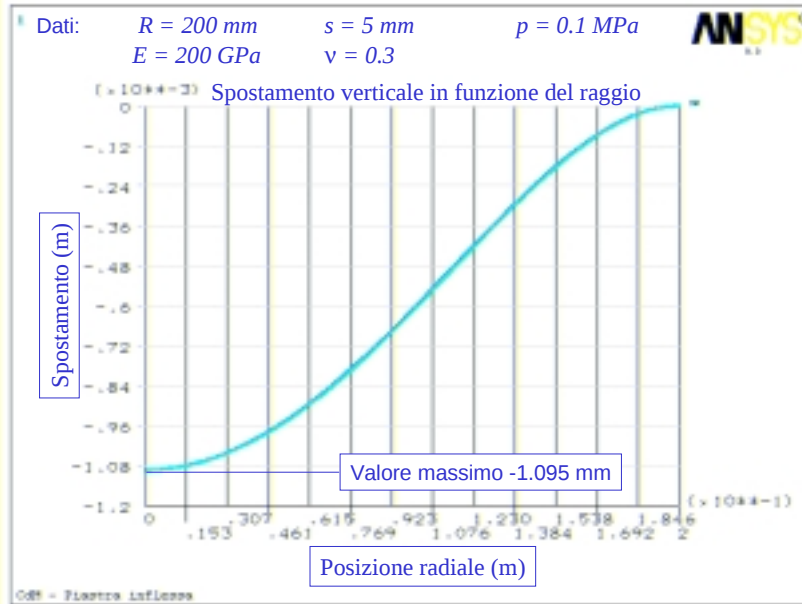
Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno
Modello ad elementi finiti



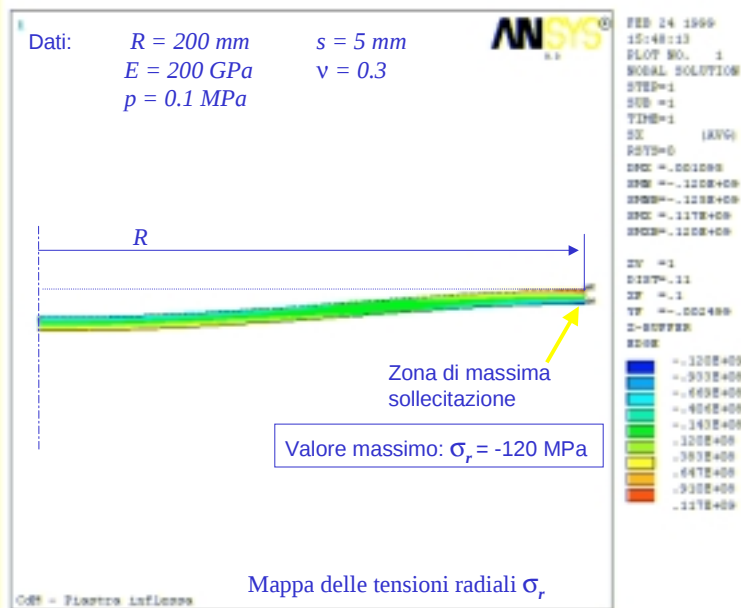
Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme



Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

ANSYS

Ingrandimento della zona di incastro della lastra

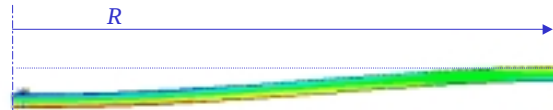


Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

ANSYS



FEB 24 1999
 15:48:21
 PLOT NO. 2
 GLOBAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 SE (AVG)
 SEYS=0
 SPCE =.001000
 SPCE =.784E+08
 SPCE =.433E+08
 SPCE =.262E+08
 SPCE =.875E+07
 SPCE =.868E+07
 SPCE =.261E+08
 SPCE =.433E+08
 SPCE =.609E+08
 SPCE =.784E+08

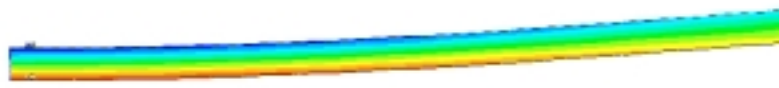
Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

ANSYS

Ingrandimento della zona centrale della lastra



Zona di massima sollecitazione

Valore massimo: $\sigma_{\theta} = 78 \text{ MPa}$

Mapa delle tensioni circonferenziali σ_{θ}

ODB - Piastre Inflesse

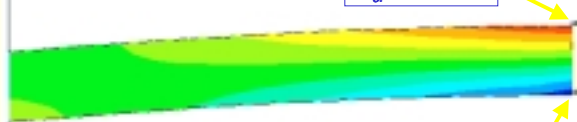
Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

ANSYS

Ingrandimento della zona di incastro della lastra



$\sigma_{\theta} = 35 \text{ MPa}$

$\sigma_{\theta} = -39 \text{ MPa}$

Mapa delle tensioni circonferenziali σ_{θ}

ODB - Piastre Inflesse

FEB 25 1999
 11:34:01
 PLOT NO. 1
 GLOBAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 SZ (AVG)
 PLOTS=0
 SPX =.159E+00
 SPY =.350E+00
 SPZ =.444E+00
 SPX =.350E+00
 SPY =.376E+00
 SZ =1
 *DEFT=.021609
 *EF =.101109
 *EF =.001606
 Z-BUFFER
 ESLE
 -.390E+00
 -.311E+00
 -.228E+00
 -.144E+00
 -.600E+07
 .390E+07
 .300E+00
 .300E+00
 .267E+00
 .300E+00

Lastre piane circolari

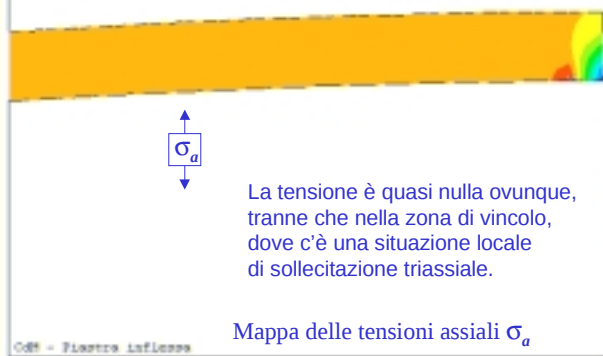
Lastra incastrata al contorno: pressione uniforme

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



FEB 24 1999
 16:42:30
 PLOT NO. 1
 GLOBAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 ST (AVG)
 PLOTS=0
 INFO =.001095
 SPO =-.114E+08
 SPO =-.164E+08
 SPO =.262E+07
 SPO =.774E+07

Ingrandimento della zona di incastro della lastra



La tensione è quasi nulla ovunque, tranne che nella zona di vincolo, dove c'è una situazione locale di sollecitazione triassiale.

Mappa delle tensioni assiali σ_a

ODB - Piastre Inflasse

Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: carico concentrato al centro

Esaminiamo ora il caso in cui agisca sulla lastra solo il carico concentrato P localizzato al centro della lastra e quindi $p = 0$: Ricordiamo le funzioni $\varphi(r)$ e $\zeta(r)$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{P}{16D} r(R^2 - r^2) + \frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{R}{r} \\ \zeta &= \frac{P}{64D} (R^2 - r^2)^2 + \frac{P}{16\pi D} \left(R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right) \end{aligned} \right.$$

nel caso in cui sia $p = 0$:

$$\varphi = \frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{R}{r} \quad \zeta = \frac{P}{16\pi D} \left(R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right)$$

e la derivata di $\varphi(r)$ vale:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{P}{4\pi D} \left(\ln \frac{R}{r} - 1 \right)$$

I momenti flettenti, come è noto, sono dati dalle relazioni:

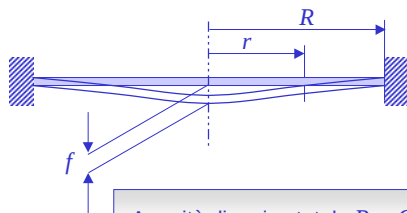
$$\left\{ \begin{aligned} m_r &= D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) \\ m_\theta &= D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \end{aligned} \right.$$

quindi, introducendo le espressioni di $\varphi(r)$ e $d\varphi(r)/dr$ si ha:

$$m_r = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 \right] \quad m_\theta = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu \right]$$

Lastre piane circolari

Lastra incastrata al contorno: carico concentrato al centro



Lo spostamento massimo (freccia f) si verifica al centro della lastra:

Tenendo conto che: $\lim_{r \rightarrow 0} \left(r^2 \ln \frac{R}{r} \right) = 0$

$$\text{si ha: } \zeta_{(r=0)} = f = \frac{PR^2}{16\pi D} = \frac{3(1-\nu^2)}{4\pi} \frac{PR^2}{Es^3}$$

A parità di carico totale $P = Q = p\pi R^2$ la freccia è quadrupla rispetto al caso di pressione uniforme

Al contorno ($r = R$) si ha: $m_r = -\frac{P}{4\pi}$

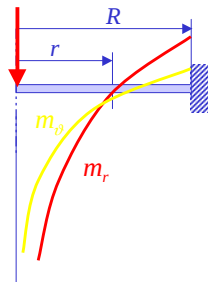
$$m_\vartheta = -\nu \frac{P}{4\pi} = -\nu m_r$$

Al centro ($r = 0$) i momenti raggiungono valori infiniti.

Le tensioni, come sempre, sono proporzionali ai momenti:

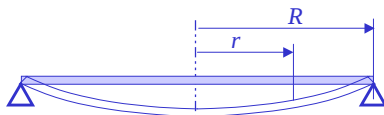
$$\sigma_r = \frac{m_r}{W} = \frac{6m_r}{s^2}$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{m_\vartheta}{W} = \frac{6m_\vartheta}{s^2}$$



Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

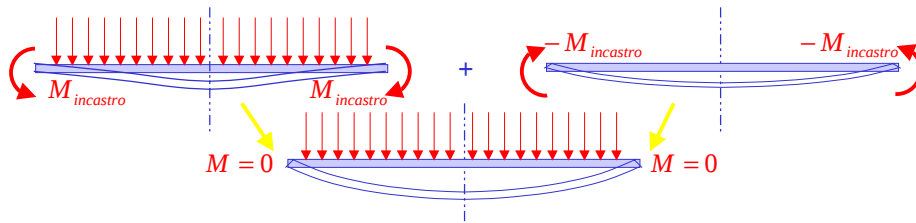


Condizioni al contorno:

- 1) per $r = 0$ si ha $\varphi = 0$
- 2) per $r = R$ si ha $m_r = 0$
- 3) per $r = R$ si ha $\zeta = 0$

Si può procedere come nel caso delle lastre incastrate al bordo, determinando i valori delle costanti C_1 , C_2 e C_3 in base alle condizioni al contorno.

Tuttavia, risulta più semplice sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti, valido in campo lineare elastico, sommando alla soluzione nota della lastra incastrata, la soluzione ottenuta applicando al bordo esterno della lastra un momento radiale uguale e contrario al momento d'incastro.



In tal modo si rispetta la 2° condizione al contorno, $m_r = 0$ per $r = R$, mentre le altre due sono già rispettate nel caso di incastro al bordo esterno.

Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

Primo caso: pressione uniforme p In questo caso il momento radiale di incastro è dato da: $m_r = -\frac{pR^2}{8}$ quindi, il momento da applicare al bordo della lastra libera è: $m = +\frac{pR^2}{8}$ La rotazione in funzione del raggio in una lastra, libera al bordo, alla quale è applicato un momento uniforme m è data da:

$$\varphi^* = \frac{rm}{D(1+\nu)} = \frac{rpR^2}{8D(1+\nu)}$$

La rotazione in funzione del raggio in una lastra incastrata al bordo e soggetta ad una pressione uniforme è data da: $\varphi^{**} = \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2)$

Quindi, la rotazione in funzione del raggio in una lastra appoggiata al bordo e soggetta ad una pressione uniforme è data dalla somma delle due rotazioni:

$$\varphi = \varphi^* + \varphi^{**} = \frac{pr}{16D} \left(\frac{2R^2}{(1+\nu)} + R^2 - r^2 \right) = \frac{pr}{16D} \left(\frac{3+\nu}{(1+\nu)} R^2 - r^2 \right)$$

La rotazione in corrispondenza del bordo è: $\varphi_{(r=R)} = \frac{pR^3}{8D(1+\nu)}$ **Lastre piane circolari**

Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme p Ricordando che il momento da applicare al bordo della lastra libera è: $m = +\frac{pR^2}{8}$ Lo spostamento normale al piano in una lastra, libera al bordo, alla quale è applicato un momento uniforme m è dato da:

$$\zeta^* = \frac{m}{2D(1+\nu)} (R^2 - r^2) = \frac{pR^2}{16D(1+\nu)} (R^2 - r^2)$$

Lo spostamento normale al piano in una lastra incastrata al bordo e soggetta ad una pressione uniforme è dato da: $\zeta^{**} = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2$

Quindi lo spostamento normale al piano in una lastra appoggiata al bordo e soggetta ad una pressione uniforme è dato dalla somma dei due spostamenti:

$$\zeta = \zeta^* + \zeta^{**} = \frac{pR^2}{16D(1+\nu)} (R^2 - r^2) + \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2 = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right)$$

La freccia f (spostamento normale al piano al centro) è dato da: $\zeta_{(r=0)} = f = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{pR^4}{64D}$ La freccia f è maggiore di quella ottenuta per la lastra incastrata del rapporto:

$$\frac{5+\nu}{1+\nu} \quad \text{che, per } \nu = 0.3, \text{ vale circa } 4$$

Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme p

Il momento $m = +\frac{pR^2}{8}$ opposto al momento di incastro, che agisce lungo il contorno, provoca momenti $m_r = m_\theta = m$ in tutti i punti della lastra.

Quindi, per ottenere la distribuzione dei momenti flettenti in funzione del raggio, nella lastra appoggiata, basta sommare il momento costante m alle funzioni calcolate per le lastre incastrate:

$$m_r = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2] + \frac{pR^2}{8} = \frac{p}{16} (3+\nu)(R^2 - r^2)$$

$$m_\theta = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2] + \frac{pR^2}{8} = \frac{p}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

I momenti al centro della piastra valgono:

$$m_r = m_\theta = (3+\nu) \frac{pR^2}{16} = (3+\nu) \frac{Q}{16\pi} \quad \text{avendo posto: } Q = p\pi R^2$$

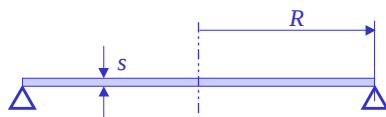
Al bordo si ha: $m_r = 0 \quad m_\theta = (1-\nu) \frac{pR^2}{8}$

La tensione massima si ha nel centro e vale: $\sigma_{\max} = \pm \frac{3(3+\nu)}{8} \frac{pR^2}{s^2}$

Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

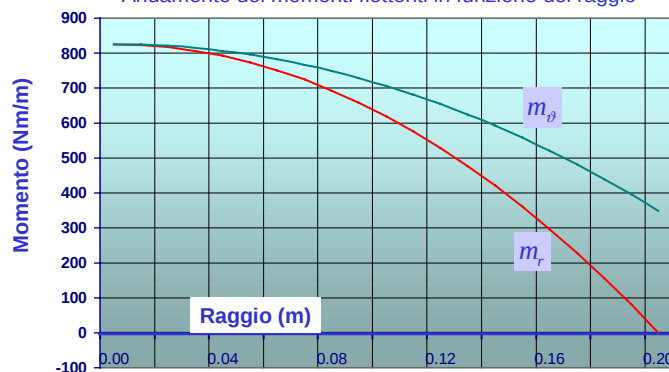
Pressione uniforme p



Esempio di calcolo:

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

Andamento dei momenti flettenti in funzione del raggio

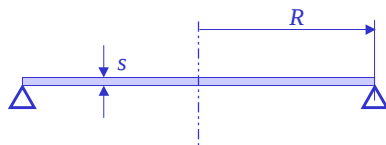


$$m_r = \frac{p}{16} (3+\nu)(R^2 - r^2) \quad m_\theta = \frac{p}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

Lastre piane circolari

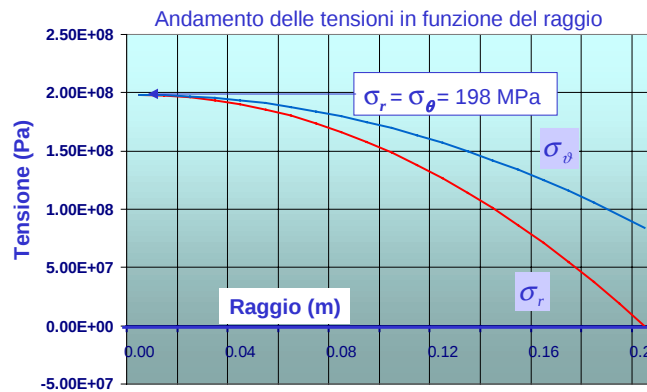
Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme p



Esempio di calcolo:

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



$$\sigma_r = \frac{m_r}{W} = \frac{6m_r}{s^2}$$

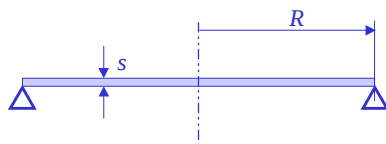
$$\sigma_\theta = \frac{m_\theta}{W} = \frac{6m_\theta}{s^2}$$

$$\sigma_r = \frac{3p}{8s^2} (3+\nu)(R^2 - r^2) \quad \sigma_\theta = \frac{3p}{8s^2} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

Lastre piane circolari

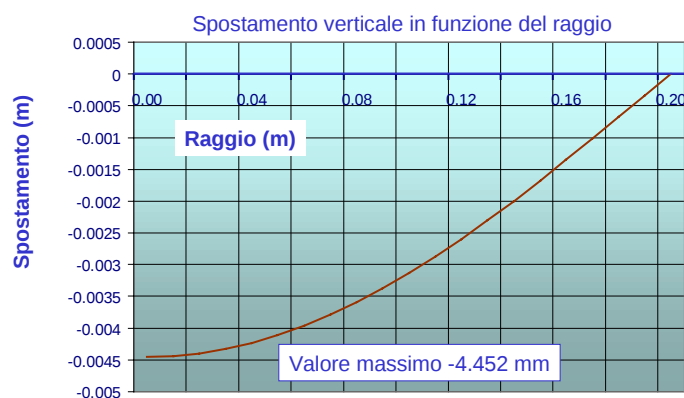
Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme p



Esempio di calcolo:

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



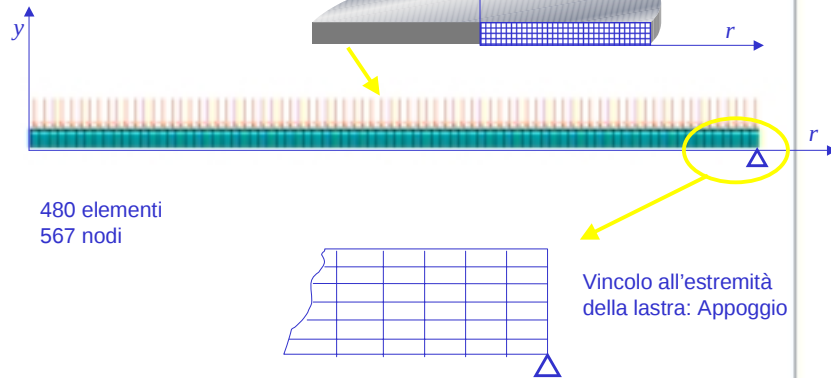
$$\zeta = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right)$$

Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno
Modello ad elementi finiti

Pressione uniforme p

Dati:
 $R = 200 \text{ mm}$
 $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno
Modello ad elementi finiti

Pressione uniforme p

Dati:
 $R = 200 \text{ mm}$
 $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



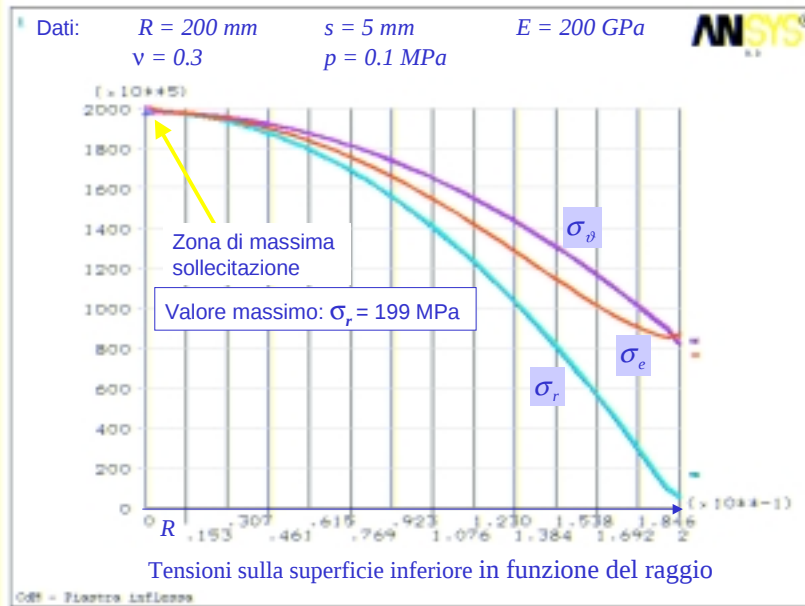
Deformata sotto carico

C88 - Piattezza Influsso

Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

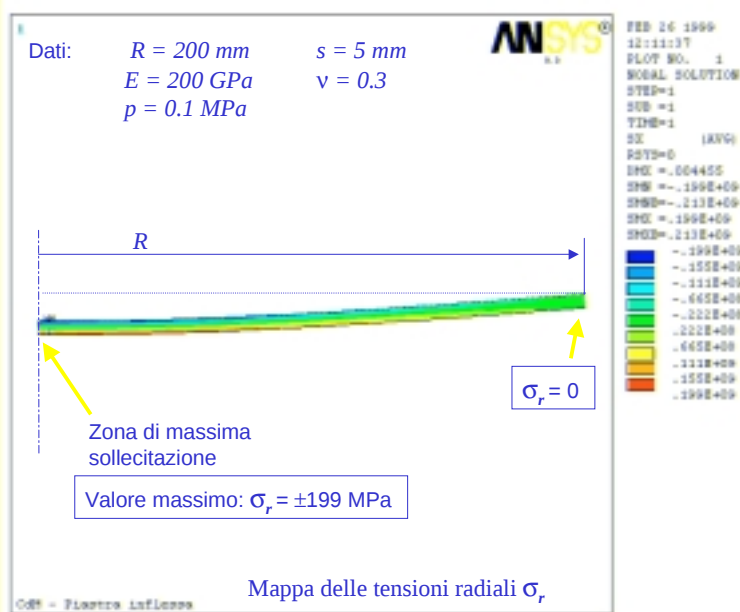
Pressione uniforme p



Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme p

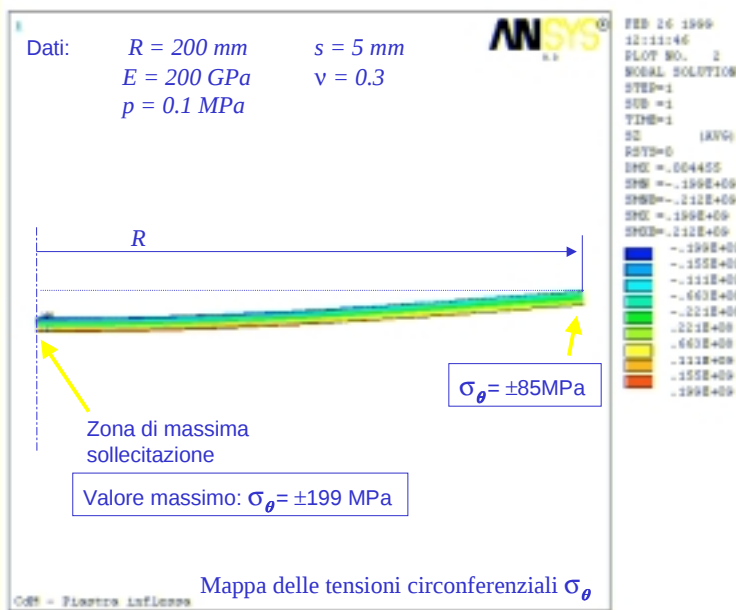


Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme p

Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$

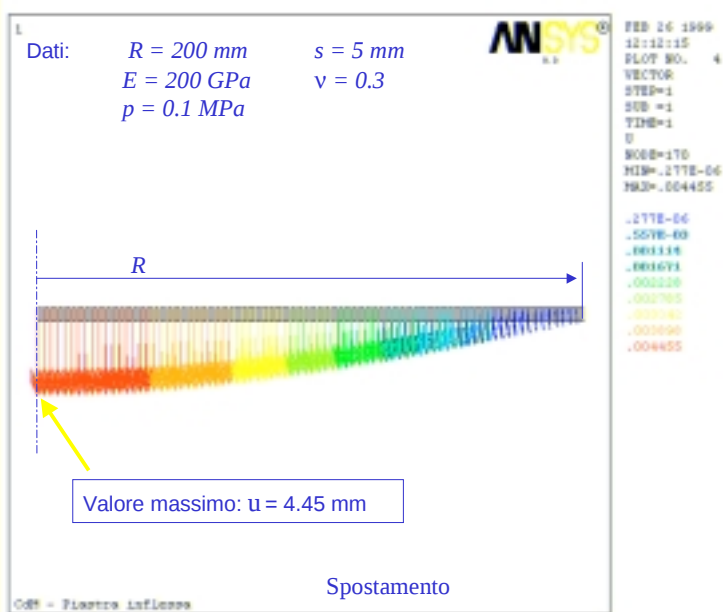


Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno

Pressione uniforme p

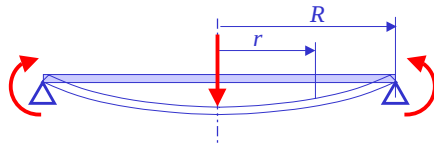
Dati: $R = 200 \text{ mm}$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $p = 0.1 \text{ MPa}$



Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno: carico concentrato al centro

Esaminiamo ora il caso in cui agisca sulla lastra solo il carico concentrato P , agendo in modo analogo a quanto si è fatto nel caso di pressione uniforme.



Nel caso di lastra incastrata e soggetta al carico concentrato P è stata ottenuta, in corrispondenza del bordo ($r = R$), la soluzione :

$$m_r = -\frac{P}{4\pi} \quad m_\theta = -\nu \frac{P}{4\pi} = -\nu m_r$$

Perché sia nullo il momento radiale al bordo, come deve essere in corrispondenza dell'appoggio, è necessario aggiungere un valore uguale ed opposto: $\rightarrow m = \frac{P}{4\pi}$

La rotazione può quindi essere calcolata come somma dei due contributi φ^* e φ^{**} dovuti, rispettivamente, al momento m ed alla soluzione con incastro:

$$\varphi^* = \frac{rm}{D(1+\nu)} = \frac{rP}{4\pi D(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \varphi^{**} = \frac{P}{4\pi D} r \ln \frac{R}{r}$$

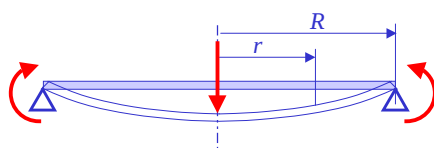
$$\text{da cui si ottiene:} \quad \varphi^* + \varphi^{**} = \varphi = \frac{P}{4\pi D} r \left(\ln \frac{R}{r} + \frac{1}{1+\nu} \right)$$

$$\text{La rotazione al bordo vale:} \quad \varphi_{(r=R)} = \frac{PR}{4\pi D(1+\nu)}$$

Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno: carico concentrato al centro

Esaminiamo ora il caso in cui agisca sulla lastra solo il carico concentrato P , agendo in modo analogo a quanto si è fatto nel caso di pressione uniforme.



Nel caso di lastra incastrata e soggetta al carico concentrato P è stata ottenuta, in corrispondenza del bordo ($r = R$), la soluzione :

$$m_r = -\frac{P}{4\pi} \quad m_\theta = -\nu \frac{P}{4\pi} = -\nu m_r$$

Perché sia nullo il momento radiale al bordo, come deve essere in corrispondenza dell'appoggio, è necessario aggiungere un valore uguale ed opposto: $\rightarrow m = \frac{P}{4\pi}$

In modo analogo si procede per lo spostamento, sommando i due contributi ζ^* e ζ^{**} dovuti, rispettivamente, al momento m ed alla soluzione con incastro:

$$\zeta^* = \frac{m}{2D(1+\nu)} (R^2 - r^2) = \frac{P}{8\pi D(1+\nu)} (R^2 - r^2) \quad \text{e} \quad \zeta^{**} = \frac{P}{16\pi D} (R^2 - r^2 - 2r^2 \ln \frac{R}{r})^2$$

$$\text{da cui si ottiene:} \quad \zeta^* + \zeta^{**} = \zeta = \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} (R^2 - r^2) - 2r^2 \ln \frac{R}{r} \right]$$

$$\text{Lo spostamento al centro vale:} \quad \zeta_{(r=0)} = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{PR^2}{16\pi D}$$

Lastre piane circolari

Lastra appoggiata al contorno: carico concentrato al centro

Il momento $m = \frac{P}{4\pi}$ provoca momenti $m_r = m_\theta = m$ in tutti i punti della lastra.

Quindi, per ottenere la distribuzione dei momenti flettenti in funzione del raggio, nella lastra appoggiata, basta sommare il momento costante m alle funzioni calcolate per le lastre incastrate, nella condizione di carico concentrato:

$$m_r = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 \right] + \frac{P}{4\pi} = (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \ln \frac{R}{r}$$

$$m_\theta = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu \right] + \frac{P}{4\pi} = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} + (1-\nu) \right]$$

I momenti al bordo della piastra valgono:

$$m_r = 0 \quad m_\theta = (1-\nu) \frac{P}{4\pi}$$

I momenti al centro della piastra risultano infiniti, come si è già visto per le lastre incastrate.

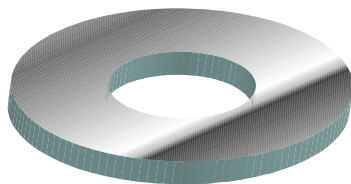
Le tensioni, come sempre, sono legate ai momenti dalle relazioni:

$$\sigma_r = \frac{m_r}{W} = \frac{6m_r}{s^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{m_\theta}{W} = \frac{6m_\theta}{s^2}$$

Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare



È interessante studiare il caso in cui la lastra sia di forma anulare, vincolata in modo qualsiasi in corrispondenza di entrambi i bordi.

La soluzione generale è data ancora dalle relazioni ricavate in precedenza per le lastre circolari.

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D} (2 \ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$\zeta = \frac{pr^4}{64D} + \frac{Pr^2}{8\pi D} (2 \ln r - 1) - C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3$$

e la derivata $d\varphi/dr$ che vale:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{3pr^2}{16D} - \frac{P}{8\pi D} (2 \ln r - 1) - \frac{P}{4\pi D} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$$

Se è vincolato un solo bordo della lastra, sono incognite le costanti C_1 , C_2 e C_3 ; se sono vincolati entrambi i bordi ci sono ulteriori incognite, legate alle reazioni al bordo interno.

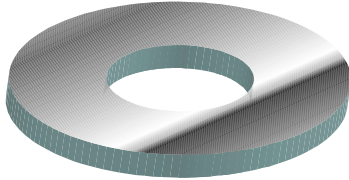
Le costanti incognite si determinano tramite le condizioni ai bordi, che si possono imporre sulla rotazioni φ , sullo spostamento ζ e sul momento radiale m_r che, come è noto, è legato alla rotazione φ ed alla sua derivata $d\varphi/dr$:

$$m_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right)$$

Laastre piane circolari

Lastra di forma anulare

È interessante studiare il caso in cui la lastra sia di forma anulare, vincolata in modo qualsiasi in corrispondenza di entrambi i bordi.



La soluzione generale è data ancora dalle relazioni ricavate in precedenza per le lastre circolari.

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D}(2\ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$\zeta = \frac{pr^4}{64D} + \frac{Pr^2}{8\pi D}(2\ln r - 1) - C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3$$

e la derivata $d\varphi/dr$ che vale:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{3pr^2}{16D} - \frac{P}{8\pi D}(2\ln r - 1) - \frac{P}{4\pi D} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$$

Introducendo i valori di φ e di $d\varphi/dr$ nell'espressione di m_r , si ottiene: $m_r = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) =$

$$= D \left[-\frac{3pr^2}{16D} - \frac{Pr}{8\pi D}(2\ln r - 1) - \frac{P}{4\pi D} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \nu \left(-\frac{pr^3}{16D} - \frac{P}{8\pi D}(2\ln r - 1) + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \right) \right]$$

e dunque:

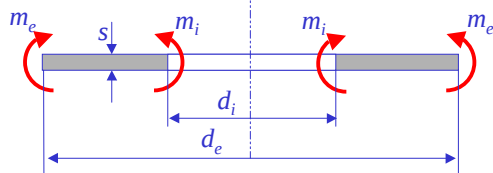
$$m_r = -(3+\nu) \frac{pr^2}{16} - (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \ln r - (1-\nu) \frac{P}{8\pi} + D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{r^2}$$

Laastre piane circolari

Lastra di forma anulare

Casi particolari:

due coppie agenti lungo i bordi



Condizioni al contorno:

1) per $r = R_e$ si ha: $m_r = m_e$

2) per $r = R_i$ si ha: $m_r = m_i$

inoltre $p = 0$ e $P = 0$

Imponendo le condizioni sui momenti applicati ai bordi e tenendo conto che i carichi, distribuiti o concentrati, sono nulli si ha:

$$m_r = -(3+\nu) \frac{pr^2}{16} - (1+\nu) \frac{P}{4\pi} \ln r - (1-\nu) \frac{P}{8\pi} + D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{r^2} =$$

$$= D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{r^2}$$

quindi: $D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{R_e^2} = m_e$ e $D(1+\nu) \frac{C_1}{2} - D(1-\nu) \frac{C_2}{R_i^2} = m_i$

da cui si ricavano le costanti:

$$C_1 = \frac{2(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(1+\nu)D(R_e^2 - R_i^2)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{(1-\nu)D(R_e^2 - R_i^2)}$$

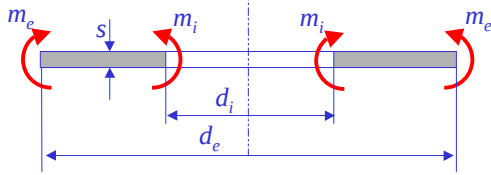
note le costanti, si può ricavare il momento radiale in funzione del raggio

$$m_r(r) = \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(R_e^2 - R_i^2)} - \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{r^2 (R_e^2 - R_i^2)}$$

Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

Coppie agenti lungo i bordi



Condizioni al contorno:

- 1) per $r = R_e$ si ha: $m_r = m_e$
 - 2) per $r = R_i$ si ha: $m_r = m_i$
- inoltre $p = 0$ e $P = 0$

e ancora si può calcolare la rotazione in funzione di r :

$$\varphi(r) = \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)r}{(1+\nu)D(R_e^2 - R_i^2)} + \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{(1-\nu)D(R_e^2 - R_i^2)} \frac{1}{r}$$

in corrispondenza dei bordi le rotazioni valgono:

$$\begin{cases} \varphi_e = \frac{m_e R_e [(1-\nu)R_e^2 + (1+\nu)R_i^2] - 2m_i R_i^2 R_e}{(1+\nu^2)D(R_e^2 - R_i^2)} \\ \varphi_i = \frac{2m_e R_e^2 R_i - m_i R_i [(1-\nu)R_i^2 + (1+\nu)R_e^2]}{(1+\nu^2)D(R_e^2 - R_i^2)} \end{cases}$$

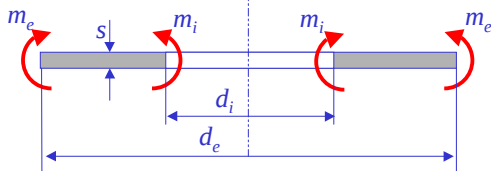
Per calcolare, infine, anche il momento circonferenziale: $m_\theta = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right)$

è necessario ricavare la derivata: $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2}$ da cui, sostituendo i valori delle costanti:

Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

Coppie agenti lungo i bordi



Condizioni al contorno:

- 1) per $r = R_e$ si ha: $m_r = m_e$
 - 2) per $r = R_i$ si ha: $m_r = m_i$
- inoltre $p = 0$ e $P = 0$

si ottiene:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(1+\nu)D(R_e^2 - R_i^2)} - \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{(1-\nu)D(R_e^2 - R_i^2)} \frac{1}{r^2}$$

e quindi: $m_\theta = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) =$

$$= \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(1+\nu)(R_e^2 - R_i^2)} + \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{(1-\nu)(R_e^2 - R_i^2)} \frac{1}{r^2} + \frac{\nu(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(1+\nu)D(R_e^2 - R_i^2)} - \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{(1-\nu)D(R_e^2 - R_i^2)} \frac{\nu}{r^2}$$

scrivendo in forma più compatta si ha: $m_\theta = \frac{(m_e R_e^2 - m_i R_i^2)}{(R_e^2 - R_i^2)} + \frac{(m_e - m_i)R_e^2 R_i^2}{r^2 (R_e^2 - R_i^2)}$

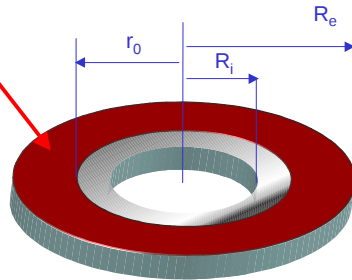
Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

Alcuni esempi di calcolo
applicato a soluzioni
di casi particolari

1° caso:
Lastra di forma anulare con
pressione uniforme agente su
una corona circolare

Area sulla quale agisce
la pressione p



Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare con pressione uniforme
agente su una corona circolare

Condizione di vincolo:
esterno appoggiato
interno libero

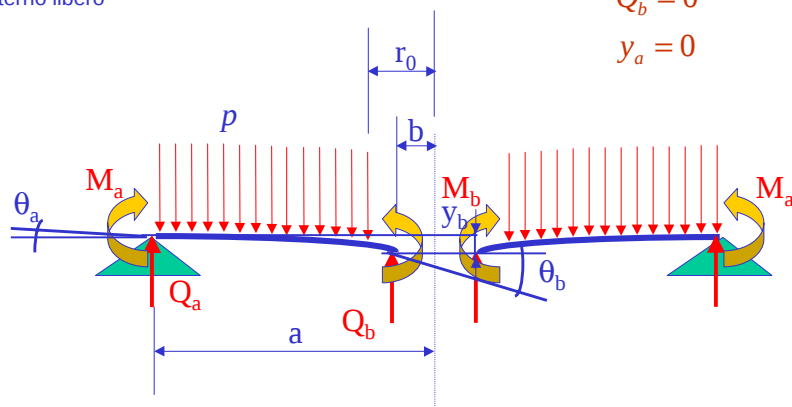
Condizioni al contorno:

$$M_{rb} = 0$$

$$M_{ra} = 0$$

$$Q_b = 0$$

$$y_a = 0$$



Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare con pressione uniforme
agente su una corona circolare

Spostamento in funzione del raggio:

$$y = y_b + \theta_b r \left[\frac{1+\nu}{2} \frac{b}{r} \ln \frac{r}{b} + \frac{1-\nu}{4} \left(\frac{r}{b} - \frac{b}{r} \right) \right] - q \frac{r^4}{D} \left\{ \frac{1}{64} \left[1 + 4 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 5 \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left[2 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \right\}$$

dove

$$y_b = \frac{-qa^4}{D} \left\{ \frac{\left[\frac{1+\nu}{2} \frac{b}{a} \ln \left(\frac{a}{b} \right) + \frac{1-\nu}{4} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \right] \left[\frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{4} \left[1 - \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \right] - \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \left[1 + (1+\nu) \ln \frac{a}{r_0} \right] \right\} \right]}{\frac{1}{2} (1-\nu^2) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)} \right. \\ \left. - \frac{qa^2}{D} \frac{1}{64} \left\{ 1 + 4 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 - 5 \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 - 4 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \left[2 + \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \right] \ln \frac{a}{r_0} \right\} \right\}$$

e

$$\theta_b = \frac{qa^3}{\frac{1}{2} (1-\nu^2) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) D} \left[\frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{4} \left[1 - \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 \right] - \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \left[1 + (1+\nu) \ln \frac{a}{r_0} \right] \right\} \right]$$

Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare con pressione uniforme
agente su una corona circolare

Rotazione in funzione del raggio:

$$\theta = \theta_b \left(\frac{1}{2} \left[(1+\nu) \frac{b}{r} + (1-\nu) \frac{r}{b} \right] \right) - \frac{qr^3}{D} \frac{1}{16} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right]$$

Momento radiale per unità di lunghezza in funzione del raggio:

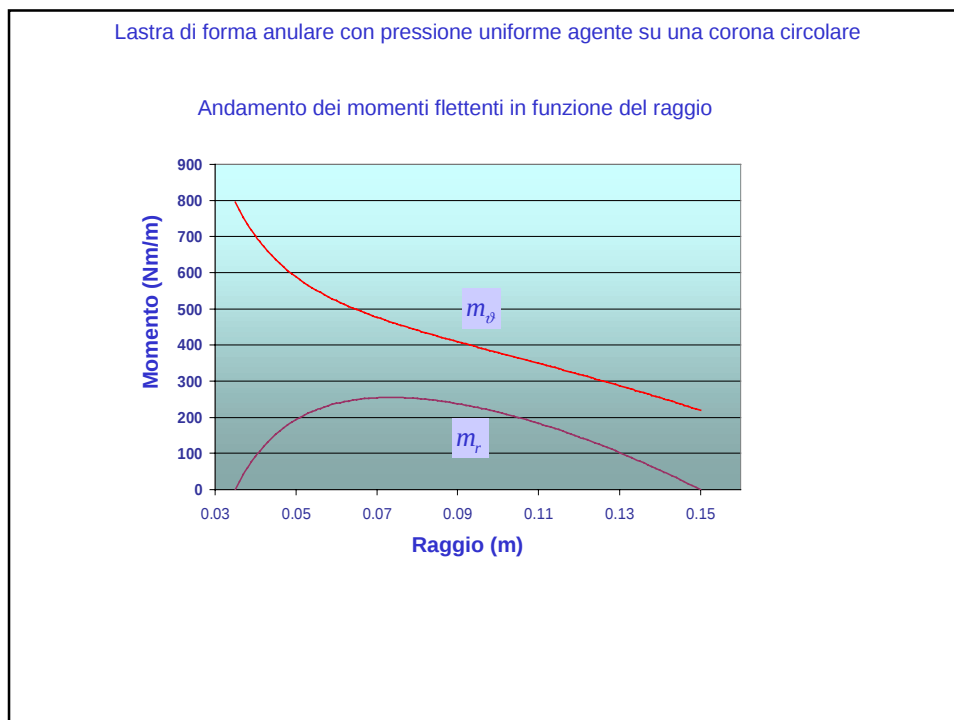
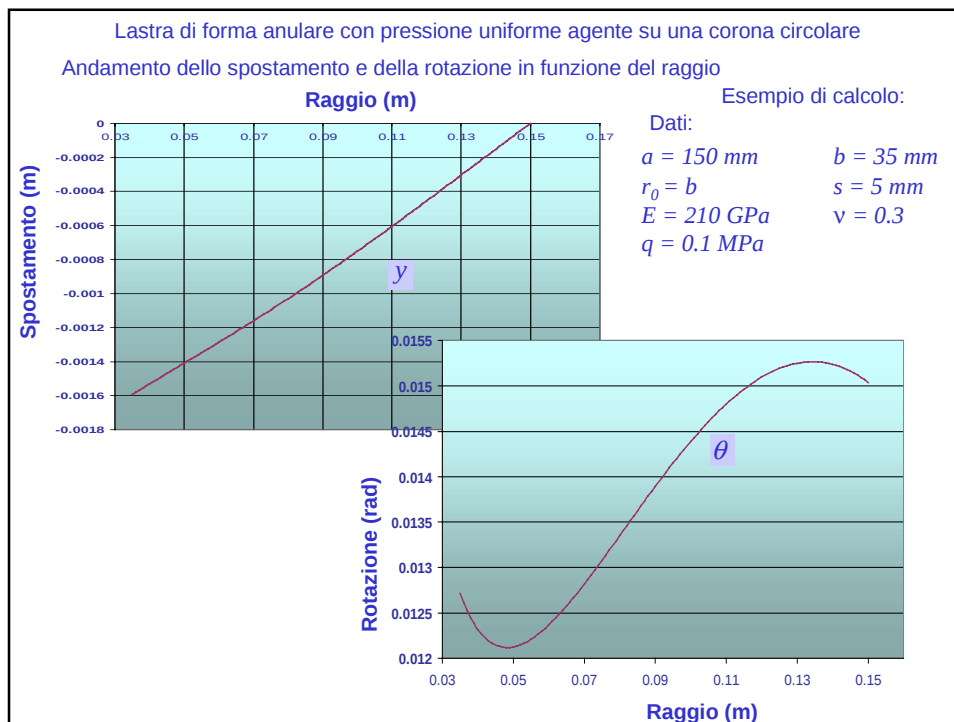
$$M_r = \theta_b \frac{D}{2r} (1-\nu^2) \left(\frac{r}{b} - \frac{b}{r} \right) - qr^2 \frac{1}{4} \left\{ 1 - \frac{1-\nu}{4} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right] - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left[1 + (1+\nu) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \right\}$$

Momento circonferenziale per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$M_\theta = \frac{\theta D (1-\nu^2)}{r} + \nu M_r$$

Taglio per unità di lunghezza in funzione del raggio:

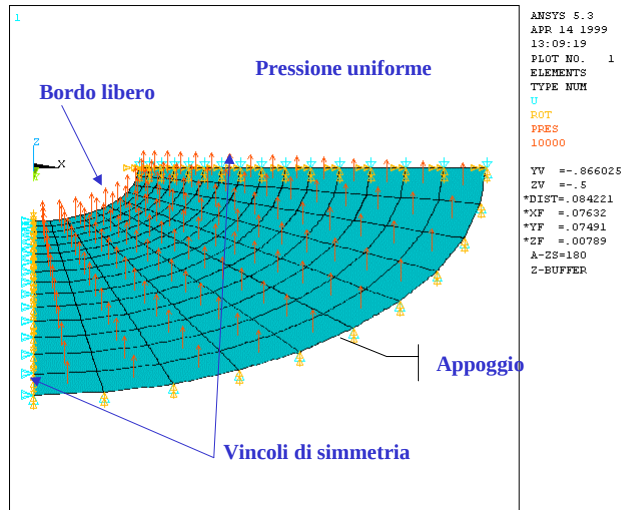
$$Q = - \frac{q}{2r} (r - r_0^2)$$



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Dati: $a = 150 \text{ mm}$ $b = 35 \text{ mm}$ $r_0 = b$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 210 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$ $q = 0.1 \text{ MPa}$

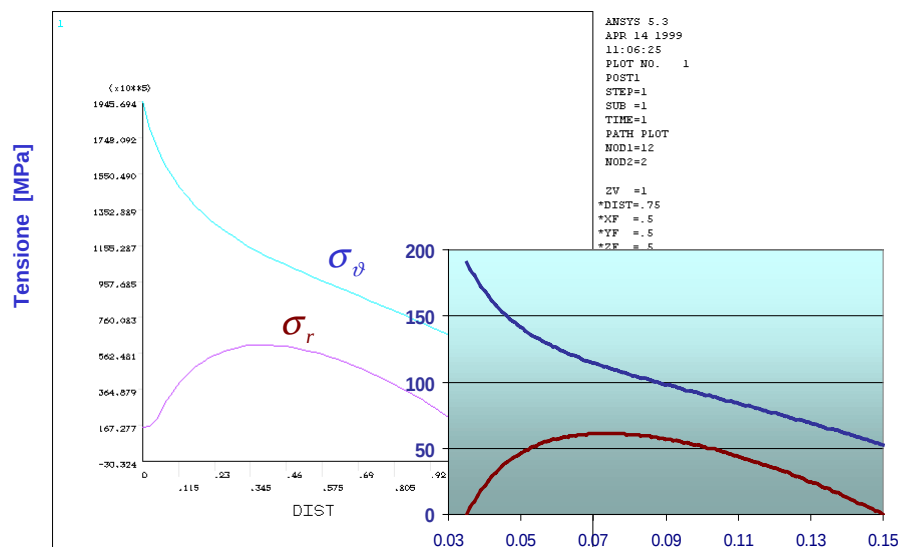
Modello ad elementi finiti:



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Dati: $a = 150 \text{ mm}$ $b = 35 \text{ mm}$ $r_0 = b$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 210 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$ $q = 0.1 \text{ MPa}$

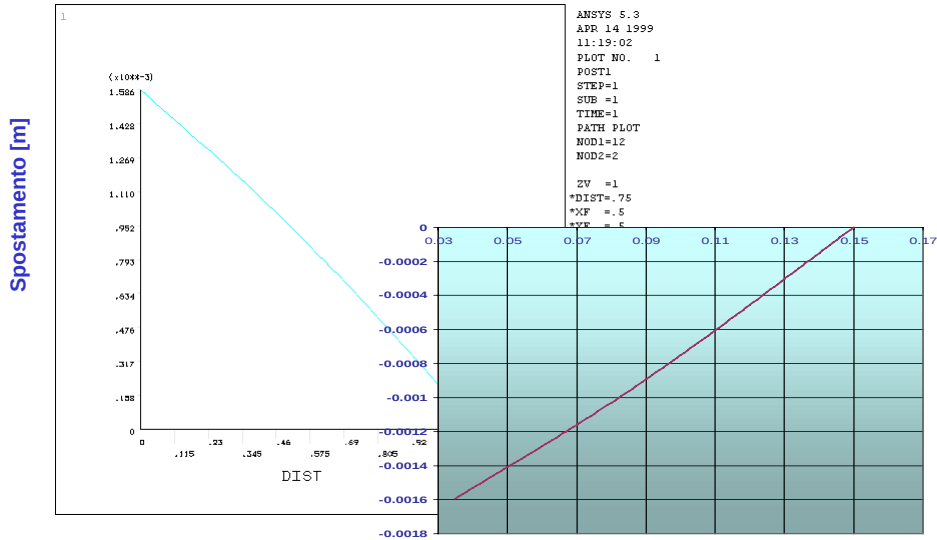
Confronto con il modello ad elementi finiti:



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Dati: $a = 150 \text{ mm}$ $b = 35 \text{ mm}$ $r_0 = b$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 210 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$ $q = 0.1 \text{ MPa}$

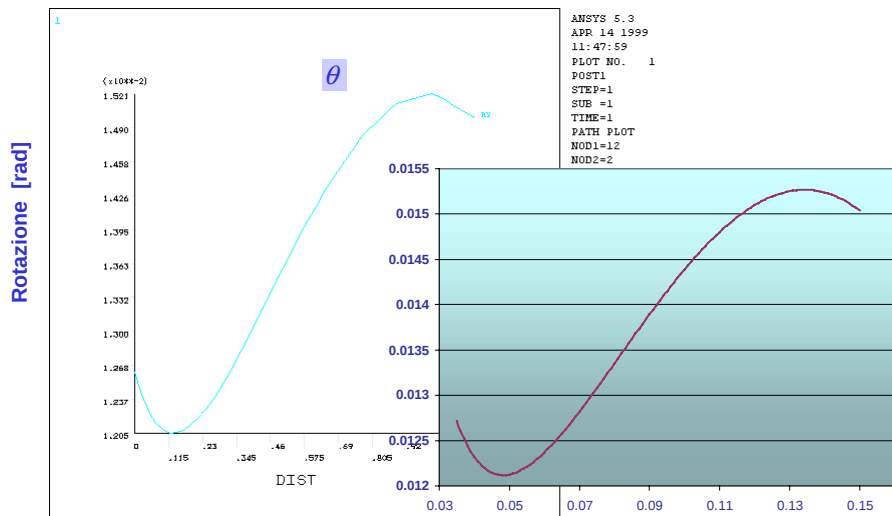
Spostamento assiale in funzione del raggio



Lastra di forma anulare con pressione uniforme agente su una corona circolare

Dati: $a = 150 \text{ mm}$ $b = 35 \text{ mm}$ $r_0 = b$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 210 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$ $q = 0.1 \text{ MPa}$

Rotazione in funzione del raggio

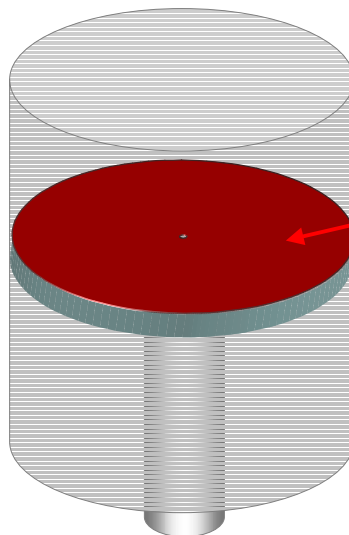


Lastre piane circolari

Lastra di forma anulare

Alcuni esempi di calcolo applicato a soluzioni di casi particolari

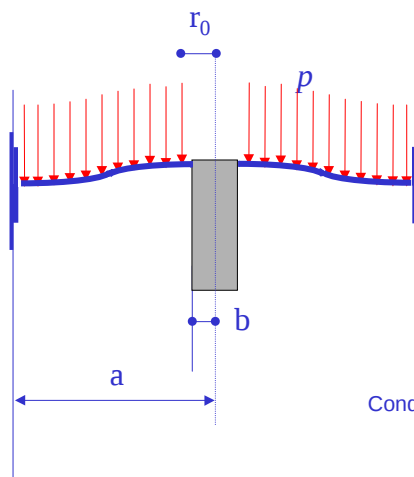
2° caso:
Pistone di un attuttore idraulico:
lastra di forma anulare soggetta a pressione uniforme con incastro al centro e rotazioni impedito all'esterno



Pressione uniforme

Lastre piane circolari

Applicazione:
pistone di un attuttore idraulico



Condizione di vincolo:
incastro interno
guida esterna

Condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} Q_a &= 0 \\ y_b &= 0 \\ \theta_a &= 0 \\ \theta_b &= 0 \end{aligned}$$

Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

Spostamento in funzione del raggio:

$$y = M_{rb} \frac{r^2}{4D} \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right) \right] +$$

$$+ Q_b \frac{r^3}{4D} \frac{b}{r} \left\{ \left[\left(\frac{b}{r} \right)^2 + 1 \right] \ln \left(\frac{r}{b} \right) + \left(\frac{b}{r} \right)^2 - 1 \right\}$$

$$- \frac{qr^4}{64D} \left\{ 1 + 4 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 5 \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 - 4 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left[2 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right\}$$

dove

$$M_{rb} = \frac{-qa^2}{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]} \left\{ \frac{b}{4a} \frac{\left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 - 1 + 2 \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right]}{2ab} (a^2 - r_0^2) - \frac{1}{16} \left[1 - \left(\frac{r_0}{a} \right)^4 - 4 \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \ln \left(\frac{a}{r_0} \right) \right] \right\}$$

$$Q_b = \frac{q}{2b} (a^2 - r_0^2)$$

Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

Rotazione in funzione del raggio:

$$\theta = M_{rb} \frac{r}{2D} \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right] + Q_b \frac{rb}{4D} \left[\left(\frac{b}{r} \right)^2 - 1 + 2 \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right] - \frac{qr^3}{D} \frac{1}{16} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^4 - 4 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right]$$

Momento radiale per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$M_r = M_{rb} \frac{1}{2} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right] + Q_b b \left\{ \frac{1 + \nu}{2} \ln \left(\frac{r}{b} \right) + \frac{1 - \nu}{4} \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right] \right\} +$$

$$- \frac{qr^2}{4} \left\{ 1 - \frac{1 - \nu}{4} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right] - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \left[1 + (1 + \nu) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \right\}$$

Momento circonferenziale per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$M_\theta = \frac{\theta D (1 - \nu^2)}{r} + \nu M_r$$

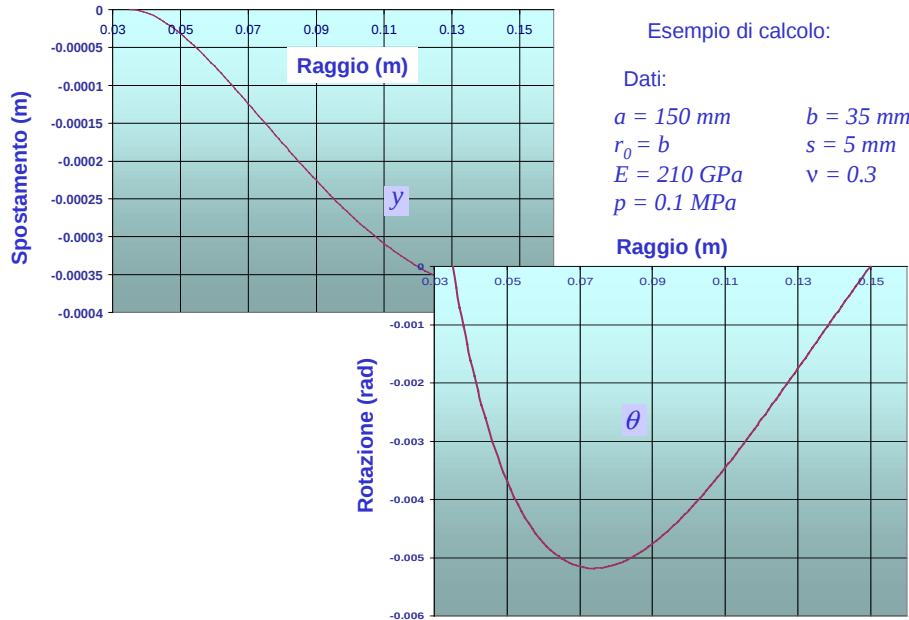
Taglio per unità di lunghezza in funzione del raggio:

$$Q = Q_b \frac{b}{r} - \frac{q}{2r} (r^2 - r_0^2)$$

Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

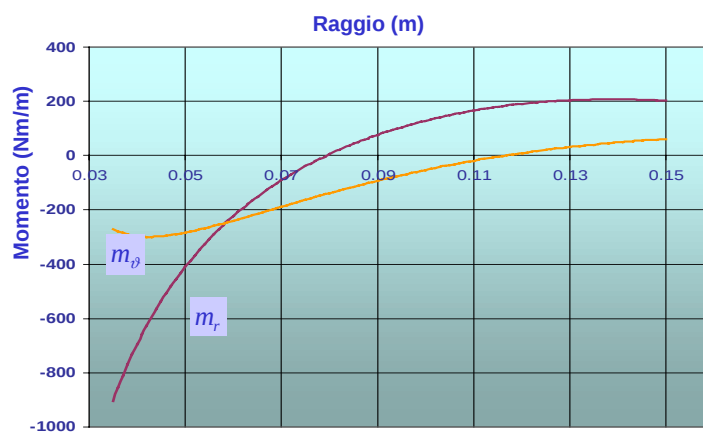
Andamento dello spostamento e della rotazione in funzione del raggio



Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

Andamento dei momenti flettenti in funzione del raggio

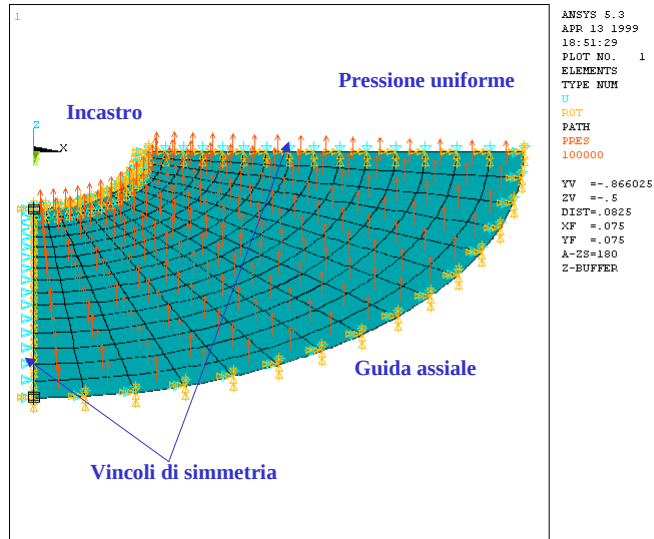


Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

Dati:

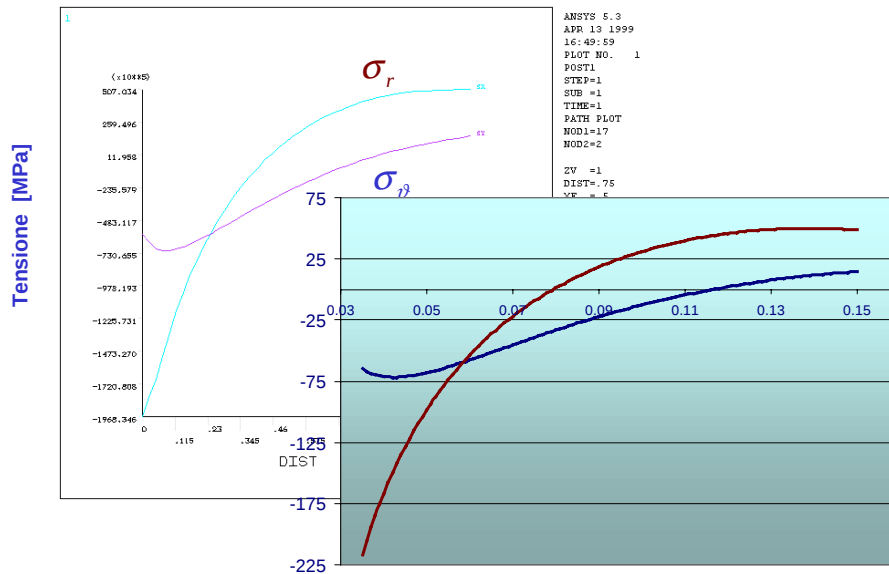
Modello ad elementi finiti $a = 150 \text{ mm}$ $b = 35 \text{ mm}$ $r_0 = b$ $s = 5 \text{ mm}$
 $E = 210 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$ $p = 0.1 \text{ MPa}$



Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

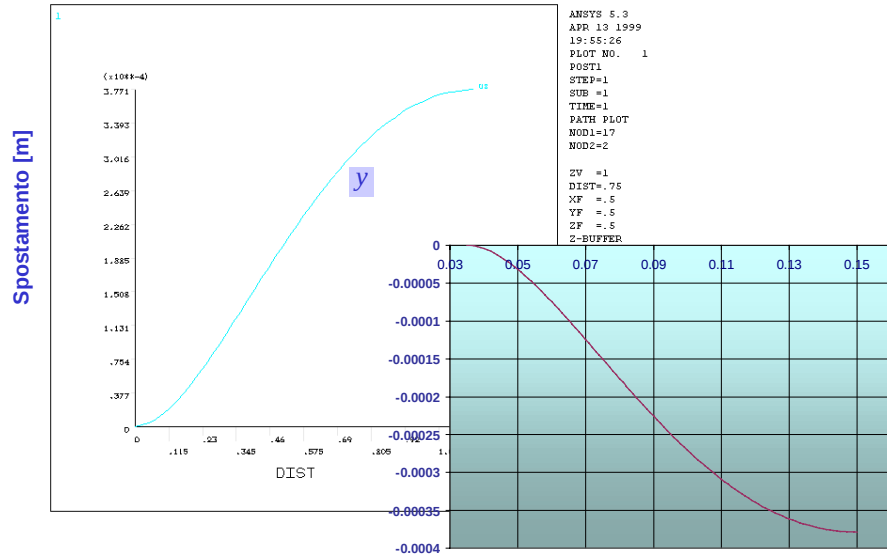
Confronto con il modello ad elementi finiti:



Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

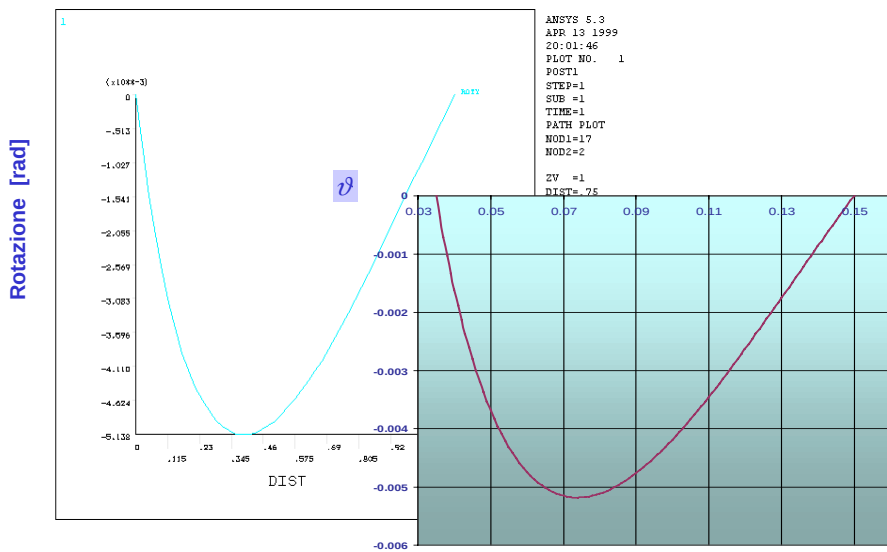
Spostamento assiale in funzione del raggio



Lastre piane circolari

Applicazione: pistone di un attuatore idraulico

Rotazione in funzione del raggio



Lastre piane circolari

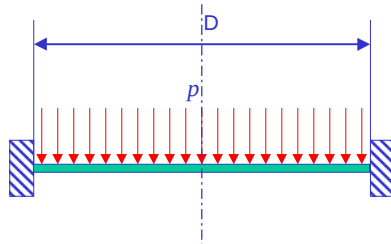
...ed ora provateci voi!

Un paio di esercizi. Contenti?

Lastre piane circolari

Esercizio n°1

Piastra incastrata al bordo esterno
soggetta a pressione uniforme



Dati: $D = 600 \text{ mm}$ $E = 200 \text{ GPa}$
 $p = 1 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$
 $s = 10 \text{ mm}$

Calcolare:

- 1) la massima tensione di von Mises
- 2) il massimo spostamento (freccia)

Nel caso di piastra incastrata
con pressione uniforme si ha:

$$\varphi = \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2)$$

$$\zeta = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2$$

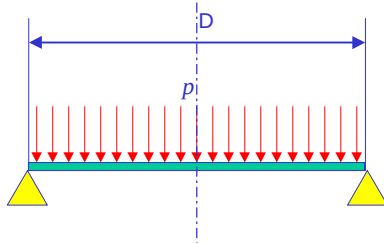
$$m_r = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2]$$

$$m_\vartheta = \frac{p}{16} [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

Lastre piane circolari

Esercizio n°2

Piastra appoggiata al bordo esterno
soggetta a pressione uniforme



Dati: $D = ?$ $E = 200 \text{ GPa}$
 $p = 1 \text{ MPa}$ $\nu = 0.3$
 $s = 10 \text{ mm}$

Calcolare:

- 1) il diametro D per il quale la freccia in questo caso è uguale a quella calcolata nel caso precedente
- 2) il rapporto tra le tensioni massime di von Mises nei due casi

$$\varphi = \frac{pr}{16D} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right)$$

Nel caso di piastra appoggiata
con pressione uniforme si ha:

$$\zeta = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2) \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right)$$

$$m_r = \frac{p}{16} (3+\nu) (R^2 - r^2)$$

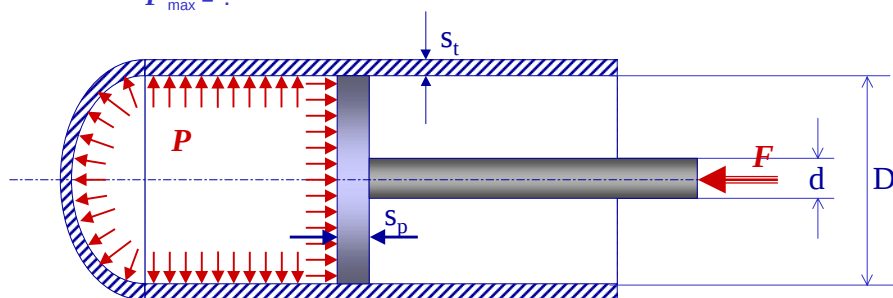
$$m_\theta = \frac{p}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2]$$

Lastre piane circolari

Esercizio n°3

Pistone di un attuatore idraulico

Dati: $D = 120 \text{ mm}$ $d = 30 \text{ mm}$ $s_p = 10 \text{ mm}$ $s_t = 5 \text{ mm}$
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 $\sigma_0 = 350 \text{ MPa}$
 $P_{\max} = ?$



Lastre piane circolari