

Il Metodo degli Elementi Finiti

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

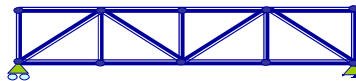
L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

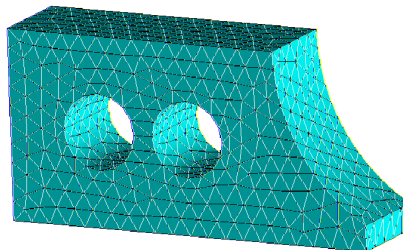
In alcune strutture la divisione in porzioni elementari, facilmente schematizzabili, discende immediatamente dal disegno e dalla tecnologia utilizzata per la costruzione.



Le caratteristiche di rigidezza dei vari elementi sono facilmente ricavabili dai modelli strutturali degli elementi (barre assiali, travi)

Molto spesso, invece, particolarmente nei componenti meccanici, la struttura è un continuo tridimensionale, che non presenta una preferenziale suddivisione in elementi.

In questi casi si può immaginare comunque di dividere la struttura in un numero finito di elementi, ognuno dei quali sarà caratterizzato da un certo numero di punti nodali nei quali definire le grandezze cinematiche e dinamiche. La rigidezza della struttura dipende dalle caratteristiche elastiche del materiale e dalla cinematica dei singoli elementi.



L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

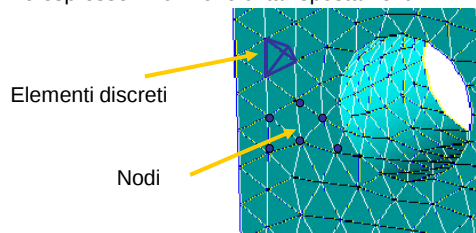
Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

L'idea è di ricondursi al caso già visto del calcolo strutturale matriciale, mediante le seguenti ipotesi di lavoro:

- Si rappresenta il continuo tramite un numero discreto di elementi finiti, connessi tra loro in un numero discreto di punti nodali lungo il contorno. (approssimazione: la connessione tra porzioni di continuo è nella realtà su infiniti punti e non in pochi punti discreti). Gli spostamenti nodali saranno ancora le incognite del problema, e tutte le grandezze di interesse verranno espresse in funzione di tali spostamenti.



L.Cortese

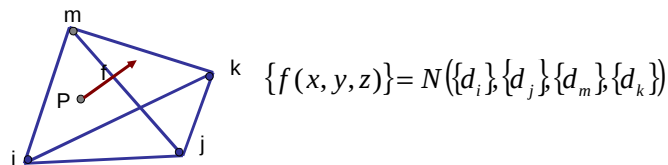
Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

- Un insieme appropriato di funzioni viene scelto per descrivere il campo di spostamenti in seno al singolo elemento in funzione degli spostamenti nodali: funzioni di forma (approssimazione, legata alla scelta arbitraria delle funzioni di forma. In aggiunta, queste dovrebbero assicurare i requisiti di continuità degli spostamenti (congruenza) e delle deformazioni. Non sempre è possibile soddisfare tali condizioni).



P punto generico di coordinate x,y,z interno all'elemento.
 {f} spostamento del punto P

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

- Dal campo di spostamento definito sopra, è possibile ricavare il campo di deformazione corrispondente, sempre in seno all'elemento. Noto il campo di deformazione, si risale al campo di tensione, assunto il legame costitutivo del materiale e tenuto conto anche di eventuali deformazioni iniziali e tensioni residue.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \xrightarrow{\quad} [D], \{\varepsilon_0\}, \{\sigma_0\} \xrightarrow{\quad} \{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

L.Cortese

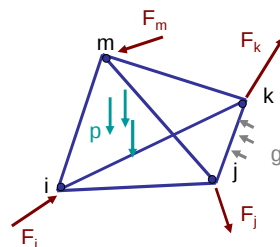
Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

- Si determina un sistema di forze concentrate ai nodi che faccia equilibrio alle tensioni sul contorno e ad ogni carico distribuito nell'elemento. (approssimazione: concentrando le forze ai nodi, la condizione di equilibrio statico è verificata soltanto globalmente.)



Si cerca infine ancora una relazione di equilibrio di elemento del tipo:

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e + \dots$$

determinando $[K]^e, \{F\}_p^e, \{F\}_{\varepsilon_0}^e$ tramite opportune operazioni dipendenti dal tipo di elemento

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo..

Con queste ipotesi, il problema è ricondotto al caso del calcolo strutturale matriciale. Si può cioè scrivere la condizione di equilibrio per ogni elemento:

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e + \dots$$

In questo caso infatti, i singoli elementi fanno le veci dei veri e propri componenti individuali connessi tra loro mediante un numero discreto di punti nodali.

L'assemblaggio procede pertanto mediante gli stessi passi previsti per tale metodo; si ricostruisce cioè la matrice di rigidezza di struttura $[K]$, i carichi nodali equivalenti a carichi distribuiti e deformazioni iniziali $\{F\}_p^e$, $\{F\}_{\varepsilon_0}^e$, e si stimano le forze esterne $\{R\}$ supposte concentrate ai nodi

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

La condizione di equilibrio imposta a livello di struttura (discreta) è dunque:

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0} - \dots$$

-Una volta risolto il sistema di equazioni:

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0} - \dots$$

e cioè trovati il campo di spostamenti incogniti $\{d\}$ e le reazioni vincolari, si possono identificare, elemento per elemento che discretizza il continuo, sia il campo di deformazione che quello di tensione mediante le:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\}^e &= [B]\{d\}^e \\ \{\sigma\} &= [D][B]\{d\}^e - [D]\{\varepsilon_0\}^e + \{\sigma_0\}^e\end{aligned}$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Cercando di rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti di dimensioni finite si introducono le seguenti **approssimazioni**:

- la connessione tra porzioni di continuo è nella realtà su infiniti punti e non in pochi punti discreti.
- concentrando le forze ai nodi, la condizione di equilibrio statico è verificata soltanto globalmente.
- la scelta arbitraria delle funzioni di forma non garantisce che gli spostamenti veri in seno ai singoli elementi siano descritti accuratamente. In aggiunta, queste dovrebbero assicurare i requisiti di continuità degli spostamenti (congruenza) e delle deformazioni.

Al decrescere delle dimensioni degli elementi discreti (con h la dim. media di elem.) tali approssimazioni si riducono. Si può dimostrare che sotto opportune ipotesi (riguardanti le funzioni di forma ed altro..), il metodo degli elementi finiti converge alla soluzione esatta quando $h \rightarrow 0$.

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

La precisione del metodo dipende fortemente da come le funzioni di forma riescono a descrivere il campo di spostamenti reale. Esse sono scelte in maniera arbitraria e introducono una approssimazione qualora il campo vero di spostamenti non sia descrivibile mediante la formulazione analitica adottata. L'errore si riduce al decrescere della dimensione dell'elemento

Per assicurare la convergenza del metodo al risultato corretto, si dimostra che le funzioni di forma devono essere scelte in base ai seguenti criteri:

- 1) devono essere in grado di rappresentare correttamente i moti rigidi: in tali casi non devono generare deformazioni nell'elemento;
- 2) devono essere in grado di riprodurre la condizione di campo uniforme di deformazione all'interno dell'elemento;
- 3) le deformazioni in corrispondenza della separazione tra gli elementi possono presentare una discontinuità ma questa deve essere finita (cioè corrisponde alla condizione che gli spostamenti siano continui tra elementi contigui, ovvero che le funzioni di spostamento siano C_0 in corrispondenza della separazione. Ci sono inoltre classi di elementi che richiedono che gli spostamenti siano C_1).

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Problemi piani: L'elemento triangolare a 3 nodi

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

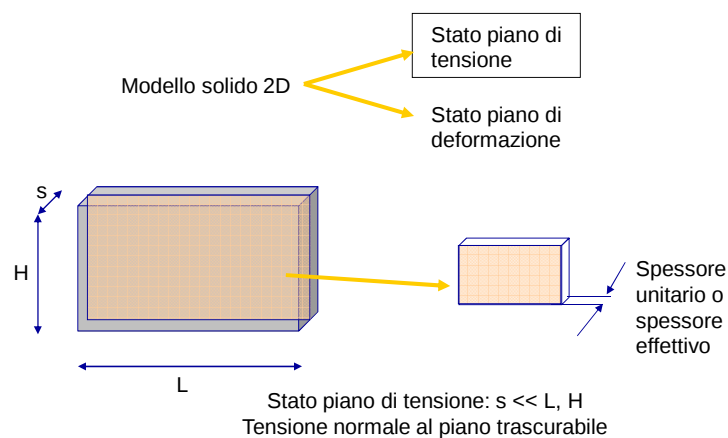
L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elementi bidimensionali: stato di tensione piana

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo bidimensionale, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile quando la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



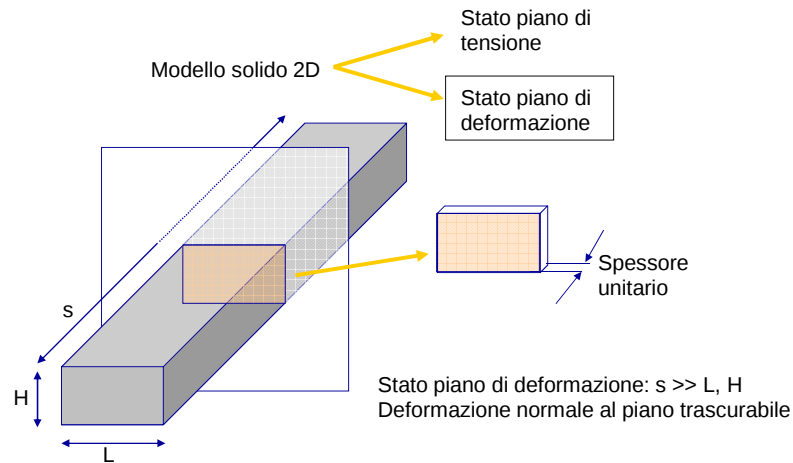
L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elementi bidimensionali: stato di deformazione piana

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo bidimensionale, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



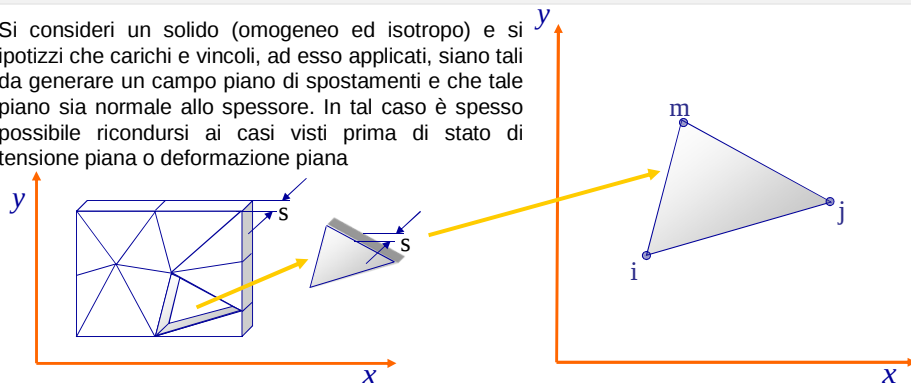
L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Si consideri un solido (omogeneo ed isotropo) e si ipotizzi che carichi e vincoli, ad esso applicati, siano tali da generare un campo piano di spostamenti e che tale piano sia normale allo spessore. In tal caso è spesso possibile ricondursi ai casi visti prima di stato di tensione piana o deformazione piana



In queste condizioni è possibile rappresentare il comportamento strutturale del solido con un modello piano.

Si divida il solido in una serie di elementi triangolari, di dimensioni finite.

Si immagini ora di estrarre uno di tali triangoli dal continuo e di studiare il suo comportamento riferendolo ad un sistema di coordinate cartesiane.

Per le ipotesi e le assunzioni fatte l'elemento può solo spostarsi, deformandosi, sul piano x, y .

Ogni suo punto ha quindi due componenti di spostamento, che indicheremo come u e v .

L.Cortese

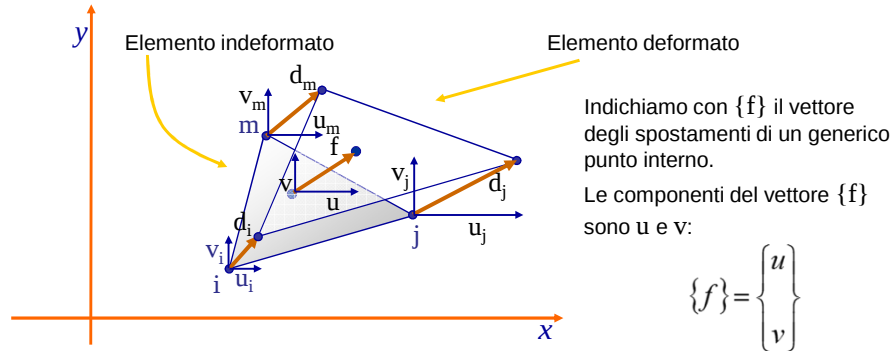
Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Consideriamo quindi l'elemento e , dotato di spessore s , nel piano x, y .

L'elemento è un triangolo di vertici i, j, m



$\{f\}$ dipende dal vettore degli spostamenti nodali di elemento $\{d\}^e$ tramite una matrice di forma $[N]$ che contiene le funzioni di spostamento:

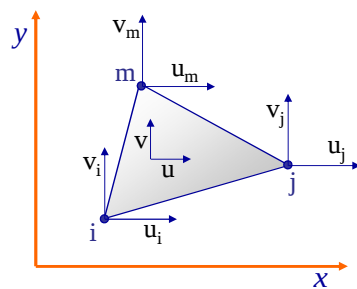
$$\{f\} = [N]\{d\}^e$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: funzioni di forma



Nel caso di elemento piano a tre nodi

$$r_e = 2 \\ m = 3$$

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e \longrightarrow \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

$[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ sono quadrate di dimensioni 2×2

$$\{f\} = \{f(x, y, z)\}, [N]_k = [N(x, y, z)]_k$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

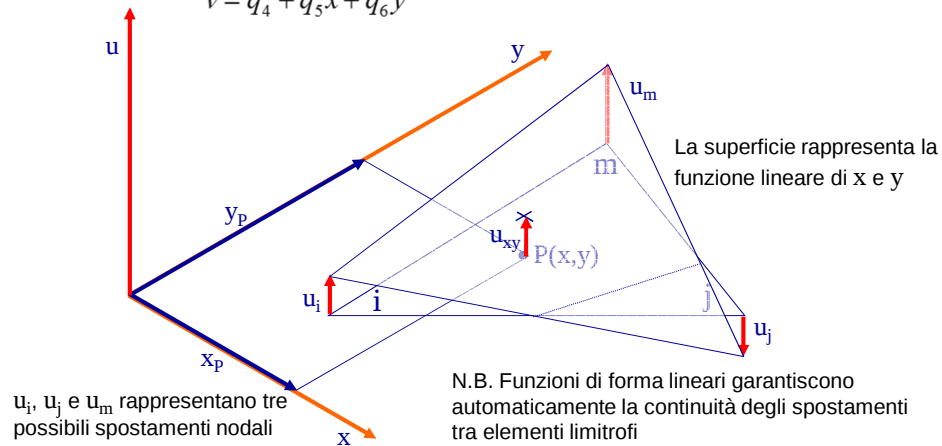
Il Metodo degli Elementi Finiti**Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma**

Le più semplici funzioni di spostamento che possono essere pensate sono di tipo lineare:

$$u = q_1 + q_2x + q_3y$$

$$v = q_4 + q_5x + q_6y$$

Essendo q sei costanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento



L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti**Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma**

Le più semplici funzioni di spostamento che possono essere pensate sono di tipo lineare:

$$u = q_1 + q_2x + q_3y$$

$$v = q_4 + q_5x + q_6y$$

Essendo q sei costanti dipendenti dalle coordinate nodali dell'elemento

Le 6 costanti q_i possono essere calcolate imponendo che le funzioni di spostamento assumano nei nodi esattamente il valore dello spostamento nodale.

$$u_i = q_1 + q_2x_i + q_3y_i$$

$$v_i = q_4 + q_5x_i + q_6y_i$$

$$u_j = q_1 + q_2x_j + q_3y_j$$

$$v_j = q_4 + q_5x_j + q_6y_j$$

$$u_m = q_1 + q_2x_m + q_3y_m$$

$$v_m = q_4 + q_5x_m + q_6y_m$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Risolviendo il sistema sono calcolabili le componenti del vettore $\{f\}$ di spostamento dei punti interni all'elemento, u e v , in funzione degli spostamenti nodali e delle coordinate x e y :

$$u = \frac{1}{2\Delta} [N'_i \cdot u_i + N'_j \cdot u_j + N'_m \cdot u_m]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [N'_i \cdot v_i + N'_j \cdot v_j + N'_m \cdot v_m]$$

Dove le funzioni N'_k sono espresse da:

$$N'_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

Esse dipendono dalle coordinate del punto e dalle coordinate dei nodi mediante le costanti a_k, b_k, c_k, Δ :

Le relazioni precedenti possono essere riscritte in forma matriciale come segue:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I]N'_i & [I]N'_j & [I]N'_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

ed in forma compatta:

$$\{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = [N]\{d\}$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Note le funzioni di forma, il legame tra le componenti della deformazione e spostamenti nodali è, in forma matriciale:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{d\}^e \quad \{\varepsilon\} = [B]\{d\}^e$$

La matrice di deformazione $[B]$ ha dimensioni $r_e \times (r_e m)$, nel caso in esame 3×6 , e può essere divisa in tre sottomatrici 3×2 del tipo:

$$[B_k] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad \text{per } k=i,j,m$$

N.B. Nel caso dell'elemento piano a 3 nodi i termini della matrice $[B]$ sono costanti, e non contengono dalle variabili x, y . La deformazione è descritta come costante in tutto l'elemento. Ciò introduce una approssimazione importante nel rappresentare elevati gradienti di deformazione.

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Lo stato di tensione in un punto dell'elemento è descritto dal vettore $\{\sigma\}$, composto da 3 termini. In condizioni di comportamento elastico del materiale, tale vettore può essere espresso come :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{ \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\} \} + \{\sigma_0\}$$

La matrice $[D]$ ha dimensioni 3×3 ; i vettori $\{\sigma_0\}$, $\{\varepsilon_0\}$ rappresentano gli eventuali stati di tensione e deformazione residui preesistenti nel materiale.

Le matrici $[D]$ per lo stato piano di tensione e per lo stato di deformazione piana si ottengono invertendo le relative relazioni di Hooke, ovvero ricavando le σ in funzione delle ε

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Stato piano di tensione} \quad [D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad \text{Stato piano di deformazione}$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento

La relazione che esprime la condizione di equilibrio dell'elemento nel continuo si può ricavare chiamando in causa il principio dei lavori virtuali:

$\{F\}^e$ vettore delle forze esterne agenti sull'elemento, applicate direttamente ai nodi:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \quad \{F_i\}^e = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ \vdots \\ F_{iz} \end{Bmatrix}$$

N.B. In questo caso $\{F\}^e$ rappresenta le forze nodali che sono staticamente equivalenti alle tensioni $\{\sigma\}$ realmente agenti sul contorno dell'elemento.

$\{p\}$ vettore dei carichi distribuiti per unità di volume, ad esempio dovuto ad azioni inerziali:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

La condizione di equilibrio tra le forze esterne e le reazioni interne, dovute allo stato tensionale, si ricava tramite il principio dei lavori virtuali

Supponendo l'elemento in equilibrio, imponendo un campo di arbitrari spostamenti virtuali il lavoro compiuto dalle forze esterne deve eguagliare quello compiuto dalle forze interne

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti**Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento**

Utilizzando il p.l.v., con molti passaggi..... si ricavano i termini della relazione di equilibrio di elemento:

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] \quad V = \begin{bmatrix} B_i^T DB_i & B_i^T DB_j & B_i^T DB_m \\ B_j^T DB_i & B_j^T DB_j & B_j^T DB_m \\ B_m^T DB_i & B_m^T DB_j & B_m^T DB_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

t spessore (costante)
dell'elemento

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\frac{E \alpha \Delta T t}{2(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} b_i + \nu b_i \\ \nu c_i + c_i \\ b_j + \nu b_j \\ \nu c_j + c_j \\ b_m + \nu b_m \\ \nu c_m + c_m \end{Bmatrix} \quad \{F_p\}^e = - \left(\int_V \begin{Bmatrix} IN'_i \\ IN'_j \\ IN'_m \end{Bmatrix} dV \right) \{p\}$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)