

## *Il Metodo degli Elementi Finiti*

*Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci*

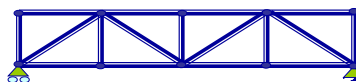
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### *Il Metodo degli Elementi Finiti*

#### **Introduzione**

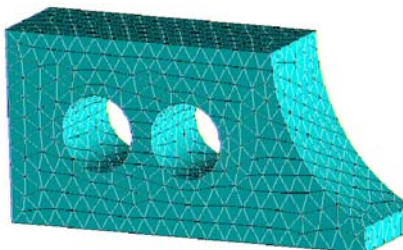
In alcune strutture la divisione in porzioni elementari, facilmente schematizzabili, discende immediatamente dal disegno e dalla tecnologia utilizzata per la costruzione.



Le caratteristiche di rigidezza dei vari elementi sono facilmente ricavabili dai modelli strutturali degli elementi (barre assiali, travi)

Molto spesso, invece, particolarmente nei componenti meccanici, la struttura è un continuo tridimensionale, che non presenta una preferenziale suddivisione in elementi.

In questi casi si può immaginare comunque di dividere la struttura in un numero finito di elementi, ognuno dei quali sarà caratterizzato da un certo numero di punti nodali nei quali definire le grandezze cinematiche e dinamiche. La rigidezza della struttura dipende dalle caratteristiche elastiche del materiale e dalla cinematica dei singoli elementi.



L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

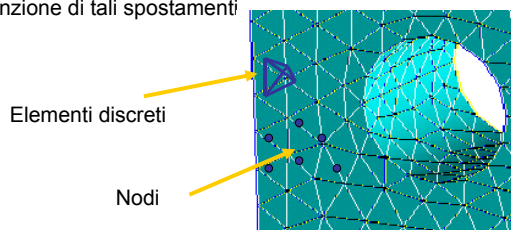
## Il Metodo degli Elementi Finiti

### Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

L'idea è di ricondursi al caso già visto del calcolo strutturale matriciale, mediante le seguenti ipotesi di lavoro:

- Si rappresenta il continuo tramite un numero discreto di elementi finiti, connessi tra loro in un numero discreto di punti nodali lungo il contorno. (approssimazione: la connessione tra porzioni di continuo è nella realtà su infiniti punti e non in pochi punti discreti). Gli spostamenti nodali saranno ancora le incognite del problema, e tutte le grandezze di interesse verranno espresse in funzione di tali spostamenti



L.Cortese

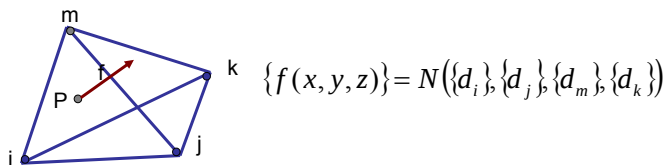
Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

## Il Metodo degli Elementi Finiti

### Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

- Un insieme appropriato di funzioni viene scelto per descrivere il campo di spostamenti in seno al singolo elemento in funzione degli spostamenti nodali: funzioni di forma (approssimazione, legata alla scelta arbitraria delle funzioni di forma. In aggiunta, queste dovrebbero assicurare i requisiti di continuità degli spostamenti (congruenza) e delle deformazioni. Non sempre è possibile soddisfare tali condizioni).



P punto generico di coordinate x,y,z interno all'elemento.  
 $\{f\}$  spostamento del punto P

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

## Il Metodo degli Elementi Finiti

### Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

- Dal campo di spostamento definito sopra, è possibile ricavare il campo di deformazione corrispondente, sempre in seno all'elemento. Noto il campo di deformazione, si risale al campo di tensione, assunto il legame costitutivo del materiale e tenuto conto anche di eventuali deformazioni iniziali e tensioni residue.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\quad} [D], \{\varepsilon_0\}, \{\sigma_0\} \xrightarrow{\quad} \{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

L.Cortese

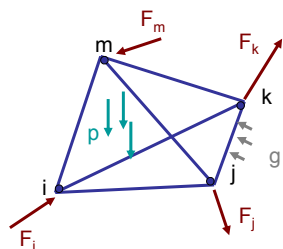
Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

## Il Metodo degli Elementi Finiti

### Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

- Si determina un sistema di forze concentrate ai nodi che faccia equilibrio alle tensioni sul contorno e ad ogni carico distribuito nell'elemento. (approssimazione: concentrando le forze ai nodi, la condizione di equilibrio statico è verificata soltanto globalmente.)



Si cerca cioè ancora una relazione di equilibrio di elemento del tipo:

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e + \dots$$

determinando  $[K]^e, \{F\}_p^e, \{F\}_{\varepsilon_0}^e$  tramite opportune relazioni dipendenti dal tipo di elemento

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

Con queste ipotesi, il problema è ricondotto al caso del calcolo strutturale matriciale. Si può cioè scrivere la condizione di equilibrio per ogni elemento:

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e + \dots$$

Successivamente la condizione di equilibrio viene imposta a livello di struttura (discreta):

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon 0} - \dots$$

La soluzione segue infine l'iter già visto per i sistemi discreti

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### La convergenza del metodo, approssimazioni legate alle ipotesi di lavoro

Cercando di rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti di dimensioni finite si introducono le seguenti approssimazioni:

- la connessione tra porzioni di continuo è nella realtà su infiniti punti e non in pochi punti discreti.
- concentrando le forze ai nodi, la condizione di equilibrio statico è verificata soltanto globalmente.
- la scelta arbitraria delle funzioni di forma non garantisce che gli spostamenti veri in seno ai singoli elementi siano descritti accuratamente. In aggiunta, queste dovrebbero assicurare i requisiti di continuità degli spostamenti (congruenza) e delle deformazioni.

Al decrescere delle dimensioni degli elementi discreti (con  $h$  la dim. media di elem.) tali approssimazioni si riducono. Si può dimostrare che sotto opportune ipotesi (riguardanti le funzioni di forma ed altro..), il metodo degli elementi finiti converge alla soluzione esatta quando  $h \rightarrow 0$ .

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### *Il Metodo degli Elementi Finiti*

#### La convergenza del metodo, l'importanza della scelta delle funzioni di forma

La precisione del metodo dipende fortemente da come le funzioni di forma riescono a descrivere il campo di spostamenti reale. Esse sono scelte in maniera arbitraria e introducono una approssimazione qualora il campo vero di spostamenti non sia descrivibile mediante la formulazione analitica adottata. L'errore si riduce al decrescere della dimensione dell'elemento

Per assicurare la convergenza del metodo al risultato corretto, si dimostra che le funzioni di forma devono essere scelte in base ai seguenti criteri:

- 1) devono essere in grado di rappresentare correttamente i moti rigidi: in tali casi non devono generare deformazioni nell'elemento;
- 2) devono essere in grado di riprodurre la condizione di campo uniforme di deformazione all'interno dell'elemento;
- 3) le deformazioni in corrispondenza della separazione tra gli elementi possono presentare una discontinuità ma questa deve essere finita (ciò corrisponde alla condizione che gli spostamenti siano continui tra elementi contigui, ovvero che le funzioni di spostamento siano  $C_0$  in corrispondenza della separazione. Ci sono inoltre classi di elementi che richiedono che gli spostamenti siano  $C_1$ ).

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Problemi piani:

#### L'elemento triangolare a 3 nodi

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

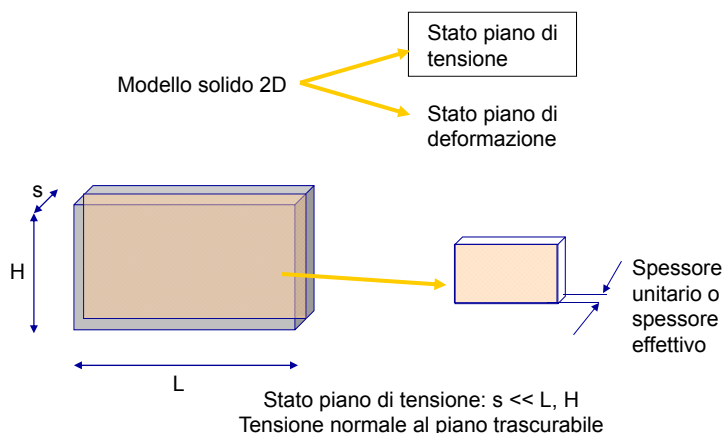
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elementi bidimensionali: stato di tensione piana

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo bidimensionale, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



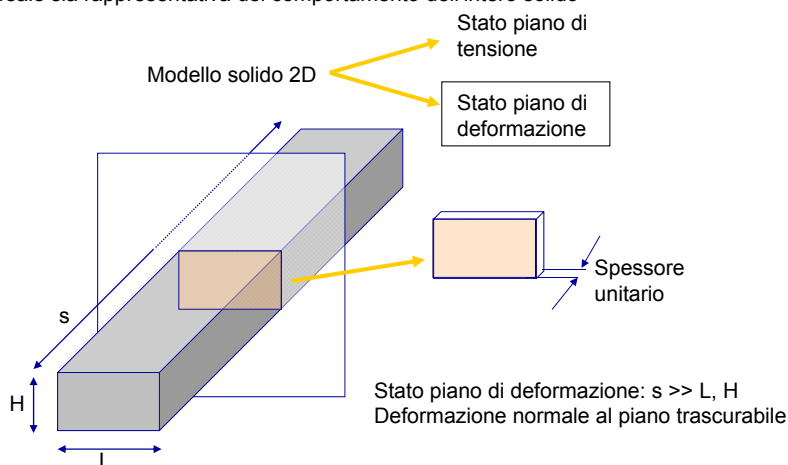
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elementi bidimensionali: stato di deformazione piana

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo bidimensionale, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



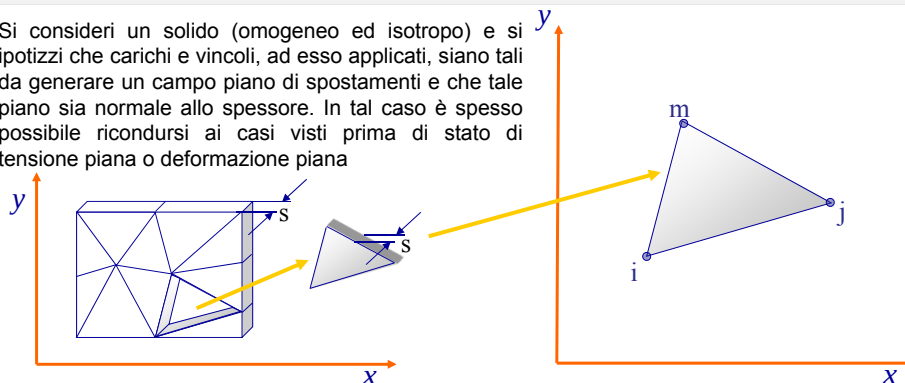
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi

Si consideri un solido (omogeneo ed isotropo) e si ipotizzi che carichi e vincoli, ad esso applicati, siano tali da generare un campo piano di spostamenti e che tale piano sia normale allo spessore. In tal caso è spesso possibile ricondursi ai casi visti prima di stato di tensione piana o deformazione piana



In queste condizioni è possibile rappresentare il comportamento strutturale del solido con un modello piano. Si divide il solido in una serie di elementi triangolari, di dimensioni finite.

Si immagini ora di estrarre uno di tali triangoli dal continuo e di studiare il suo comportamento riferendolo ad un sistema di coordinate cartesiane.

Per le ipotesi e le assunzioni fatte l'elemento può solo spostarsi, deformandosi, sul piano  $x y$ .

Ogni suo punto ha quindi due componenti di spostamento, che indicheremo come  $u$  e  $v$ .

L.Cortese

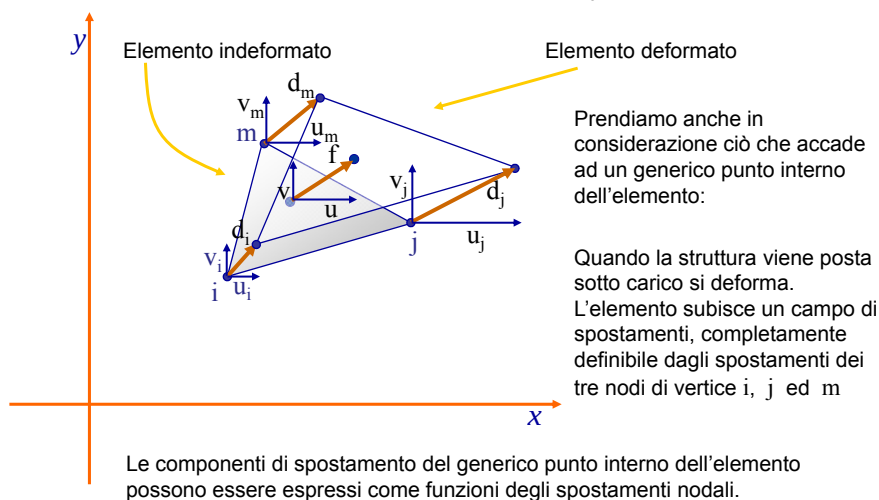
Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi

Consideriamo quindi l'elemento  $e$ , dotato di spessore  $s$ , nel piano  $x y$ .

L'elemento è un triangolo di vertici  $i, j, m$



Prendiamo anche in considerazione ciò che accade ad un generico punto interno dell'elemento:

Quando la struttura viene posta sotto carico si deforma. L'elemento subisce un campo di spostamenti, completamente definibile dagli spostamenti dei tre nodi di vertice  $i, j$  ed  $m$

Le componenti di spostamento del generico punto interno dell'elemento possono essere espressi come funzioni degli spostamenti nodali.

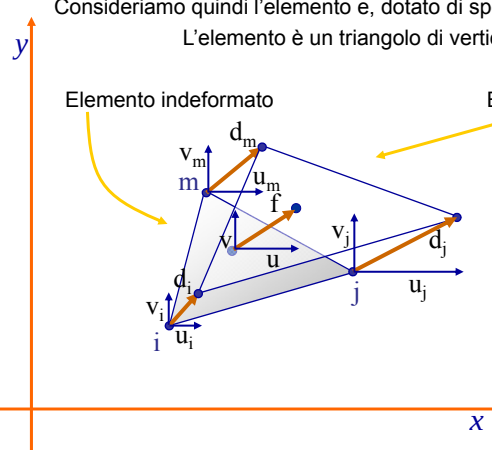
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Consideriamo quindi l'elemento  $e$ , dotato di spessore  $s$ , nel piano  $x-y$ .  
L'elemento è un triangolo di vertici  $i, j, m$ .



Indichiamo con  $\{f\}$  il vettore degli spostamenti di un generico punto interno.  
Le componenti del vettore  $\{f\}$  sono  $u$  e  $v$ :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$\{f\}$  dipende dal vettore degli spostamenti nodali di elemento  $\{d\}^e$  tramite una matrice  $[N]$  che contiene le funzioni di spostamento:

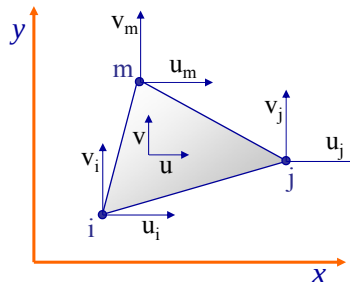
$$\{f\} = [N]\{d\}^e$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma



Nel caso di elemento piano a tre nodi

$$l = 2$$

$$m = 3$$

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e \longrightarrow \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

$[N]_i$ ,  $[N]_j$  ed  $[N]_m$  sono quadrate di dimensioni  $2 \times 2$

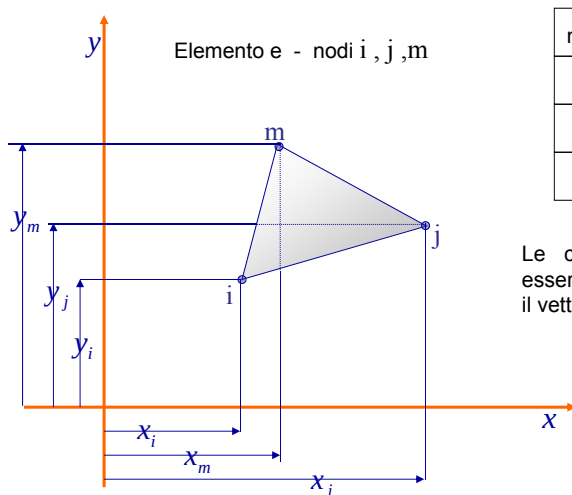
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le funzioni  $N_i$ ,  $N_j$  ed  $N_m$  dipenderanno dalle coordinate nodali dell'elemento



| nodo | coordinate      |
|------|-----------------|
|      | $x_i \quad y_i$ |
| $j$  | $x_j \quad y_j$ |
| $m$  | $x_m \quad y_m$ |

Le coordinate nodali devono essere note per poter calcolare il vettore degli spostamenti.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

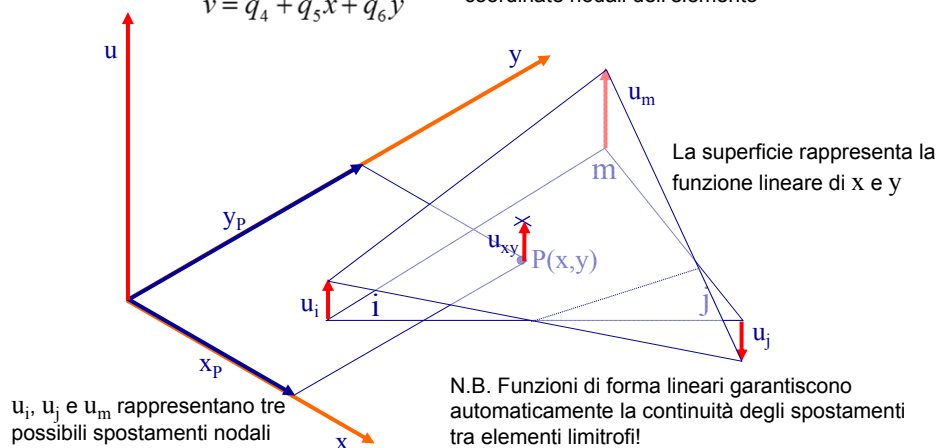
#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le più semplici funzioni di spostamento che possono essere pensate sono di tipo lineare:

$$u = q_1 + q_2x + q_3y$$

$$v = q_4 + q_5x + q_6y$$

Essendo q sei costanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento



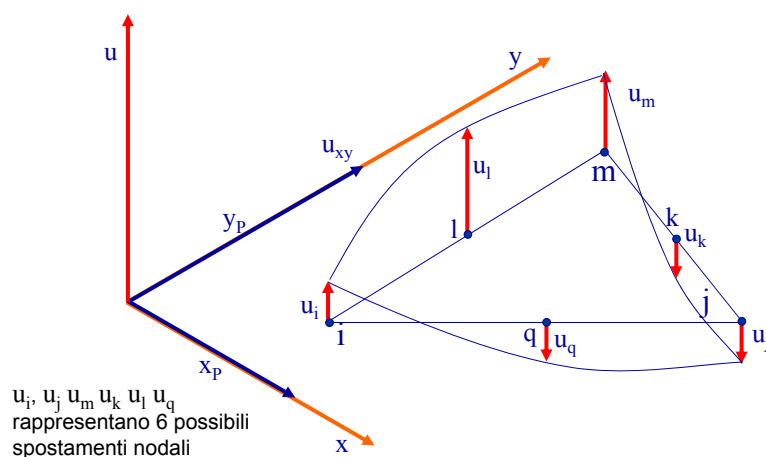
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Adottando una funzione di grado superiore si avrebbe una superficie più complessa e la sua definizione richiederebbe un maggior numero di punti nodali



L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le costanti possono essere calcolate imponendo che le funzioni di spostamento assumano nei nodi esattamente il valore dello spostamento nodale.

$$u_i = q_1 + q_2 x_i + q_3 y_i$$

$$v_i = q_4 + q_5 x_i + q_6 y_i$$

$$u_j = q_1 + q_2 x_j + q_3 y_j$$

$$v_j = q_4 + q_5 x_j + q_6 y_j$$

$$u_m = q_1 + q_2 x_m + q_3 y_m$$

$$v_m = q_4 + q_5 x_m + q_6 y_m$$

Ne derivano 2 sistemi, di 3 equazioni in 3 incognite, che consentono di calcolare i valori delle  $q$ .

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le relazioni precedenti possono scriversi in forma matriciale come segue:

ed in modo più compatto:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I]N'_i & [I]N'_j & [I]N'_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = [N]\{d\}$$

Si ricorda che le funzioni di spostamento dipendono dalle coordinate del punto interno all'elemento e dalle coordinate dei nodi mediante le costanti  $a_k, b_k, c_k$  e  $\Delta$ :

$$N'_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

$$2\Delta = x_j y_m - x_m y_j - x_i \cdot (y_m - y_j) + y_i \cdot (x_m - x_j)$$

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ a_j = x_m y_i - x_i y_m \\ a_m = x_i y_j - x_j y_i \end{cases} \quad \begin{cases} b_i = y_j - y_m \\ b_j = y_m - y_i \\ b_m = y_i - y_j \end{cases} \quad \begin{cases} c_i = x_m - x_j \\ c_j = x_i - x_m \\ c_m = x_j - x_i \end{cases}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Sia nell'ipotesi di stato di tensione piana che di deformazione piana i vettori delle deformazioni e delle tensioni possono scriversi

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

N.b. Nello stato di tensione piana la  $\varepsilon_z$  non è nulla, ma non contribuisce all'energia elastica di deformazione essendo  $\sigma_z=0$  per ipotesi. Verrà per ora trascurata nella trattazione. Si può comunque calcolare a posteriori tramite  $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ . Stesso ragionamento può ripetersi per la  $\sigma_z$  nel caso di stato di deformazione piana.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione**

Legame tra le componenti della deformazione e spostamenti nodali, in forma matriciale:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{d\}^e \quad \{\varepsilon\} = [B] \{d\}^e$$

La matrice di deformazione  $[B]$  ha dimensioni  $l \times (l \times m)$ , nel caso in esame  $3 \times 6$ , e può essere divisa in tre sottomatrici  $3 \times 2$  del tipo:

$$[B_k] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad \text{per } k=i,j,m$$

N.B. Nel caso dell'elemento piano a 3 nodi i termini della matrice  $[B]$  sono costanti, infatti non contengono le variabili  $x,y$ . La deformazione è descritta come costante in tutto l'elemento. Ciò introduce una approssimazione importante nel rappresentare elevati gradienti di deformazione.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione**

La deformazione appena calcolata, in funzione degli spostamenti nodali è quella totale. Per calcolare correttamente lo stato di tensione, è necessario sottrarre alla deformazione totale eventuali deformazioni iniziali, quali ad esempio, le dilatazioni termiche:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{x0} \end{Bmatrix} = \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{valida nel caso di stato piano di tensione}$$

$$\text{oppure:} \quad \{\varepsilon_0\} = (1 + \nu) \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{valida nel caso di stato piano di deformazione}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità  $[D]$  per lo stato piano di tensione

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Stato piano di  
tensione

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Stato piano di  
deformazione

Le matrici  $[D]$  per lo stato piano di tensione e per lo stato di deformazione piana si ottengono invertendo le relative relazioni di Hooke, ovvero ricavando le  $\sigma$  in funzione delle  $\varepsilon$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Relazione di equilibrio di elemento

La relazione che esprime la condizione di equilibrio dell'elemento nel continuo si può ricavare chiamando in causa il principio dei lavori virtuali

$\{F\}^e$  vettore delle forze esterne agenti sull'elemento, applicate direttamente ai nodi:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \quad \{F_i\}^e = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ \vdots \\ F_{in} \end{Bmatrix}$$

N.B. In questo caso  $\{F\}^e$  rappresenta le forze nodali che sono staticamente equivalenti alle tensioni  $\{\sigma\}$  realmente agenti sul contorno dell'elemento.

$\{p\}$  vettore dei carichi distribuiti per unità di volume, ad esempio dovuto ad azioni inerziali:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

La condizione di equilibrio tra le forze esterne e le reazioni interne, dovute allo stato tensionale, si ricava tramite il principio dei lavori virtuali

Supponendo l'elemento in equilibrio, imponendo un campo di arbitrari spostamenti virtuali il lavoro compiuto dalle forze esterne deve eguagliare quello compiuto dalle forze interne

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

# Il Metodo degli Elementi Finiti

## Relazione di equilibrio di elemento

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$



$\{d^*\}^e$  campo di spostamenti virtuali.

Lo spostamento interno virtuale e la deformazione conseguente al campo di spostamenti virtuali sono date dai vettori:

$$\{f^*\} = [N]\{d^*\}^e \rightarrow \{f^*\}^T = [\{d^*\}^e]^T [N]^T$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{d^*\}^e$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_e = [\{d^*\}^e]^T \{F\}^e + \int_V \{f^*\}^T \{p\} dV = [\{d^*\}^e]^T \left( \{F\}^e + \int_V [N]^T \{p\} dV \right)$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle tensioni interne vale:

$$\mathcal{L}_i = \int_V [\{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = [\{d^*\}^e]^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

Uguagliando i lavori si ottiene:

$$[\{d^*\}^e]^T \left( \{F\}^e + \int_V [N]^T \{p\} dV \right) = [\{d^*\}^e]^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

# Il Metodo degli Elementi Finiti

## Relazione di equilibrio di elemento

~~$$[\{d^*\}^e]^T \left( \{F\}^e + \int_V [N]^T \{p\} dV \right) = [\{d^*\}^e]^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$~~

eliminando lo spostamento virtuale d'elemento si ottiene:

Ricordando le relazioni:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\}^e$$

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{\sigma\} = [D] ([B]\{d\}^e - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{F\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV$$

$$\{F\}^e = \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{d\}^e - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = \left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{d\}^e - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV$$

Questa relazione è del tipo:  $\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e + \{F\}_{\sigma_0}^e + \{F\}_p^e$

In conclusione si può scrivere:

$$[K]^e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{Matrice di rigidezza di elemento}$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV \quad \text{Forze nodali equivalenti alla deformazione iniziale (dilatazione termica)}$$

$$\{F\}_{\sigma_0}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad \text{Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (tensioni residue)}$$

$$\{F\}_p^e = - \int_V [N]^T \{p\} dV \quad \text{Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (pressioni, forze di massa)}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

### Il Metodo degli Elementi Finiti

#### Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

La matrice di rigidezza di elemento completa

$$[K]^e = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t}{4\Delta} \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_i b_i + \frac{1-\nu}{2} c_i c_i & \nu b_i c_i + \frac{1-\nu}{2} c_i b_i & b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} c_i c_j & \nu b_i c_j + \frac{1-\nu}{2} c_i b_j & b_i b_m + \frac{1-\nu}{2} c_i c_m & \nu b_i c_m + \frac{1-\nu}{2} c_i b_m \\ \nu c_i b_i + \frac{1-\nu}{2} b_i c_i & c_i c_i + \frac{1-\nu}{2} b_i b_i & \nu c_i b_j + \frac{1-\nu}{2} b_i c_j & c_i c_j + \frac{1-\nu}{2} b_i b_j & \nu c_i b_m + \frac{1-\nu}{2} b_i c_m & c_i c_m + \frac{1-\nu}{2} b_i b_m \\ b_j b_i + \frac{1-\nu}{2} c_j c_i & \nu b_j c_i + \frac{1-\nu}{2} c_j b_i & b_j b_j + \frac{1-\nu}{2} c_j c_j & \nu b_j c_j + \frac{1-\nu}{2} c_j b_j & b_j b_m + \frac{1-\nu}{2} c_j c_m & \nu b_j c_m + \frac{1-\nu}{2} c_j b_m \\ \nu c_j b_i + \frac{1-\nu}{2} b_j c_i & c_j c_i + \frac{1-\nu}{2} b_j b_i & \nu c_j b_j + \frac{1-\nu}{2} b_j c_j & c_j c_j + \frac{1-\nu}{2} b_j b_j & \nu c_j b_m + \frac{1-\nu}{2} b_j c_m & c_j c_m + \frac{1-\nu}{2} b_j b_m \\ b_m b_i + \frac{1-\nu}{2} c_m c_i & \nu b_m c_i + \frac{1-\nu}{2} c_m b_i & b_m b_j + \frac{1-\nu}{2} c_m c_j & \nu b_m c_j + \frac{1-\nu}{2} c_m b_j & b_m b_m + \frac{1-\nu}{2} c_m c_m & \nu b_m c_m + \frac{1-\nu}{2} c_m b_m \\ \nu c_m b_i + \frac{1-\nu}{2} b_m c_i & c_m c_i + \frac{1-\nu}{2} b_m b_i & \nu c_m b_j + \frac{1-\nu}{2} b_m c_j & c_m c_j + \frac{1-\nu}{2} b_m b_j & \nu c_m b_m + \frac{1-\nu}{2} b_m c_m & c_m c_m + \frac{1-\nu}{2} b_m b_m \end{bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)

*Il Metodo degli Elementi Finiti*

**Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti**

Forze nodali equivalenti alle deformazioni iniziali

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\frac{E \alpha T t}{2(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} b_i + \nu b_i \\ \nu c_i + c_i \\ b_j + \nu b_j \\ \nu c_j + c_j \\ b_m + \nu b_m \\ \nu c_m + c_m \end{Bmatrix}$$

*Le forze nodali equilibranti i carichi uniformemente distribuiti sull'elemento possono essere espresse come segue:*

$$\{F_p\}^e = -\left( \int_V [N]^T dV \right) \{p\} = -\left( \int_V \begin{Bmatrix} IN'_i \\ IN'_j \\ IN'_m \end{Bmatrix} dV \right) \{p\}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2015-2016)