Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale

Università di Roma "La Sapienza"

Corso di Costruzione di Macchine e Progettazione agli Elementi Finiti

Docente: Prof. Giovanni Broggiato
Docente: Ing. Luca Cortese

email: giovanni.broggiato@uniroma1.it , luca.cortese@uniroma1.it
ufficio: Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale, via Eudossiana 18, 1° piano, stanza 20.

Riferimenti e materiale didattico

Testi consigliati (opzionali):

1. ***Prof. Giovanni Santucci. Dispense del corso di Costruzione di Macchine.***
2. ***O.C. Zienkiewicz. "The Finite Element Method"***

Materiale didattico:

1. Dispense ed esercitazioni sul sito: ***www.costruzionedimacchine.it***

Introduzione

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti

Problema: identificazione delle reazioni vincolari, dello stato tensionale e dello stato di deformazione di un componente o di un sistema meccanico, noti condizioni di vincolo e carico applicate

⬇

Soluzione analitica nota per geometrie note quali: aste, travi, piastre, gusci, solidi assialsimmetrici, etc. Soluzioni valide per il solo campo elastico. Esistono soluzioni in campo plastico per alcuni problemi molto semplici con modelli costitutivi per il materiale estremamente semplificati

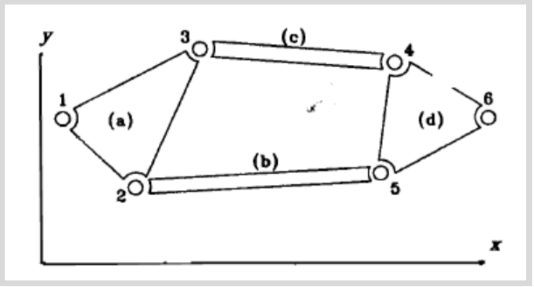
⬇

Negli altri casi è necessario ricorrere a metodi numerici approssimati

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti

Alcuni sistemi meccanici possono essere visti come un insieme di elementi strutturali componenti, ognuno connesso ad altri mediante un numero discreto di punti nodali.
Per questi problemi, se si conoscono le relazioni costitutive dei singoli elementi è possibile risalire alle caratteristiche elastiche dell'intera struttura e studiarne il comportamento statico mediante calcolo strutturale matriciale.
Il metodo si basa sul soddisfacimento delle condizioni di equilibrio e congruenza.



Introduzione

Il metodo degli elementi finiti

Il metodo degli elementi finiti è, in estrema sintesi, lo studio dei criteri per i quali è possibile rappresentare il continuo meccanico mediante elementi discreti, interconnessi da un numero discreto di punti nodali, localmente equivalenti da un punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo. Trovata l'equivalenza continuo-discrete, è possibile studiare il comportamento del continuo mediante calcolo strutturale matriciale

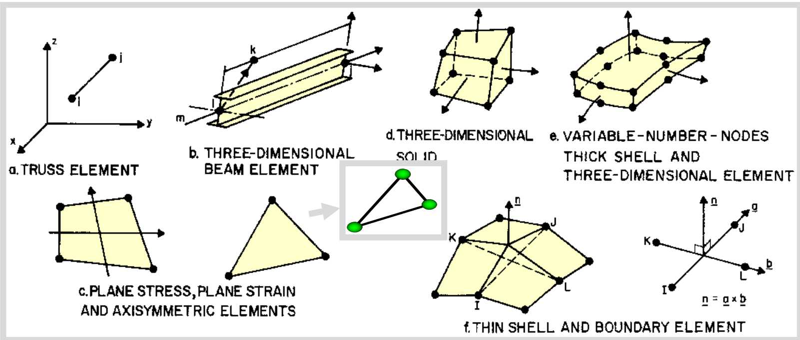
⬇

Il problema strutturale si traduce nella soluzione di un sistema di equazioni (lineari, per il problema elastico) con incognite gli spostamenti nodali.

Introduzione

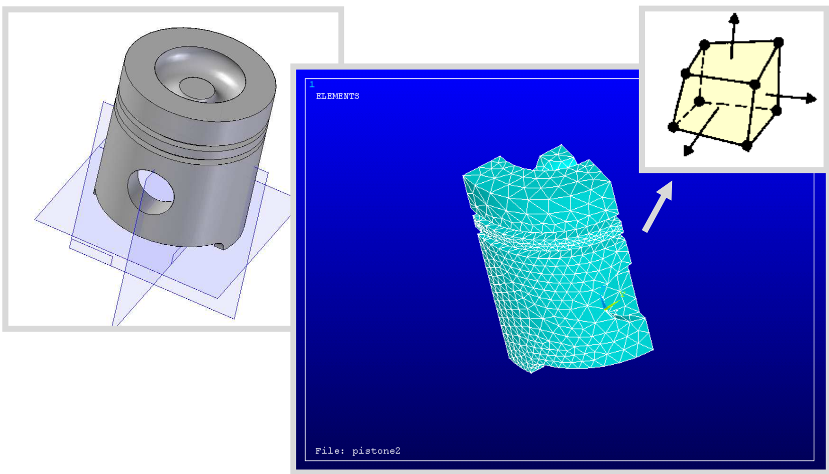
Il metodo degli elementi finiti

La discretizzazione del continuo mediante elementi finiti



Introduzione

Il metodo degli elementi finiti



Introduzione

Il metodo degli elementi finiti

Passi tipici di una analisi agli Elementi Finiti:

- Modellazione della geometria equivalente al problema reale
- Scelta tipo/i di elemento da usare per la discretizzazione
- Scelta modello di materiale: parametri caratteristici
- Discretizzazione
- Applicazione carichi e vincoli equivalenti a quelli reali
- Impostazione del tipo di analisi
- Soluzione agli elementi finiti
- Fase di post-processo: analisi e raccolta dei risultati

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti

Soluzione del problema elastico:

Sistema di equazioni lineari

Campo di spostamenti nodali

Funzioni di forma

Campo di spostamenti all'interno degli elementi

Hp: piccoli spostamenti

Campo deformativo locale

Relazioni di Hooke

Campo tensionale locale

Introduzione al Calcolo Strutturale Matriciale

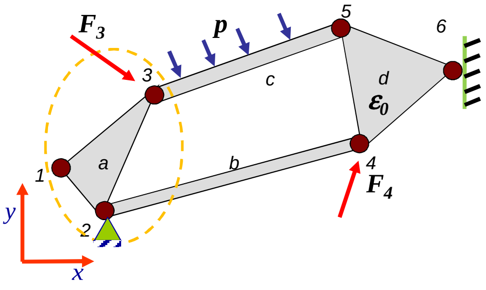
Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta

Per struttura discreta si intende un sistema meccanico composto da elementi strutturali caratterizzati da una propria individualità, connessi tra loro tramite un numero discreto di punti nodali.
I nodi possono essere soggetti a vincoli e a carichi concentrati. Eventuali carichi distribuiti possono essere applicati direttamente agli elementi costituenti.

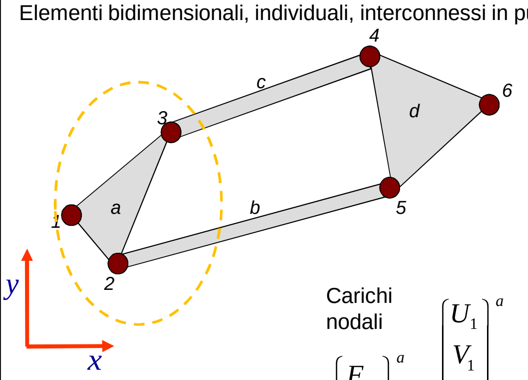
Mediante il calcolo strutturale matriciale è possibile risolvere questa classe di problemi, sia per configurazioni isostatiche che iperstatiche.
In particolare, è possibile identificare la configurazione di equilibrio, le reazioni vincolari, lo stato di tensione e deformazione nei singoli componenti.
Tutto ciò esprimendo le grandezze in funzione degli ***spostamenti nodali***, e a patto di conoscere le proprietà elastiche degli elementi costituenti.

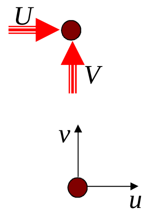


Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta (esempio bidimensionale)

Elementi bidimensionali, individuali, interconnessi in punti nodali: 2 g.d.l. per nodo





Carichi nodali

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}^a$$

Spostamenti nodali

$$\{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^a$$

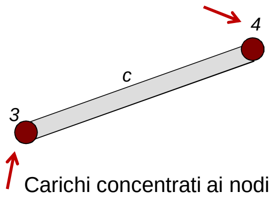
$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}$$

$$\{d_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

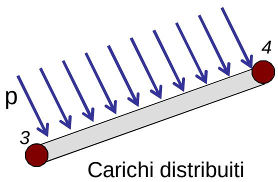
Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta (esempio bidimensionale)

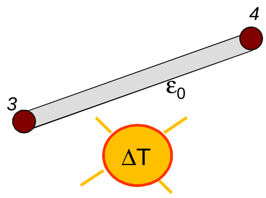
Carichi agenti sul generico elemento della struttura



Carichi concentrati ai nodi



Carichi distribuiti



Deformazioni iniziali dovute a carichi termici

Per risolvere il problema discreto, il punto di partenza è la relazione che esprime la condizione di equilibrio del singolo elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta: caso generale

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}^a_p + \{F\}^a_{\varepsilon 0}$$

$\{F\}^a$ Vettore delle forze agenti sui nodi

$\{F\}^a_p$ Vettore delle forze nodali necessarie ad equilibrare i carichi distribuiti

$\{F\}^a_{\varepsilon_0}$ Vettore delle forze nodali necessarie ad equilibrare l'effetto delle deformazioni iniziali

$\{F\}^a_d = [K]^a\{d\}^a$ Vettore delle forze nodali necessarie a produrre lo spostamento elastico dei nodi descritto dal vettore $\{d\}^a$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: vettori forza e spostamento

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}^a_p + \{F\}^a_{\varepsilon 0}$$

m = numero dei nodi di elemento

l = numero dei gradi di libertà per nodo

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_i \\ .. \\ F_m \end{Bmatrix}^a \qquad \{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_m \end{Bmatrix}^a \qquad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ .. \\ F_{il} \end{Bmatrix} \qquad \{d_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ .. \\ d_{il} \end{Bmatrix}$$

Dunque i vettori forza e spostamento hanno in generale *m* x *l* elementi

N.B Le componenti di forza e spostamento sono da intendersi "generalizzate", potendo trattarsi anche di momenti e rotazioni

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: matrice di rigidezza di elemento

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

m = numero dei nodi di elemento

l = numero dei gradi di libertà per nodo

$$[K]^a = \begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1i} & .. & K_{1m} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{i1} & .. & K_{ij} & .. & K_{im} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{m1} & .. & K_{mj} & .. & K_{mm} \end{bmatrix}$$

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{ij_{11}} & .. & K_{ij_{1l}} \\ .. & & .. \\ K_{ij_{1l}} & .. & K_{ij_{ll}} \end{bmatrix}$$

$[K]^a$ Matrice di rigidezza di elemento, di dimensioni *ml* x *ml*

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: matrice di rigidezza di elemento

Significato dei termini della matrice di rigidezza di elemento

$$\{F\}_d^a = \begin{Bmatrix} F_{d_1} \\ .. \\ F_{d_i} \\ .. \\ F_{d_m} \end{Bmatrix}_d^a = \begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1i} & .. & K_{1m} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{i1} & .. & K_{ij} & .. & K_{im} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{m1} & .. & K_{mj} & .. & K_{mm} \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_m \end{Bmatrix}^a = [K]^a \{d\}^a$$

Il generico termine K_{ij} consente di determinare la quota parte della *componente* *i*-esima della $\{F\}_d$ elastica che si genera qualora si imponesse la *j*-esima componente del vettore $\{d\}$, mantenendo nulli tutti gli altri spostamenti di elemento.

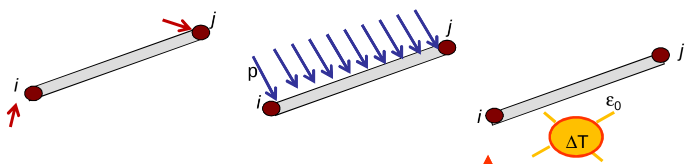
Elemento Asta nel piano

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Asta nel piano, di sezione uniforme *A*, lunghezza *L*. Parametri elastici del materiale *E*,ν. Asta "generalizzata", in grado di reagire a trazione-compressione per l'effetto dei carichi concentrati nodali e deformazioni iniziali, e a flessione, sotto l'azione dei carichi distribuiti.

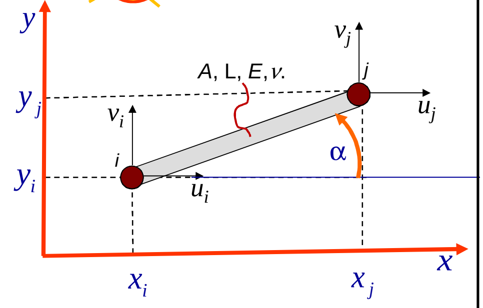


Lunghezza dell'asta

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

Angolo formato dall'asta con l'asse delle ascisse

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right)$$



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

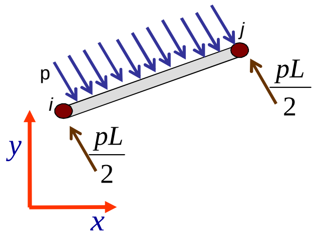
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Forze nodali equivalenti ai carichi distribuiti:

$$\{F\}_p^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_p^a = \frac{pL}{2}\begin{Bmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ -\sin a \\ \cos a \end{Bmatrix}$$



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

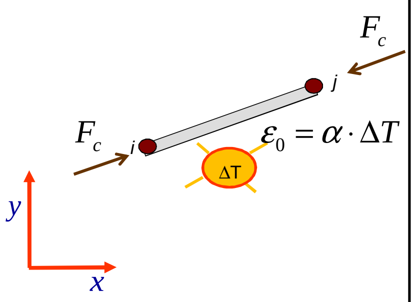
$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Forze nodali che impediscono le deformazioni iniziali:

$$\varepsilon_0 = \alpha \Delta T \qquad \sigma_0 = E\varepsilon_0$$

$$F_c = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0}^a = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} \cos a \\ \sin a \\ -\cos a \\ -\sin a \end{Bmatrix}$$



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

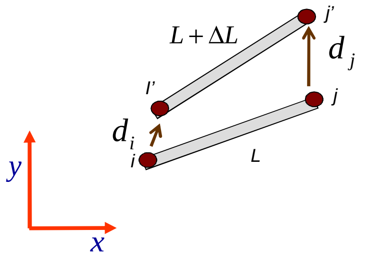
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Spostamenti nodali

$$\{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$



Allungamento dell'asta

$$\Delta L = (u_j - u_i)\cos a + (v_j - v_i)\sin a$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

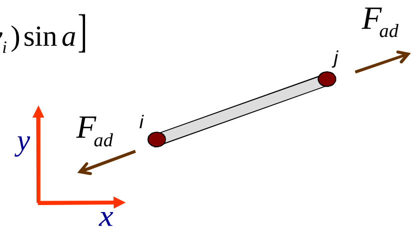
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Forza assiale in grado di produrre l'allungamento ΔL

$$F_{ad} = A \cdot E \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{EA}{L}\left[(u_j - u_i)\cos a + (v_j - v_i)\sin a\right]$$



In componenti

$$\{F\}_d^a = \begin{Bmatrix} F_{d_i} \\ F_{d_j} \end{Bmatrix}_d^a = \begin{Bmatrix} -cF_{ad} \\ -sF_{ad} \\ cF_{ad} \\ sF_{ad} \end{Bmatrix}_d^a = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

$$U_i = \frac{EA}{L}\left(+u_i c^2 + v_i sc - u_j c^2 - v_j sc\right)$$

$$V_i = \frac{EA}{L}\left(+u_i sc + v_i s^2 - u_j sc - v_j s^2\right)$$

$$U_j = \frac{EA}{L}\left(-u_i c^2 - v_i sc + u_j c^2 + v_j sc\right)$$

$$V_i = \frac{EA}{L}\left(-u_i sc - v_i s^2 + u_j sc + v_j s^2\right)$$

$c = \cos a$

$s = \sin a$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

In notazione matriciale:

$$\{F\}_d^a = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} = [K]^a\{d\}^a$$

$$K_{ij} = \frac{EA}{L}(-1)^{i+j}\begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}$$

N.B. [*K*] è sempre simmetrica, conseguenza della conservazione dell'energia

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Per l'asta "generalizzata" si ha dunque:

$$\{F\}^a = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}^a \{d\}^a + \frac{pL}{2}\begin{Bmatrix} -s \\ c \\ -s \\ c \end{Bmatrix} + E\alpha\Delta T\begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Deformazioni e tensioni massime e minime di elemento

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\{d\}^a + \frac{pL^2 z}{8EI}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} - \alpha\Delta T\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\{d\}^a + \frac{pL^2 z}{8I}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} - E\alpha\Delta T\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

z semiampiezza della sezione trasversale dell'asta

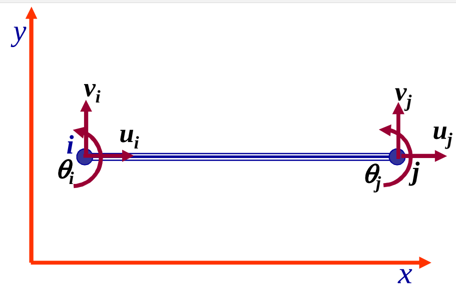
N.B. L'asta "pura" si comporta solo come puntone, reagendo soltanto a trazione-compressione, e non a flessione. In tal caso non è possibile applicare carichi distribuiti. Tutte le espressioni relative all'asta generalizzata, si possono particolarizzare eliminando i contributi dovuti a tali carichi.

Elemento Trave nel piano (cenni)

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana



Tre gradi di libertà per nodo (nel piano)

Due nodi per elemento

↓

Sei gradi di libertà per elemento

↓

Matrice di rigidezza di elemento: 6 x 6

Vettore forze nodali — Vettore spostamenti nodali

$$\begin{pmatrix} U_i \\ V_i \\ M_i \\ U_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana: Matrice di Rigidezza di Elemento, riferimento globale

La matrice di rigidezza 6 x 6 di un elemento trave nel piano è dunque:

$$[K]=\frac{E}{L}\cdot\begin{bmatrix} Ac^2+\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s & -Ac^2-\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s \\ \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2+\frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2-\frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c \\ -\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 4J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 2J \\ -Ac^2-\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s & Ac^2+\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s \\ \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2-\frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2+\frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c \\ -\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 2J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 4J \end{bmatrix}$$

Per calcolarla è necessario conoscere la caratteristica elastica del materiale e i dati geometrici dell'elemento: →

$\boldsymbol{L}$ = lunghezza
$\boldsymbol{A}$ = area della sezione
$\boldsymbol{J}$ = Momento d'inerzia della sezione
$\boldsymbol{E}$ = Modulo di Young

$$\alpha = arc\tan\frac{y_j-y_i}{x_j-x_i}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

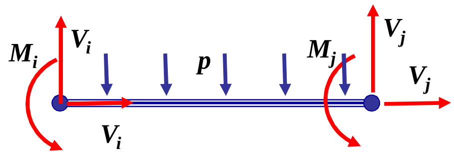
Trave piana: stato di deformazione e tensione nell'elemento

Vettori deformazione e tensione nell'elemento

$$\{\varepsilon\}=?$$

$$\{\sigma\}=?$$

La loro identificazione è più complessa rispetto al caso già visto dell'asta, dal momento che non è possibile determinare a priori sezioni e punti critici.
Essi dipendono infatti dalle caratteristiche di sollecitazione agenti sull'elemento: si avrà quindi in generale $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon(x)\}$, $\{\sigma\}=\{\sigma(x)\}$, con x orientata come l'asse della trave.



Nella configurazione di equilibrio, per ogni sezione individuata dall'ascissa x, sono note le caratteristiche di sollecitazione agenti (già esprimibili in termini di spostamenti nodali una volta determinata la matrice di rigidezza *[K]*), e gli eventuali carichi distribuiti e deformazioni iniziali. E' pertanto possibile identificarne gli effetti (in campo elastico vale anche il *p.s.e*, per cui si possono valutare un effetto alla volta e poi sommarli), utilizzando la teoria della trave.

Assemblaggio degli Elementi:

Soluzione del Problema Strutturale Discreto

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Assemblaggio degli elementi: matrice di struttura

Per ottenere la soluzione del problema statico relativo alle strutture discrete, bisogna considerare l'equilibrio di tutti i nodi che compongono la struttura stessa. Si otterrà un sistema di equazioni (lineari per il problema elastico), con incognite gli spostamenti nodali. Una volta risolto tale sistema, e quindi identificati gli spostamenti incogniti di tutti i nodi componenti la struttura, sarà possibile identificare le reazioni vincolari, e gli stati di tensione e deformazione in seno agli elementi.

La struttura la consideriamo caricata da forze esterne applicate ai nodi, che si aggiungono ai carichi distribuiti direttamente applicati ai singoli elementi

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ .. \\ R_i \\ .. \\ R_n \end{Bmatrix} \qquad \{R_i\} = \begin{Bmatrix} R_{i1} \\ .. \\ R_{il} \end{Bmatrix} \qquad \{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_n \end{Bmatrix}$$

n = numero dei nodi di ***struttura***

l = numero dei gradi di libertà per nodo (ogni forza ha un numero di componenti pari ai g.d.l dei nodi)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Assemblaggio degli elementi: matrice di struttura

Condizione di equilibrio del generico nodo *i*-esimo della struttura: la somma delle forze esterne agenti sul nodo e delle forze esercitate dagli elementi confluenti nel nodo deve essere nulla.

$$\{R_i\} = \sum_a \{F_i\}^a \qquad \text{sarebbe: } \left(-\sum_a \{F_i\}^a + \{R_i\} = 0 \right)$$

La sommatoria conviene estenderla anche agli elementi non confluenti nel nodo, che chiaramente forniranno un contributo nullo

Conviene anche espandere alle dimensioni di struttura la matrice di rigidezza di elemento, e i vettori forze nodali equivalenti ai carichi distribuiti e alle deformazioni iniziali di elemento

$$[K]^a = \begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1n} \\ .. & .. & .. \\ K_{n1} & .. & K_{nn} \end{bmatrix} \quad ([nl\ x\ nl]) \quad \{F\}_p^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_i \\ .. \\ F_n \end{Bmatrix}_p^a \quad \{F\}_{\varepsilon 0}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_i \\ .. \\ F_n \end{Bmatrix}_{\varepsilon 0}^a$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Assemblaggio degli elementi: matrice di struttura

Condizione di equilibrio del nodo *i*-esimo

$$\{R_i\} = \sum_a \left(\sum_{j=1}^{n} [K_{ij}] \{d_j\} \right)^a + \sum_a \{F_i\}_p^a + \sum_a \{F_i\}_{\varepsilon_0}^a = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_a [K_{ij}]^a \right) \{d_j\} + \sum_a \{F_i\}_p^a + \sum_a \{F_i\}_{\varepsilon_0}^a$$

Condizione di equilibrio di tutti i nodi della struttura, notazione matriciale

$$\{R\} = [K]\{d\} + \{F\}_p + \{F\}_{\varepsilon_0}$$

[K] matrice di rigidezza di struttura

$$n.b. \quad [K_{ij}]^a \neq 0 \Leftrightarrow i, j \in a$$

$$[K_{ij}] = \sum_a [K_{ij}]^a$$

$$\{F_i\}_p = \sum_a \{F_i\}_p^a$$

$$\{F_i\}_{\varepsilon_0} = \sum_a \{F_i\}_{\varepsilon_0}^a$$

Tutti preventivamente espansi alle dimensioni di struttura

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale

Sistema di *nxl* equazioni lineari, con incognite *nxl* spostamenti nodali

$$[K]\{d\}=\{R\}-\{F\}_p-\{F\}_{\varepsilon_0}$$

Il calcolo strutturale matriciale si traduce nella soluzione di tale sistema.

Osservazioni:

- Il sistema è indeterminato fintanto che non si prescrivono ai nodi della struttura un numero di vincoli atti ad impedire il moto rigido. Il che equivale a prescrivere un certo numero minimo di spostamenti imposti (nulli o non). Di fatto senza vincoli la struttura non è in equilibrio. Matematicamente ciò si traduce nella singolarità della matrice di rigidezza di struttura *[K].*

- Imporre vincoli fa nascere le corrispondenti reazioni vincolari, in numero pari ai gradi di libertà vincolati. Esse diventano nuove incognite del problema, al posto degli spostamenti prescritti ora noti.

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale

Sistema di *nxl* equazioni lineari, con incognite gli spostamenti nodali

$$[K]\{d\}=\{R\}-\{F\}_p-\{F\}_{\varepsilon_0}$$

- Nel caso di vincoli rigidi, cioè spostamenti nulli dei nodi vincolati, per risolvere il sistema è sufficiente eliminare nel sistema le righe e colonne relative ai gradi di libertà vincolati. Una volta trovata la soluzione del sistema rimanente (la nuova matrice di rigidezza non è più singolare, e quindi risulta invertibile), e quindi individuato il vettore *{d}* incognito, le righe eliminate serviranno per ricavare le reazioni dei nodi soggetti a vincoli.

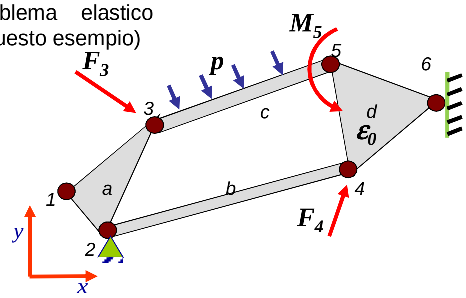
- Nel caso di spostamenti prescritti non nulli, si procede in modo analogo: se fosse noto lo spostamento $\{d_j\}$, ad esempio, si potrebbe accantonare la riga *j*-esima, e in tutte le altre equazioni considerare noto il termine $[K_{ij}]\{d_j\}$. Lo si può anche spostare a termine noto come $-[K_{ij}]\{d_j\}$. Risolto il sistema rimanente, la *j*-esima riga servirà per il calcolo della reazione incognita $\{R_j\}$.

N.B. Quanto detto vale sia per uno spostamento nodale completo, descritto dal generico sottovettore $\{d_j\}$, ma anche per una singola componente (ex: u_j).

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale

Iter di soluzione del problema elastico strutturale discreto (piano, in questo esempio)



1: Identificazione elementi e connettività

Elementi	Nodi di Connessione
a	*1,2,3*
b	*2,4*
c	*3,5*
d	*4,5,6*

2: Identificazione delle proprietà elastiche di ogni elemento: E , ν.

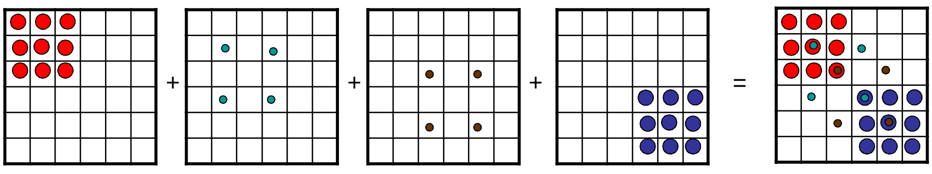
Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale

3: Identificazione della matrice di rigidezza di elemento $[K]^a$ e dei carichi nodali equivalenti ai carichi distribuiti e alle deformazioni iniziali $\{F\}^a_p$, $\{F\}^a_{\varepsilon_0}$ per ogni elemento: ciò consente di ottenere la relazione di equilibrio di elemento $\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}^a_p + \{F\}^a_{\varepsilon 0}$

4: Trasferimento delle informazioni di elemento di cui al punti 3, qualora calcolate in un riferimento locale, nel sistema globale, mediante matrici di trasformazione, per consentire l'assemblaggio della struttura.

5: Espansione alle dimensioni di struttura delle matrici di rigidezza di elemento e assemblaggio della matrice di struttura (6x6 sottomatrici 2x2 nell'esempio in esame)



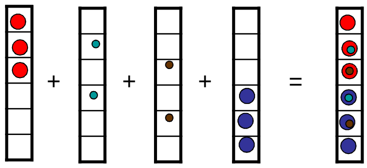
$$[K]^a + [K]^b + [K]^c + [K]^d = [K]$$

N.B. In generale la [K] è una matrice bandata

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale

6: Espansione alle dimensioni di struttura e assemblaggio delle: $\{F\}_p^a$, $\{F\}_{\varepsilon_0}^a$



$$\{F\}_p^a + \{F\}_p^b + \{F\}_p^c + \{F\}_p^d = \{F\}_p$$

7: Assemblaggio finale del sistema:

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0}$$

In questo sistema i carichi concentrati sulla struttura rientrano in $\{R\}$, quelli distribuiti in $\{F\}_p$ mentre i vincoli figurano in $\{d\}$ come componenti note. Per il problema elastico il sistema è lineare

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Soluzione del problema elastico: calcolo strutturale matriciale

8: Trattamento dei vincoli: eliminazione righe e colonne del sistema di cui al punto *7* (altrimenti indeterminato) corrispondenti ai gradi di libertà vincolati.

9: Soluzione del sistema di cui al punto 7, con tecniche di analisi numerica. Si ottengono gli spostamenti $\{d\}$. Riprendendo le equazioni eliminate al punto *8*, si determinano le reazioni dei gradi di libertà vincolati

10: Noto $\{d\}$, in base alle specifiche formulazioni di elemento, si può identificare il campo di tensione e deformazione $\{\sigma\},\{\varepsilon\}$, per ogni punto in seno ai singoli elementi

N.B. Tutto quanto esposto finora è valido per strutture discrete. Si vedrà in seguito come estendere i concetti a strutture continue, passando al vero e proprio *Metodo degli Elementi Finiti.*