

Introduzione al Calcolo Strutturale Matriciale

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta

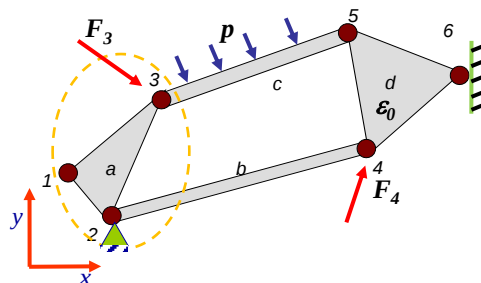
Per struttura discreta si intende un sistema meccanico composto da elementi strutturali caratterizzati da una propria individualità, connessi tra loro tramite un numero discreto di punti nodali.

I nodi possono essere soggetti a vincoli e a carichi concentrati. Eventuali carichi distribuiti possono essere applicati direttamente agli elementi costituenti.

Mediante il calcolo strutturale matriciale è possibile risolvere questa classe di problemi, sia per configurazioni isostatiche che iperstatiche.

In particolare, è possibile identificare la configurazione di equilibrio, le reazioni vincolari, lo stato di tensione e deformazione nei singoli componenti.

Tutto ciò esprimendo le grandezze in funzione degli **spostamenti nodali**, e a patto di conoscere le proprietà elastiche degli elementi costituenti.



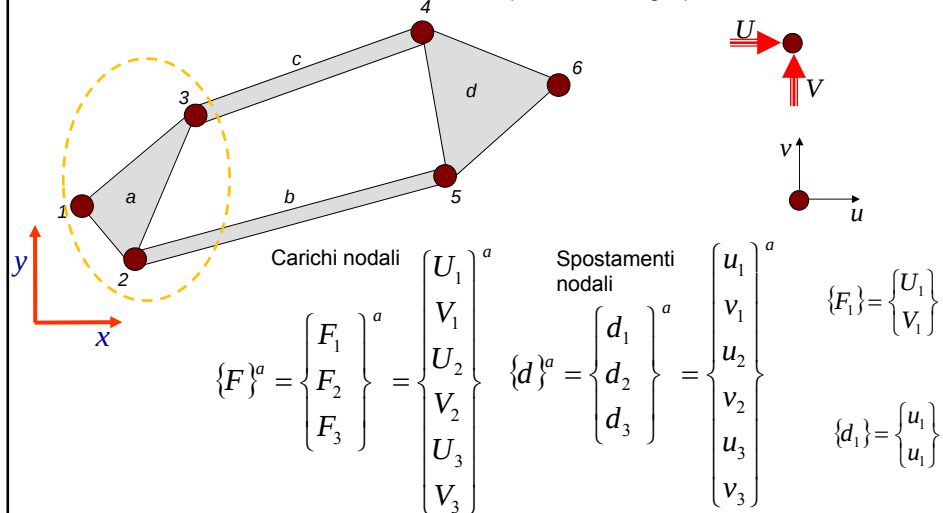
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta (esempio bidimensionale)

Elementi bidimensionali individuali interconnessi in punti nodali: 2 gdl per nodo



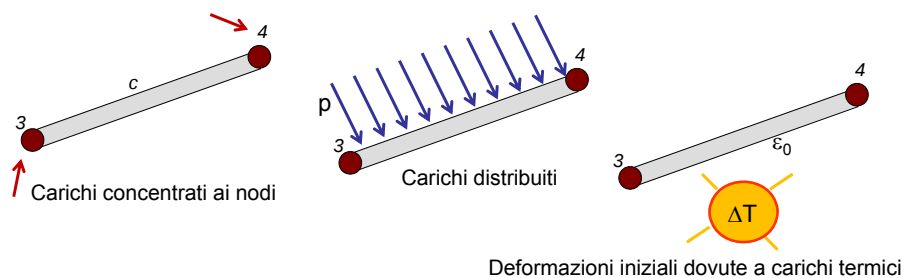
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta (esempio bidimensionale)

Carichi agenti sul generico elemento della struttura



Per risolvere il problema discreto, si parte dalla relazione che esprime la condizione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Struttura discreta: caso generale**

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

 $\{F\}^a$ Vettore delle forze agenti sui nodi

 $\{F\}_p^a$ Vettore delle forze nodali necessarie ad equilibrare i carichi distribuiti

 $\{F\}_{\varepsilon 0}^a$ Vettore delle forze nodali necessarie ad equilibrare le deformazioni iniziali

 $\{F\}_d^a = [K]^a \{d\}^a$ Vettore delle forze nodali necessarie a produrre lo spostamento elastico dei nodi descritto dal vettore $\{d\}^a$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Struttura discreta caso generale: vettori forza e spostamento**

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

 m = numero dei nodi di elemento l = numero dei gradi di libertà per nodo

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix}^a \quad \{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_m \end{Bmatrix}^a \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ \vdots \\ F_{il} \end{Bmatrix}$$

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ \vdots \\ d_{il} \end{Bmatrix}$$

Dunque i vettori
forza e spostamento
hanno in generale
 $m \times l$ elementi

N.B Le componenti di forza e spostamento sono "generalizzate", potendo trattarsi anche di momenti e rotazioni

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Struttura discreta caso generale: matrice di rigidezza di elemento**

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

 m = numero dei nodi di elemento l = numero dei gradi di libertà per nodo

$$[K]^a = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & \dots & K_{mj} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \quad [K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{ij_{11}} & \dots & K_{ij_{j1}} \\ \vdots & & \vdots \\ K_{ij_{i1}} & \dots & K_{ij_{il}} \end{bmatrix}$$

 $[K]^a$ Matrice di rigidezza di elemento, di dimensioni $ml \times ml$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Struttura discreta caso generale: matrice di rigidezza di elemento**

Significato dei termini della matrice di rigidezza di elemento

$$\{F\}_d^a = \begin{Bmatrix} F_{d_1} \\ \vdots \\ F_{d_i} \\ \vdots \\ F_{d_m} \end{Bmatrix}_d^a = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ij} & \dots & K_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & \dots & K_{mj} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_m \end{Bmatrix}_d^a = [K]^a \{d\}^a$$

Il generico termine K_{ij} consente di determinare la quota parte della *componente i-esima* della $\{F\}_d^a$ elastica che si genera qualora si imponesse la *j-esima* componente del vettore $\{d\}$, mantenendo nulli tutti gli altri spostamenti di elemento.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: funzioni di forma

Vettori forze e spostamenti di elemento

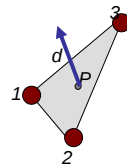
$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \quad \{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_m \end{Bmatrix} \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ \vdots \\ F_{il} \end{Bmatrix} \quad \{d_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ \vdots \\ d_{il} \end{Bmatrix}$$

m = numero dei nodi di elemento

l = numero dei gradi di libertà per nodo

Spostamento di un punto generico interno all'elemento

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{Bmatrix}$$



N.B. Anche il vettore f ha l componenti

$\{f\}$ come le sue componenti è funzione di x, y, z , coordinate di P all'interno dell'elemento considerato

$$\{f\} = \{f(x, y, z)\}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: funzioni di forma

Spostamento interno in funzione degli spostamenti nodali: le Funzioni di Forma

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{Bmatrix} = [N] \{d\}^a \longrightarrow \{f\} = [N_1 \quad \dots \quad N_i \quad \dots \quad N_m] \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ d_m \end{Bmatrix}$$

Dimensionalmente: $[N] = [l \times ml]$

Le matrici $[N]_i$, sono quadrate di dimensioni $l \times l$ e dipendono ancora dalle coordinate x, y, z del punto P considerato:

$$[N]_i = [N(x, y, z)]_i$$

Le funzioni di forma devono fornire l'appropriato spostamento nodale, quando riferite alla posizione corrispondente al nodo stesso. Ad esempio, in un caso a 2 g.d.l. per nodo ($l=2$):

$$[N(x_i, y_i, z_i)]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [N(x_j, y_j, z_j)]_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \forall j \neq i \quad j = 1..m$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: funzioni di forma

Le matrici $[N]_i$ possono essere scritte sempre come il prodotto di una funzione per la matrice identità:

$$[N] = \begin{bmatrix} [I] \cdot N'_1 & [I] \cdot N'_i & [I] \cdot N'_m \end{bmatrix} \quad [I] = [I \times I]$$

dove N'_j sono funzioni arbitrarie, note con il nome di funzioni di spostamento o di forma, le quali legano il campo degli spostamenti interni all'elemento al vettore degli spostamenti nodali.

N.B. Nel caso degli elementi monodimensionali, visti nella trattazione dei sistemi discreti, l'introduzione delle funzioni di forma non è indispensabile. Per l'identificazione di deformazioni e tensioni in funzione degli spostamenti nodali ci si avvale della teoria elementare della trave.

N.B. Per una trattazione più approfondita e dettagliata delle funzioni di forma, si veda la parte relativa all'elemento piano triangolare a 3 nodi.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

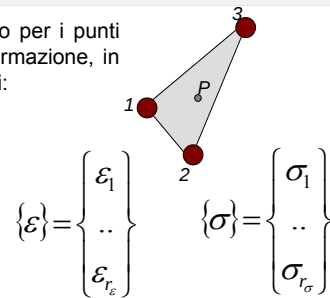
Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: tensioni e deformazioni di elemento

Per ogni punto P interno all'elemento discreto, o soltanto per i punti critici, è possibile descrivere il campo di tensione e deformazione, in funzione degli spostamenti nodali, mediante le espressioni:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}^a$$

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$



dimensionalmente:

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_\varepsilon \times m l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_\sigma \times r_\varepsilon \end{bmatrix}$$

Matrice di deformazione

Matrice di elasticità (è l'inverso del legame costitutivo!)

N.B. Nel caso più generale le componenti delle espressioni sono $f(x,y,z)$, coordinate di P all'interno dell'elemento considerato

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Elemento Asta nel piano

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

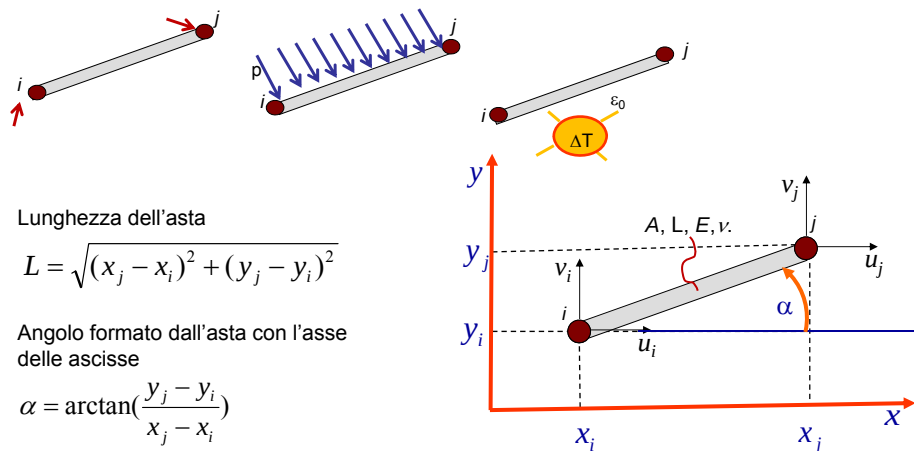
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Asta nel piano, di sezione uniforme A , lunghezza L . Parametri elastici del materiale E, ν . Asta "generalizzata", in grado di reagire a trazione-compressione per l'effetto dei carichi concentrati nodali e deformazioni iniziali, e a flessione, sotto l'azione dei carichi distribuiti.



L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

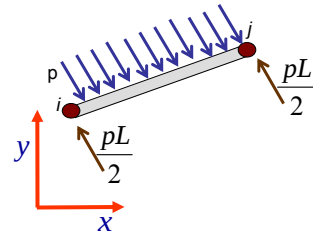
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon_0}^a$$

Forze nodali equivalenti ai carichi distribuiti:

$$\{F\}_p^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_p^a = \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ -\sin a \\ \cos a \end{Bmatrix}$$



L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

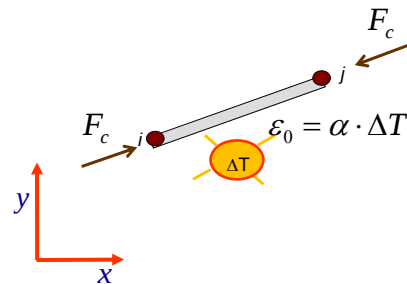
$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon_0}^a$$

Forze nodali che impediscono le deformazioni iniziali:

$$\varepsilon_0 = \alpha \Delta T \quad \sigma_0 = E \varepsilon_0$$

$$F_c = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0}^a = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} \cos a \\ \sin a \\ -\cos a \\ -\sin a \end{Bmatrix}$$



L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

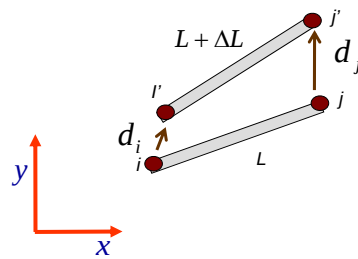
$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Spostamenti nodali

$$\{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Allungamento dell'asta

$$\Delta L = (u_j - u_i) \cos a + (v_j - v_i) \sin a$$



L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

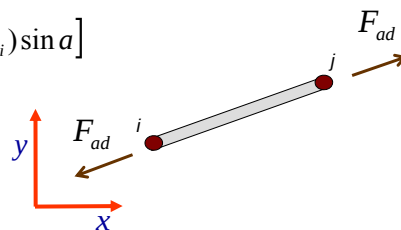
$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Forza assiale in grado di produrre l'allungamento ΔL

$$F_{ad} = A \cdot E \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{EA}{L} [(u_j - u_i) \cos a + (v_j - v_i) \sin a]$$

In componenti

$$\{F\}_d^a = \begin{Bmatrix} F_{d_i} \\ F_{d_j} \end{Bmatrix}_d = \begin{Bmatrix} -cF_{ad} \\ -sF_{ad} \\ cF_{ad} \\ sF_{ad} \end{Bmatrix}_d = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix}$$



L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Elemento asta generalizzata nel piano**

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

$$U_i = \frac{EA}{L} (+u_i c^2 + v_i s c - u_j c^2 - v_j s c)$$

$$V_i = \frac{EA}{L} (+u_i s c + v_i s^2 - u_j s c - v_j s^2)$$

$$U_j = \frac{EA}{L} (-u_i c^2 - v_i s c + u_j c^2 + v_j s c)$$

$$V_j = \frac{EA}{L} (-u_i s c - v_i s^2 + u_j s c + v_j s^2)$$

$$c = \cos a$$

$$s = \sin a$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Elemento asta generalizzata nel piano**

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

In notazione matriciale:

$$\{F\}_d^a = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & s c & -c^2 & -s c \\ s c & s^2 & -s c & -s^2 \\ -c^2 & -s c & c^2 & s c \\ -s c & -s^2 & s c & s^2 \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} = [K]^a \{d\}^a$$

$$K_{ij} = \frac{EA}{L} (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} c^2 & s c \\ s c & s^2 \end{bmatrix}$$

N.B. [K] è sempre simmetrica, conseguenza della conservazione dell'energia

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Elemento asta generalizzata nel piano**

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Per l'asta "generalizzata" si ha dunque:

$$\{F\}^a = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}^a \{d\}^a + \frac{pL}{2} \begin{Bmatrix} -s \\ c \\ -s \\ c \end{Bmatrix} + E\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Elemento asta generalizzata nel piano**

Deformazioni e tensioni massime e minime di elemento

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix} \{d\}^a + \frac{pL^2 z}{8EI} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} - \alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix} \{d\}^a + \frac{pL^2 z}{8I} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} - E\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

z semiampiezza della sezione trasversale dell'asta

N.B. L'asta "pura" si comporta solo come puntone, reagendo soltanto a trazione-compressione, e non a flessione. In tal caso non è possibile applicare carichi distribuiti. Tutte le espressioni relative all'asta generalizzata, si possono particolarizzare eliminando i contributi dovuti a tali carichi.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Elemento Trave nel piano (cenni)

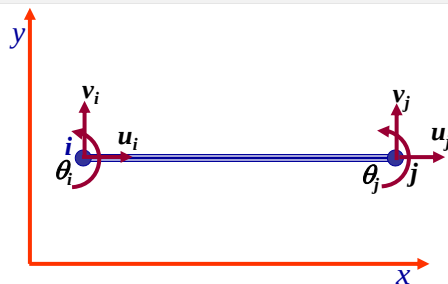
Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana



Tre gradi di libertà per nodo (nel piano)

Due nodi per elemento

Sei gradi di libertà per elemento

Matrice di rigidezza di elemento: 6 x 6

Vettore forze
nodali

$$\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ M_i \\ U_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}$$

Vettore
spostamenti
nodali

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

$$= [\mathbf{K}]$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana: Matrice di Rigidezza di Elemento, riferimento globale

La matrice di rigidezza 6 x 6 di un elemento trave nel piano è dunque:

$$[K] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} Ac^2 + \frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A - \frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s & -Ac^2 - \frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A + \frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s \\ \left(A - \frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2 + \frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c & \left(-A + \frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2 - \frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c \\ -\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 4J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 2J \\ -Ac^2 - \frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A + \frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s & Ac^2 + \frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A - \frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s \\ \left(-A + \frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2 - \frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c & \left(A - \frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2 + \frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c \\ -\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 2J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 4J \end{bmatrix}$$

Per calcolarla è necessario conoscere la caratteristica elastica del materiale e i dati geometrici dell'elemento:

L = lunghezza

A = area della sezione

J = Momento d'inerzia della sezione

E = Modulo di Young

$$\alpha = \arctan \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana: stato di deformazione e tensione nell'elemento

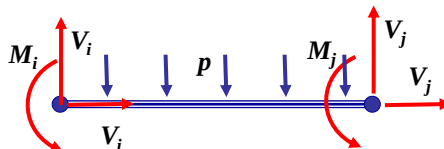
Vettori deformazione e tensione nell'elemento

$$\{\varepsilon\} = ?$$

$$\{\sigma\} = ?$$

La loro identificazione è più complessa rispetto al caso già visto dell'asta, dal momento che non è possibile determinare a priori sezioni e punti critici.

Essi dipendono infatti dalle caratteristiche di sollecitazione agenti sull'elemento: si avrà quindi in generale $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon(x)\}$, $\{\sigma\} = \{\sigma(x)\}$, con x orientata come l'asse della trave.



Nella configurazione di equilibrio, per ogni sezione individuata dall'ascissa x , sono note le caratteristiche di sollecitazione agenti (già esprimibili in termini di spostamenti nodali una volta determinata la matrice di rigidezza $[K]$), e gli eventuali carichi distribuiti e deformazioni iniziali. E' pertanto possibile identificarne gli effetti (in campo elastico vale anche il p.s.e, per cui si possono valutare un effetto alla volta e poi sommarli), utilizzando la teoria della trave.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)