

Problemi piani: L'elemento triangolare a 3 nodi

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

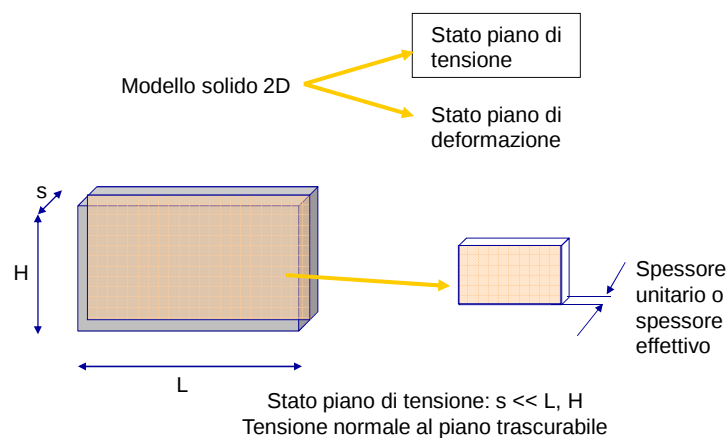
L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elementi bidimensionali: stato di tensione piana

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo bidimensionale, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile quando la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



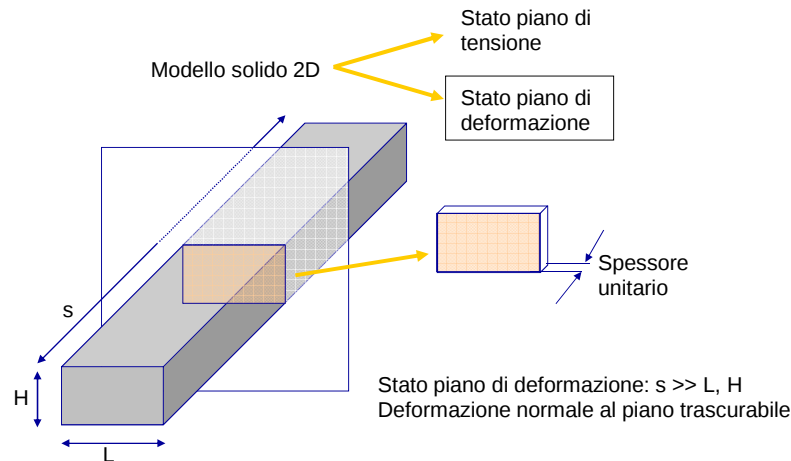
L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elementi bidimensionali: stato di deformazione piana

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo bidimensionale, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



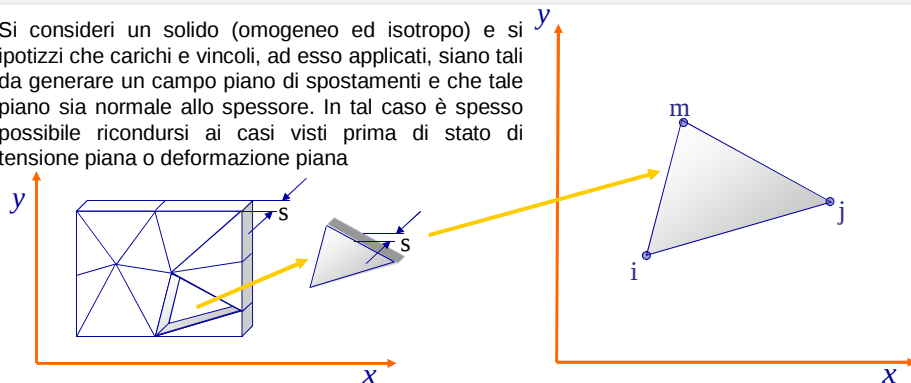
L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Si consideri un solido (omogeneo ed isotropo) e si ipotizzi che carichi e vincoli, ad esso applicati, siano tali da generare un campo piano di spostamenti e che tale piano sia normale allo spessore. In tal caso è spesso possibile ricondursi ai casi visti prima di stato di tensione piana o deformazione piana



In queste condizioni è possibile rappresentare il comportamento strutturale del solido con un modello piano.

Si divida il solido in una serie di elementi triangolari, di dimensioni finite.

Si immagini ora di estrarre uno di tali triangoli dal continuo e di studiare il suo comportamento riferendolo ad un sistema di coordinate cartesiane.

Per le ipotesi e le assunzioni fatte l'elemento può solo spostarsi, deformandosi, sul piano x, y .

Ogni suo punto ha quindi due componenti di spostamento, che indicheremo come u e v .

L.Cortese

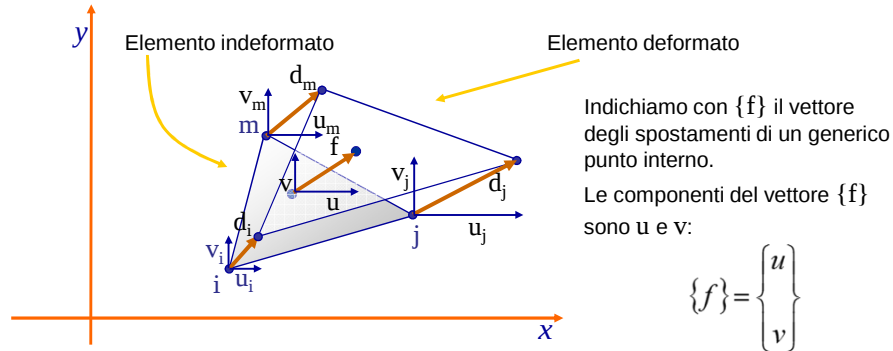
Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Consideriamo quindi l'elemento e , dotato di spessore s , nel piano x, y .

L'elemento è un triangolo di vertici i, j, m



$\{f\}$ dipende dal vettore degli spostamenti nodali di elemento $\{d\}^e$ tramite una matrice di forma $[N]$ che contiene le funzioni di spostamento:

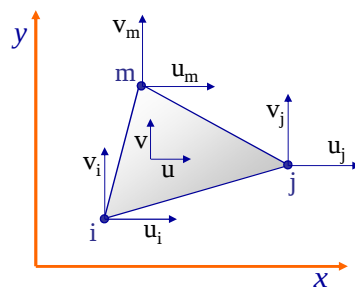
$$\{f\} = [N]\{d\}^e$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: funzioni di forma



Nel caso di elemento piano a tre nodi

$$r_e = 2 \\ m = 3$$

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e \longrightarrow \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

$[N]_i, [N]_j$ ed $[N]_m$ sono quadrate di dimensioni 2×2

$$\{f\} = \{f(x, y, z)\}, [N]_k = [N(x, y, z)]_k$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti**Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma**

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Dal primo dei due sistemi si ha: $q_1 = \frac{a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m}{2\Delta}$

Dove a_i , a_j e a_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la prima colonna:

e dove Δ ha il significato: $\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}$ = area del triangolo i j m

Matrice dei coefficienti

Per i minori:

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j \quad a_j = -(x_i y_m - x_m y_i) \quad a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ + & 1 & x_i & y_i \\ - & 1 & x_j & y_j \\ + & 1 & x_m & y_m \end{matrix}$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti**Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma**

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Ancora dal primo dei due sistemi si calcola la seconda incognita: $q_2 = \frac{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m}{2\Delta}$

Dove b_i , b_j e b_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la seconda colonna:

$$b_i = y_j - y_m \quad b_j = y_m - y_i \quad b_m = y_i - y_j$$

e la terza incognita: $q_3 = \frac{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m}{2\Delta}$

Dove c_i , c_j e c_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la terza colonna:

$$c_i = x_m - x_j \quad c_j = x_i - x_m \quad c_m = x_j - x_i$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Gli altri tre valori delle incognite q si ottengono semplicemente introducendo nelle relazioni precedenti le componenti di spostamento v in luogo di u

$$q_4 = \frac{a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_5 = \frac{b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_6 = \frac{c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m}{2\Delta}$$

avendo $a_i, a_j, a_m, b_i, b_j, b_m, c_i, c_j$ e c_m gli stessi valori calcolati prima in funzione delle coordinate nodali dell'elemento e riportati qui per riepilogo.

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ a_j = x_m y_i - x_i y_m \\ a_m = x_i y_j - x_j y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_i = y_j - y_m \\ b_j = y_m - y_i \\ b_m = y_i - y_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i = x_m - x_j \\ c_j = x_i - x_m \\ c_m = x_j - x_i \end{cases}$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

A questo punto sono calcolabili le componenti del vettore $\{f\}$ di spostamento dei punti interni all'elemento, u e v , in funzione degli spostamenti nodali e delle coordinate x e y .

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) \cdot u_i + (a_j + b_j x + c_j y) \cdot u_j + (a_m + b_m x + c_m y) \cdot u_m]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) \cdot v_i + (a_j + b_j x + c_j y) \cdot v_j + (a_m + b_m x + c_m y) \cdot v_m]$$

$$u = \frac{1}{2\Delta} [N'_i \cdot u_i + N'_j \cdot u_j + N'_m \cdot u_m]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [N'_i \cdot v_i + N'_j \cdot v_j + N'_m \cdot v_m]$$

Dove le funzioni N'_k sono espresse da:

$$N'_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

$$u = \frac{1}{2\Delta} [N'_i \cdot u_i + N'_j \cdot u_j + N'_m \cdot u_m]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [N'_i \cdot v_i + N'_j \cdot v_j + N'_m \cdot v_m]$$

$$N'_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

Dipendono dalle coordinate del punto e dalle coordinate dei nodi mediante le costanti a_k, b_k, c_k, Δ :

Le relazioni precedenti possono essere riscritte in forma matriciale come segue:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I]N'_i & [I]N'_j & [I]N'_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

ed in forma compatta:

$$\{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}$$

$$\{f\} = [N] \{d\}^e$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Note le funzioni di forma, il legame tra le componenti della deformazione e spostamenti nodali è, in forma matriciale:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{d\}^e \quad \{\epsilon\} = [B] \{d\}^e$$

La matrice di deformazione $[B]$ ha dimensioni $r_\epsilon \times (r_u m)$, nel caso in esame 3×6 , e può essere divisa in tre sottomatrici 3×2 del tipo:

$$[B_k] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad \text{per } k=i,j,m$$

N.B. Nel caso dell'elemento piano a 3 nodi i termini della matrice $[B]$ sono costanti, e non contengono delle variabili x, y . La deformazione è descritta come costante in tutto l'elemento. Ciò introduce una approssimazione importante nel rappresentare elevati gradienti di deformazione.

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Lo stato di tensione in un punto dell'elemento è descritto dal vettore $\{\sigma\}$, composto da 3 termini. In condizioni di comportamento elastico del materiale, tale vettore può essere espresso come :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{ \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\} \} + \{\sigma_0\}$$

La matrice $[D]$ ha dimensioni 3×3 ; i vettori $\{\sigma_0\}$, $\{\varepsilon_0\}$ rappresentano gli eventuali stati di tensione e deformazione residui preesistenti nel materiale.

Le matrici $[D]$ per lo stato piano di tensione e per lo stato di deformazione piana si ottengono invertendo le relative relazioni di Hooke, ovvero ricavando le σ in funzione delle ε

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Stato piano di tensione} \quad [D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad \text{Stato piano di deformazione}$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento

La relazione che esprime la condizione di equilibrio dell'elemento nel continuo si può ricavare chiamando in causa il principio dei lavori virtuali:

$\{F\}^e$ vettore delle forze esterne agenti sull'elemento, applicate direttamente ai nodi:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \quad \{F_i\}^e = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ \vdots \\ F_{iy} \end{Bmatrix}$$

N.B. In questo caso $\{F\}^e$ rappresenta le forze nodali che sono staticamente equivalenti alle tensioni $\{\sigma\}$ realmente agenti sul contorno dell'elemento.

$\{p\}$ vettore dei carichi distribuiti per unità di volume, ad esempio dovuto ad azioni inerziali:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

La condizione di equilibrio tra le forze esterne e le reazioni interne, dovute allo stato tensionale, si ricava tramite il principio dei lavori virtuali

Supponendo l'elemento in equilibrio, imponendo un campo di arbitrari spostamenti virtuali il lavoro compiuto dalle forze esterne deve eguagliare quello compiuto dalle forze interne

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento

La relazione che esprime la condizione di equilibrio dell'elemento nel continuo si può ricavare chiamando in causa il principio dei lavori virtuali

$\{F\}^e$ vettore delle forze esterne agenti sull'elemento, applicate direttamente ai nodi:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_m \end{Bmatrix} \quad \{F_i\}^e = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ \vdots \\ F_{in} \end{Bmatrix}$$

N.B. In questo caso $\{F\}^e$ rappresenta le forze nodali che sono staticamente equivalenti alle tensioni $\{\sigma\}$ realmente agenti sul contorno dell'elemento.

$\{p\}$ vettore dei carichi distribuiti per unità di volume, ad esempio dovuto ad azioni inerziali:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

La condizione di equilibrio tra le forze esterne e le reazioni interne, dovute allo stato tensionale, si ricava tramite il principio dei lavori virtuali

Supponendo l'elemento in equilibrio, imponendo un campo di arbitrari spostamenti virtuali il lavoro compiuto dalle forze esterne deve eguagliare quello compiuto dalle forze interne

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento

$$\mathcal{L}_e = \mathcal{L}_i$$

$\{d^*\}^e$ campo di spostamenti virtuali.

Lo spostamento interno virtuale e la deformazione conseguente al campo di spostamenti virtuali sono date dai vettori:

$$\{f^*\} = [N]\{d^*\}^e \rightarrow \{f^*\}^T = \left[\{d^*\}^e\right]^T [N]^T$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{d^*\}^e$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne vale:

$$\mathcal{L}_e = \left[\{d^*\}^e\right]^T \{F\}^e + \int_V \{f^*\}^T \{p\} dV = \left[\{d^*\}^e\right]^T \left(\{F\}^e + \int_V [N]^T \{p\} dV \right)$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle tensioni interne vale:

$$\mathcal{L}_i = \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV = \left[\{d^*\}^e\right]^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

Uguagliando i lavori si ottiene:

$$\left[\{d^*\}^e\right]^T \left(\{F\}^e + \int_V [N]^T \{p\} dV \right) = \left[\{d^*\}^e\right]^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento

$$\cancel{\{d\}^e}^T \left(\{F\}^e + \int_V [N]^T \{p\} dV \right) = \cancel{\{d\}^e}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

eliminando lo spostamento virtuale d'elemento si ottiene:

Ricordando le relazioni:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\}^e$$

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{\sigma\} = [D] ([B] \{d\}^e - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{F\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV$$

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{d\}^e - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{d\}^e - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV - \int_V [N]^T \{p\} dV$$

Questa relazione è del tipo: $\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e + \{F\}_{\sigma_0}^e + \{F\}_p^e$

In conclusione si può scrivere:

$$[K]^e = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{Matrice di rigidezza di elemento}$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV \quad \text{Forze nodali equivalenti alla deformazione iniziale (dilatazione termica)}$$

$$\{F\}_{\sigma_0}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad \text{Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (tensioni residue)}$$

$$\{F\}_p^e = - \int_V [N]^T \{p\} dV \quad \text{Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (pressioni, forze di massa)}$$

L. Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti**Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento**

Se l'elemento appartiene al confine esterno del continuo, su di esso potrebbe agire un carico distribuito, il cui valore per unità di lunghezza potrebbe essere espresso tramite il vettore:

$$\{g\} = [g_x \ g_y \ g_z]^T$$

Alle forze nodali equivalenti elencate in precedenza andrebbe allora aggiunto il vettore:

$$\{F\}_g^e = - \int_C [N]^T \{g\} dC$$

Dove l'integrazione si intende estesa sulla porzione di contorno sul quale agisce il carico distribuito appartenente all'elemento considerato.

In alternativa i carichi distribuiti agenti sul contorno possono inglobarsi nei carichi concentrati esterni di struttura descritti dal vettore $\{R\}$ (vedi sezione successiva).

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)

Il Metodo degli Elementi Finiti**Elemento piano triangolare a 3 nodi: relazione di equilibrio di elemento**

In definitiva, utilizzando il p.l.v., con molti passaggi..... si ricavano i termini della relazione di equilibrio di elemento:

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] V = \begin{bmatrix} B_i^T DB_i & B_i^T DB_j & B_i^T DB_m \\ B_j^T DB_i & B_j^T DB_j & B_j^T DB_m \\ B_m^T DB_i & B_m^T DB_j & B_m^T DB_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

t spessore (costante)
dell'elemento

$$\{F_{e0}\}^e = - \frac{E \alpha \Delta T t}{2(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} b_i + \nu b_i \\ \nu c_i + c_i \\ b_j + \nu b_j \\ \nu c_j + c_j \\ b_m + \nu b_m \\ \nu c_m + c_m \end{Bmatrix} \quad \{F_p\}^e = - \left(\int_V \begin{Bmatrix} IN'_i \\ IN'_j \\ IN'_m \end{Bmatrix} dV \right) \{p\}$$

L.Cortese

Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti (a.a. 2016-2017)