

Assemblaggio degli Elementi: Soluzione del Problema Strutturale Discreto

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Assemblaggio degli elementi: matrice di struttura

Per ottenere la soluzione del problema statico relativo alle strutture discrete, bisogna considerare l'equilibrio di tutti i nodi che compongono la struttura stessa. Si otterrà un sistema di equazioni (lineari per il problema elastico), con incognite gli spostamenti nodali. Una volta risolto tale sistema, e quindi identificati gli spostamenti incogniti di tutti i nodi componenti la struttura, sarà possibile identificare le reazioni vincolari, e gli stati di tensione e deformazione in seno agli elementi.

La struttura la consideriamo caricata da forze esterne applicate ai nodi, che si aggiungono ai carichi distribuiti direttamente applicati ai singoli elementi

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_i \\ \dots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad \{R_i\} = \begin{Bmatrix} R_{i1} \\ \dots \\ R_{il} \end{Bmatrix} \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_n \end{Bmatrix}$$

n = numero dei nodi di **struttura**
 l = numero dei gradi di libertà per nodo (ogni forza ha un numero di componenti pari ai g.d.l. dei nodi)

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale
Assemblaggio degli elementi: matrice di struttura

Condizione di equilibrio del generico nodo i -esimo della struttura: la somma delle forze esterne agenti sul nodo e delle forze esercitate dagli elementi confluenti nel nodo deve essere nulla.

$$\{R_i\} = \sum_a \{F_i\}^a \quad \text{sarebbe: } \left(- \sum_a \{F_i\}^a + \{R_i\} = 0 \right)$$

La sommatoria conviene estenderla anche agli elementi non confluenti nel nodo, che chiaramente forniranno un contributo nullo

Conviene anche espandere alle dimensioni di struttura la matrice di rigidezza di elemento, e i vettori forze nodali equivalenti ai carichi distribuiti e alle deformazioni iniziali di elemento

$$[K]^a = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{nm} \end{bmatrix} \quad ([nl \times nl]) \quad \{F\}_p^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad \{F\}_{\varepsilon_0}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale
Assemblaggio degli elementi: matrice di struttura

Condizione di equilibrio del nodo i -esimo

$$\{R_i\} = \sum_a \left(\sum_{j=1}^n [K_{ij}]^a \{d_j\} \right) + \sum_a \{F_i\}_p^a + \sum_a \{F_i\}_{\varepsilon_0}^a = \sum_{j=1}^n \left(\sum_a [K_{ij}]^a \right) \{d_j\} + \sum_a \{F_i\}_p^a + \sum_a \{F_i\}_{\varepsilon_0}^a$$

Condizione di equilibrio di tutti i nodi della struttura, notazione matriciale

$$\{R\} = [K]\{d\} + \{F\}_p + \{F\}_{\varepsilon_0}$$

$[K]$ matrice di rigidezza di struttura
n.b. $[K_{ij}]^a \neq 0 \Leftrightarrow i, j \in a$

$$[K_{ij}] = \sum_a [K_{ij}]^a$$

$$\{F_i\}_p = \sum_a \{F_i\}_p^a$$

$$\{F_i\}_{\varepsilon_0} = \sum_a \{F_i\}_{\varepsilon_0}^a$$

Tutti preventivamente espansi alle dimensioni di struttura

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale**

Sistema di $n \times 1$ equazioni lineari, con incognite $n \times 1$ spostamenti nodali

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0}$$

Il calcolo strutturale matriciale si traduce nella soluzione di tale sistema.

Osservazioni:

- Il sistema è indeterminato fintanto che non si prescrivono ai nodi della struttura un numero di vincoli atti ad impedire il moto rigido. Il che equivale a prescrivere un certo numero minimo di spostamenti imposti (nulli o non). Di fatto senza vincoli la struttura non è in equilibrio. Matematicamente ciò si traduce nella singolarità della matrice di rigidezza di struttura $[K]$.

- Imporre vincoli fa nascere le corrispondenti reazioni vincolari, in numero pari ai gradi di libertà vincolati. Esse diventano nuove incognite del problema, al posto degli spostamenti prescritti ora noti.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale**

Sistema di $n \times 1$ equazioni lineari, con incognite gli spostamenti nodali

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0}$$

- Nel caso di vincoli rigidi, cioè spostamenti nulli dei nodi vincolati, per risolvere il sistema è sufficiente eliminare nel sistema le righe e colonne relative ai gradi di libertà vincolati. Una volta trovata la soluzione del sistema rimanente (la nuova matrice di rigidezza non è più singolare, e quindi risulta invertibile), e quindi individuato il vettore $\{d\}$ incognito, le righe eliminate serviranno per ricavare le reazioni dei nodi soggetti a vincoli.

- Nel caso di spostamenti prescritti non nulli, si procede in modo analogo: se fosse noto lo spostamento $\{d_j\}$, ad esempio, si potrebbe accantonare la riga j -esima, e in tutte le altre equazioni considerare noto il termine $[K_{ij}]\{d_j\}$. Lo si può anche spostare a termine noto come $-[K_{ij}]\{d_j\}$. Risolto il sistema rimanente, la j -esima riga servirà per il calcolo della reazione incognita $\{R_j\}$.

N.B. Quanto detto vale sia per uno spostamento nodale completo, descritto dal generico sottovettore $\{d_j\}$, ma anche per una singola componente (ex: u_j).

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale
Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale

Iter di soluzione del problema elastico strutturale discreto (piano, in questo esempio)

1: Identificazione elementi e connettività

Elementi	Nodi di Connessione
a	1,2,3
b	2,4
c	3,5
d	4,5,6

2: Identificazione delle proprietà elastiche di ogni elemento: E , ν .

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale
Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale

3: Identificazione della matrice di rigidezza di elemento $[K]^a$ e dei carichi nodali equivalenti ai carichi distribuiti e alle deformazioni iniziali $\{F\}_p^a, \{F\}_{\epsilon_0}^a$ per ogni elemento: ciò consente di ottenere la relazione di equilibrio di elemento $\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\epsilon_0}^a$

4: Trasferimento delle informazioni di elemento di cui al punti 3, qualora calcolate in un riferimento locale, nel sistema globale, mediante matrici di trasformazione, per consentire l'assemblaggio della struttura.

5: Espansione alle dimensioni di struttura delle matrici di rigidezza di elemento e assemblaggio della matrice di struttura (6x6 sottomatrici 2x2 nell'esempio in esame)

$$[K]^a + [K]^b + [K]^c + [K]^d = [K]$$

N.B. In generale la $[K]$ è una matrice bandata

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale**

6: Espansione alle dimensioni di struttura e assemblaggio delle: $\{F\}_p^a, \{F\}_{\varepsilon_0}^a$

$$\{F\}_p^a + \{F\}_p^b + \{F\}_p^c + \{F\}_p^d = \{F\}_p$$

7: Assemblaggio finale del sistema:

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0}$$

In questo sistema i carichi concentrati sulla struttura rientrano in $\{R\}$, quelli distribuiti in $\{F\}_p$ mentre i vincoli figurano in $\{d\}$ come componenti note. Per il problema elastico il sistema è lineare

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale**Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale**

8: Trattamento dei vincoli: eliminazione righe e colonne del sistema di cui al punto 7 (altrimenti indeterminato) corrispondenti ai gradi di libertà vincolati.

9: Soluzione del sistema di cui al punto 7, con tecniche di analisi numerica. Si ottengono gli spostamenti $\{d\}$. Riprendendo le equazioni eliminate al punto 8, si determinano le reazioni dei gradi di libertà vincolati

10: Noto $\{d\}$, in base alle specifiche formulazioni di elemento, si può identificare il campo di tensione e deformazione $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$, per ogni punto in seno ai singoli elementi

N.B. Tutto quanto esposto finora è valido per strutture discrete. Si vedrà in seguito come estendere i concetti a strutture continue, passando al vero e proprio *Metodo degli Elementi Finiti*.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)