Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale
Sapienza Università di Roma

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti

Docente: Luca Cortese

email: luca.cortese@uniroma1.it
ufficio: Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale, via Eudossiana 18, 1° piano, stanza 20.

Riferimenti e materiale didattico

Testi consigliati (opzionali):

- **G. Santucci, Dispense del Corso di Costruzione di Macchine**
- **O. C. Zienkiewicz , R L Taylor, Finite Element Method: Vol 1, The Basis, Butterworth-Heinemann.**
- **O. C. Zienkiewicz , R L Taylor, Finite Element Method: Vol 2, Solid Mechanics, Butterworth-Heinemann.**
- **K.J.Bathe. Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall.**

Materiale didattico:

Dispense ed esercitazioni sul sito: **www.costruzionedimacchine.it**

Introduzione

Introduzione al Corso

Introduzione al metodo degli elementi finiti

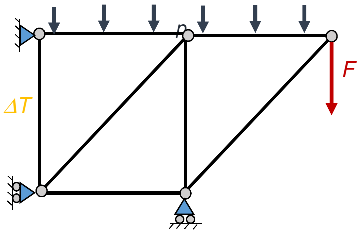
Problema: identificazione delle reazioni vincolari, dello stato tensionale e di deformazione di un componente o di un sistema meccanico noti condizioni di vincolo e carichi applicati.

La soluzione analitica è nota per geometrie semplici quali: aste, travi, piastre, gusci, solidi assialsimmetrici, etc. Le soluzioni sono spesso disponibili per il solo campo elastico. Esistono soluzioni in campo plastico per alcuni problemi semplici utilizzando modelli costitutivi per il materiale estremamente semplificati.

Negli altri casi è necessario ricorrere a metodi numerici approssimati.

Introduzione al metodo degli elementi finiti

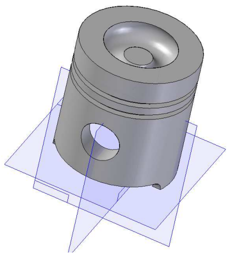
Alcuni sistemi meccanici possono essere visti come un insieme di elementi strutturali componenti, ognuno connesso ad altri mediante un numero discreto di punti nodali (sistema discreto).



Per questi problemi, se si conosce il comportamento meccanico (elastico) dei singoli elementi è possibile risalire alle caratteristiche dell'intera struttura e studiarne il comportamento statico mediante calcolo strutturale matriciale.
Il metodo si basa sul soddisfacimento delle condizioni di equilibrio e congruenza. E' difatto la sistematizzazione in forma matriciale del metodo degli spostamenti, normalmente utilizzato nell'ambito della meccanica dei solidi.

Introduzione al metodo degli elementi finiti

Molto spesso, invece, particolarmente nei componenti meccanici, la struttura è un continuo tridimensionale, che non presenta una preferenziale suddivisione in elementi semplici.

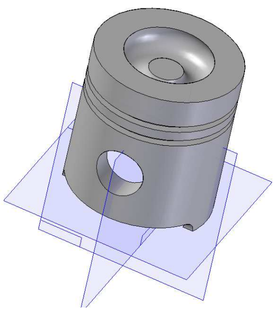


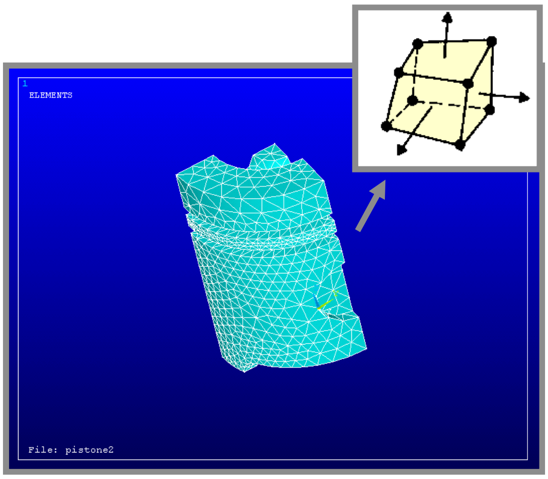
Il metodo degli elementi finiti è, in sostanza, lo studio dei criteri per i quali è possibile rappresentare il continuo meccanico mediante elementi discreti di cui si conosca il comportamento meccanico, interconnessi da un numero discreto di punti nodali, localmente equivalenti da un punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.
Una volta effettuata tale discretizzazione, è possibile studiare il comportamento del continuo mediante calcolo strutturale matriciale

Il problema strutturale si traduce in estrema sintesi nella soluzione di un sistema di equazioni (lineari?) con incognite gli spostamenti nodali.

Introduzione al metodo degli elementi finiti

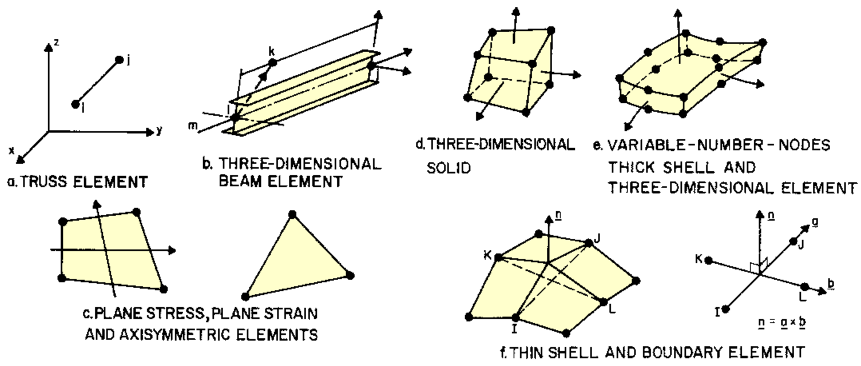
Discretizzazione del continuo mediante elementi finiti





Introduzione al metodo degli elementi finiti

Discretizzazione del continuo mediante elementi finiti



Introduzione al Corso

Introduzione al metodo degli elementi finiti

Esempio di soluzione del problema elastico:

Sistema di equazioni lineari

Campo di spostamenti nodali

Funzioni di forma

Campo di spostamenti all'interno degli elementi

Hp: piccoli spostamenti

Campo deformativo locale

Relazioni di Hooke

Campo tensionale locale

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Introduzione al Corso

Introduzione al metodo degli elementi finiti

Step tipici di una analisi agli Elementi Finiti:

- Modellazione della geometria equivalente al problema reale
- Scelta tipo/i di elemento da usare per la discretizzazione
- Scelta modello di materiale: parametri caratteristici
- Discretizzazione
- Applicazione carichi e vincoli equivalenti a quelli reali
- Impostazione del tipo di analisi
- Soluzione agli elementi finiti
- Fase di post-processo: analisi e raccolta dei risultati

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Introduzione al Calcolo Strutturale Matriciale

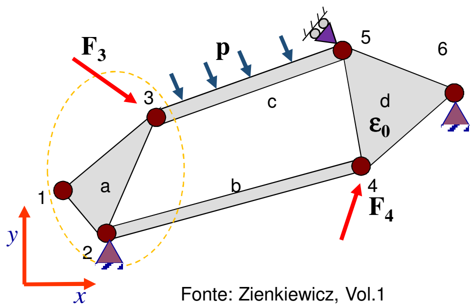
Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta

Per struttura discreta si intende un sistema meccanico composto da elementi strutturali caratterizzati da una propria individualità, connessi tra loro tramite un numero discreto di punti nodali.
I nodi possono essere soggetti a vincoli e a carichi concentrati. Eventuali carichi distribuiti possono essere applicati direttamente agli elementi costituenti.

Mediante calcolo strutturale matriciale è possibile risolvere questa classe di problemi, sia per configurazioni isostatiche che iperstatiche.
In particolare, è possibile identificare la configurazione di equilibrio, le reazioni vincolari, lo stato di tensione e deformazione nei singoli componenti.
Tutto ciò esprimendo le grandezze in funzione degli **spostamenti nodali**, e a patto di conoscere le proprietà elastiche degli elementi costituenti.

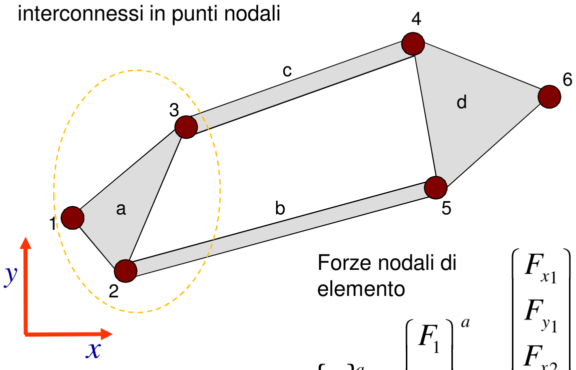


Fonte: Zienkiewicz, Vol.1

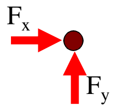
Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta, esempio bidimensionale, definizioni

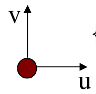
Elementi bidimensionali individuali interconnessi in punti nodali



Forze e spostamenti nodali



$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix}$$



$$\{d_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

Forze nodali di elemento

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}^a$$

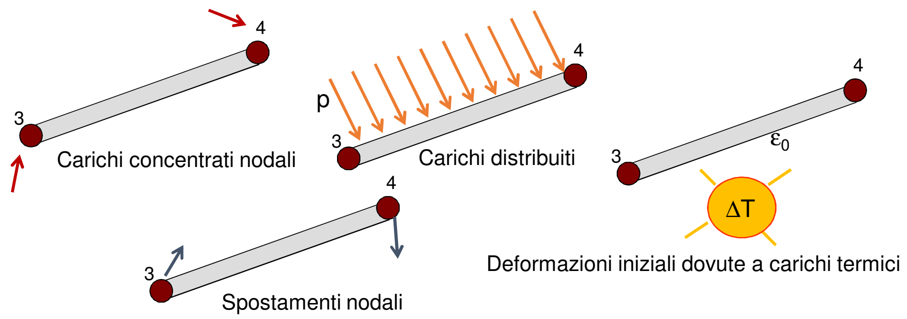
Spostamenti nodali di elemento

$$\{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^a$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta, esempio bidimensionale, carichi e relazione di equilibrio

Tipologie di carichi agenti e spostamenti in un generico elemento «*e*» della struttura, ex: asta



Per risolvere il problema discreto, è necessario partire dalla relazione che esprime la condizione di equilibrio di elemento all'interno della struttura

$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

Struttura discreta: significato dell'equazione di equilibrio

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

$\{F\}^e$ Vettore delle forze agenti sui nodi

$\{F\}_p^e$ Vettore delle forze nodali necessarie ad equilibrare i carichi distribuiti

$\{F\}_{\varepsilon_0}^e$ Vettore delle forze nodali necessarie ad equilibrare forze di volume (ex: deformazioni iniziali)

$\{F\}_d^e = [K]^e\{d\}^e$ Vettore delle forze nodali necessarie a produrre lo spostamento elastico dei nodi descritto dal vettore $\{d\}^e$

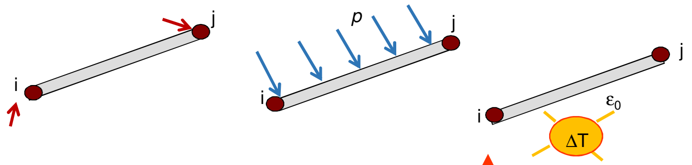
Elemento Asta Piana

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Asta nel piano, di sezione uniforme *A*, lunghezza *L*. Parametri elastici del materiale omogeneo e isotropo *E*,*ν*. Asta "generalizzata", in grado di reagire a trazione-compressione per l'effetto dei carichi concentrati nodali e deformazioni iniziali, e a flessione, sotto l'azione dei carichi distribuiti.

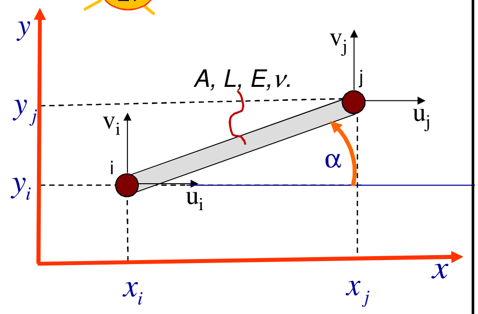


Lunghezza dell'asta

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

Angolo formato dall'asta con l'asse delle ascisse

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right)$$



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

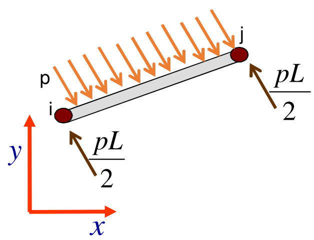
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}^e_p + \{F\}^e_{\varepsilon 0}$$

Forze nodali equivalenti ai carichi distribuiti:

$$\{F\}^e_p = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}^e_p = \frac{pL}{2}\begin{Bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}$$



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

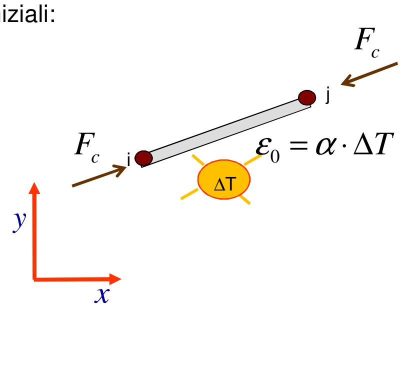
$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

Forze nodali che impediscono le deformazioni iniziali:

$$\varepsilon_0 = \alpha \Delta T \qquad \sigma_0 = E \varepsilon_0$$

$$F_c = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0}^e = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{Bmatrix}$$



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

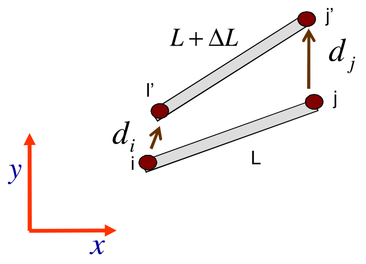
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

Spostamenti nodali

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$



Allungamento dell'asta

$$\Delta L = (u_j - u_i)\cos\alpha + (v_j - v_i)\sin\alpha$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

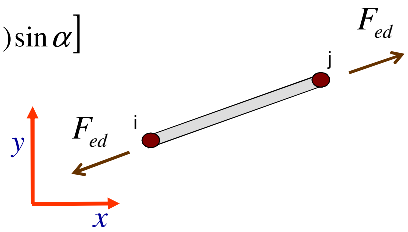
$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

Forza assiale in grado di produrre l'allungamento ΔL

$$F_{ed} = A \cdot E \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{EA}{L}\left[(u_j - u_i)\cos\alpha + (v_j - v_i)\sin\alpha\right]$$

In componenti

$$\{F\}_d^e = \begin{Bmatrix} F_{d_i} \\ F_{d_j} \end{Bmatrix}_d^e = \begin{Bmatrix} -cF_{ed} \\ -sF_{ed} \\ cF_{ed} \\ sF_{ed} \end{Bmatrix}_d^a = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix}$$



$c = \cos\alpha$

$s = \sin\alpha$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

$$F_{xi} = \frac{EA}{L}\left(+u_i c^2 + v_i sc - u_j c^2 - v_j sc\right)$$

$$F_{yi} = \frac{EA}{L}\left(+u_i sc + v_i s^2 - u_j sc - v_j s^2\right)$$

$$F_{xj} = \frac{EA}{L}\left(-u_i c^2 - v_i sc + u_j c^2 + v_j sc\right)$$

$$F_{yj} = \frac{EA}{L}\left(-u_i sc - v_i s^2 + u_j sc + v_j s^2\right)$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

In notazione matriciale:

$$\{F\}_d^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} = [K]^e\{d\}^e$$

$$K_{ij} = \frac{EA}{L}(-1)^{i+j}\begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}$$

N.B. [K] è sempre simmetrica, conseguenza della conservazione dell'energia

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

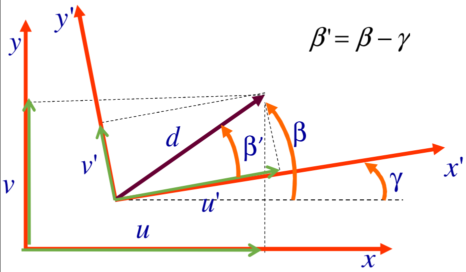
$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

Per l'asta "generalizzata" si ha dunque:

$$\{F\}^e = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}^e \{d\}^e + \frac{pL}{2}\begin{Bmatrix} -s \\ c \\ -s \\ c \end{Bmatrix} + E\alpha\Delta T\begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trasformazione di coordinate: caso bidimensionale



$$\beta' = \beta - \gamma$$

$$\cos\beta' = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$
$$\sin\beta' = \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma$$

$$u = d\cos\beta \qquad u' = d\cos\beta'$$
$$v = d\sin\beta \qquad v' = d\sin\beta'$$

$$u' = d\cos\beta\cos\gamma + d\sin\beta\sin\gamma = u\cos\gamma + v\sin\gamma$$
$$v' = d\sin\beta\cos\gamma - d\cos\beta\sin\gamma = -u\sin\gamma + v\cos\gamma$$

$$\{d_i'\} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}\{d_i\} = [L_{ii}]\{d_i\}$$

Ad esempio, per un elemento monodimensionale a 2 nodi nel piano:

$$\{d'\}^e = \begin{Bmatrix} d_i' \\ d_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ii} & 0 \\ 0 & L_{jj} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} = [L]\{d\}^e$$

Il procedimento è valido per qualsiasi vettore, per cui:

$$\{F'\}^e = \begin{Bmatrix} F_i' \\ F_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ii} & 0 \\ 0 & L_{jj} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = [L]\{F\}^e$$

Spesso si pone l'asse x' coincidente con l'asse dell'elemento: $\beta' = 0 \quad \beta = \gamma = \alpha$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trasformazione di coordinate: caso bidimensionale

Nel caso dell'asta piana

$$\{d'\}^e = \begin{Bmatrix} d_i' \\ d_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}\{d\}^e$$

$$\beta' = 0 \quad \beta = \gamma = \alpha \qquad c = \cos\alpha \quad s = \sin\alpha$$

La matrice di rigidezza nel riferimento locale si scrive:

$$F_{xi}' = \frac{EA}{L}u_i' - \frac{EA}{L}u_j'$$
$$F_{xj}' = -\frac{EA}{L}u_i' + \frac{EA}{L}u_j'$$

$$[F'] = [K'][d']$$

quindi: $[K'] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Da cui si ricava:

$$[K] = [L]^T[K'][L] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano: tensioni e deformazioni agenti

Deformazioni e tensioni massime e minime di elemento

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{L}\begin{bmatrix}-c & -s & c & s\\ -c & -s & c & s\end{bmatrix}\{d\}^e+\frac{pL^2z}{8EI}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}-\alpha\Delta T\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{Bmatrix}=\frac{E}{L}\begin{bmatrix}-c & -s & c & s\\ -c & -s & c & s\end{bmatrix}\{d\}^e+\frac{pL^2z}{8I}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}-E\alpha\Delta T\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$$

z semi-ampiezza della sezione trasversale dell'asta

N.B. L'asta "pura" si comporta solo come puntone, reagendo soltanto a trazione-compressione, e non a flessione. In tal caso non è possibile applicare carichi distribuiti. Tutte le espressioni relative all'asta generalizzata, si possono particolarizzare eliminando i contributi dovuti a tali carichi.

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: vettori forza e spostamento di elemento

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e=[K]^e\{d\}^e+\{F\}_p^e+\{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

m = numero dei nodi di elemento

l = numero dei gradi di libertà per nodo

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}F_1\\ ..\\ F_i\\ ..\\ F_m\end{Bmatrix}^e \qquad \{d\}^a=\begin{Bmatrix}d_1\\ ..\\ d_i\\ ..\\ d_m\end{Bmatrix}^e \qquad \{F_i\}=\begin{Bmatrix}F_{i1}\\ ..\\ F_{il}\end{Bmatrix} \qquad \{d_i\}=\begin{Bmatrix}d_{i1}\\ ..\\ d_{il}\end{Bmatrix}$$

Dunque i vettori forza e spostamento hanno in generale *m* x *l* elementi

N.B Le componenti di forza e spostamento sono "generalizzate", potendo trattarsi anche di momenti e rotazioni

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: matrice di rigidezza di elemento

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

m = numero dei nodi di elemento

l = numero dei gradi di libertà per nodo

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1i} & .. & K_{1m} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{i1} & .. & K_{ij} & .. & K_{im} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{m1} & .. & K_{mj} & .. & K_{mm} \end{bmatrix}$$

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{ij_{11}} & .. & K_{ij_{1l}} \\ .. & & .. \\ K_{ij_{1l}} & .. & K_{ij_{ll}} \end{bmatrix}$$

$[K]^e$ Matrice di rigidezza di elemento, di dimensioni *ml x ml*

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: matrice di rigidezza di elemento

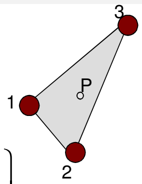
Significato dei termini della matrice di rigidezza di elemento

$$\{F\}_d^e = \begin{Bmatrix} F_{d_1} \\ .. \\ F_{d_i} \\ .. \\ F_{d_m} \end{Bmatrix}_d^e = \begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1i} & .. & K_{1m} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{i1} & .. & K_{ij} & .. & K_{im} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{m1} & .. & K_{mj} & .. & K_{mm} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_m \end{Bmatrix}^e = [K]^e \{d\}^e$$

Il generico termine K_{ij} consente di determinare la quota parte della componente i-esima della $\{F\}_d$ elastica che si genera qualora si imponesse la j-esima componente del vettore {d}, mantenendo nulli tutti gli altri spostamenti di elemento.

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: tensioni e deformazioni di elemento



In ogni punto *P* interno all'elemento discreto, o soltanto per i punti critici, è possibile descrivere il campo di tensione e deformazione, in funzione degli spostamenti nodali, mediante espressioni matriciali del tipo:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}^e$$

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ .. \\ \varepsilon_{r_\varepsilon} \end{Bmatrix} \qquad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ .. \\ \sigma_{r_\sigma} \end{Bmatrix}$$

dimensionalmente:

$[B]\ [r_\varepsilon\ x\ \ ml]$ Matrice di deformazione

$[D]\ [r_\sigma\ \ x\ \ r_\varepsilon]$ Matrice di elasticità (è l'inverso del legame costitutivo elastico!)

N.B. Nel caso più generale le componenti delle espressioni sono *f(x,y,z)*, coordinate di *P* all'interno dell'elemento considerato