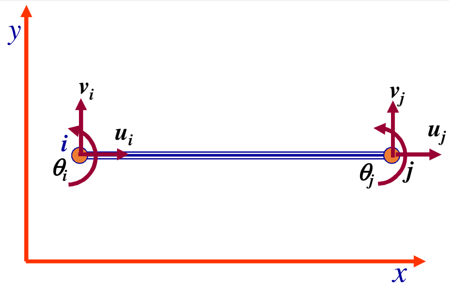
Elemento Trave nel piano

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana



Tre gradi di libertà per nodo (nel piano)

Due nodi per elemento

↓

Sei gradi di libertà per elemento

↓

Vettori di elemento: 6x1
Matrice di rigidezza di elemento: 6 x 6

Vettore forze nodali — Vettore spostamenti nodali

$$\begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

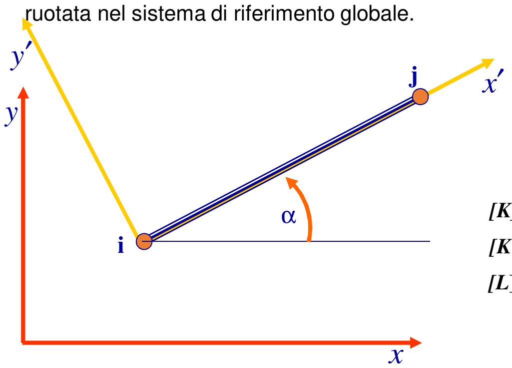
Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana

Si cerca sempre una relazione di equilibrio di elemento nella forma:

$$\{F\}^e = [K]^e \{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

Qui la difficoltà maggiore è identificare la sola matrice di rigidezza *[K]*. I vettori $\{F\}_p$ e $\{F\}_{\varepsilon 0}$ si calcolano in maniera molto simile a quanto già visto per l'elemento asta.
Per la trave piana, la matrice *[K]* viene prima calcolata nel sistema di riferimento locale e poi ruotata nel sistema di riferimento globale.



$$[K] = [L]^T \, [K'] \, [L]$$

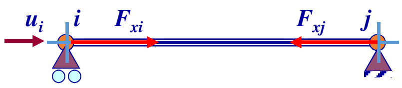
[K] = matrice di rigidezza nel sistema globale

[K'] = matrice di rigidezza nel sistema locale

[L] = matrice di rotazione

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti assiali



Imponendo lo spostamento nodale u_i, mantenendo vincolati tutti gli altri gradi di libertà dell'elemento, si generano le forze nodali F_{xi} ed F_{xj}

$$F_{xi} = \frac{EA}{L} u_i \qquad F_{xj} = -\frac{EA}{L} u_i$$

A = area della sezione

L = lunghezza

E = Modulo di Young

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti assiali

$$F_{xi} = \frac{EA}{L} u_i \quad F_{xj} = -\frac{EA}{L} u_i$$

In modo analogo è possibile trovare si possono trovare le parti F_{xi} ed F_{xj} dovute questa volta al solo spostamento u_j :

$$F_{xj} = \frac{EA}{L} u_j \quad F_{xi} = -\frac{EA}{L} u_j$$

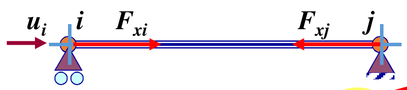
La relazione tra forze e spostamenti nodali dell'elemento può essere scritta in forma matriciale

Queste sono le F_{xi} ed F_{xj} totali, somma dei contributi dovuti agli spostamenti u_i e u_j agenti singolarmente:

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti assiali



A = area della sezione
L = lunghezza
E = Modulo di Young

La matrice di rigidezza dell'elemento trave, nel piano, ha dimensioni 6x6.

Conviene quindi espandere la matrice 2x2, relativa alle sole componenti assiali, in una matrice 6x6.

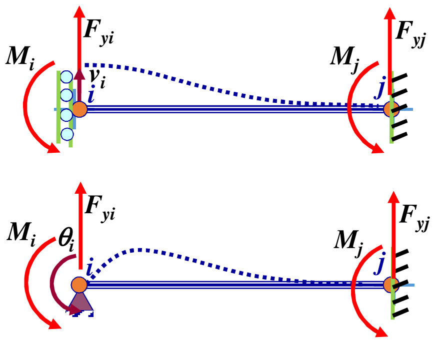
I coefficienti non definiti sono per il momento nulli.

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & -\frac{EA}{L} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ -\frac{EA}{L} & & & \frac{EA}{L} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

Per individuare le componenti flessionali si dovrebbe procedere in modo analogo a quanto visto per le componenti assiali: imponendo uno spostamento alla volta si osservano le forze che si generano conseguentemente. In questo modo è possibile ricavare i coefficienti della matrice *[K]*, a patto di risolvere un problema iperstatico..



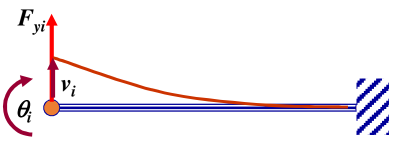
$$\begin{Bmatrix} F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & & \\ ? & ? & & \\ ? & ? & & \\ ? & ? & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Etc…

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

Conviene invece applicare più condizioni contemporaneamente su una struttura isostatica e poi usare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si consideri una trave incastrata ad un estremo e libera all'altro:



dove:

L = lunghezza

J = Momento d'inerzia della sezione

E = Modulo di Young

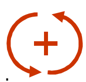
Applicando all'estremo libero una forza F_{yi}, normale all'asse della trave, si otterrà uno spostamento v_i, dato dalla nota relazione:

$$v_i = \frac{F_{yi} L^3}{3EJ}$$

ed una rotazione θ_i, data dalla relazione:

$$\vartheta_i = -\frac{F_{yi} L^2}{2EJ}$$

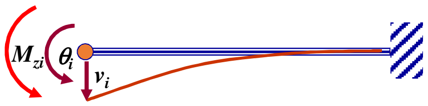
Convenzione per momenti e rotazioni: positivi se antiorari



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

Conviene invece applicare più condizioni contemporaneamente su una struttura isostatica e poi usare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si consideri una trave incastrata ad un estremo e libera all'altro:



dove:

L = lunghezza

J = Momento d'inerzia della sezione

E = Modulo di Young

Applicando invece un momento M_{zi} , i valori dello spostamento v_i e della rotazione θ_i sono calcolati dalle relazioni:

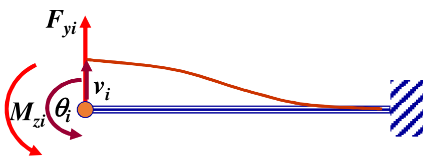
$$v_i = -\frac{M_{zi}L^2}{2EJ}$$

$$\vartheta_i = \frac{M_{zi}L}{EJ}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

Si consideri una trave incastrata ad un estremo e libera all'altro.



dove:

L = lunghezza

J = Momento d'inerzia della sezione

E = Modulo di Young

Applicando all'estremo libero sia la forza F_{yi} che il momento M_{zi} si ottengono lo spostamento v_i e la rotazione θ_i

$$v_i = \frac{F_{yi}L^3}{3EJ} - \frac{M_{zi}L^2}{2EJ}$$

$$\vartheta_i = -\frac{F_{yi}L^2}{2EJ} + \frac{M_{zi}L}{EJ}$$

Invertendo, mediante semplici passaggi:

$$F_{yi} = \frac{12EI}{L^3}v_i + \frac{6EI}{L^2}\theta_i$$

$$M_{zi} = \frac{6EI}{L^2}v_i + \frac{4EI}{L}\theta_i$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

I coefficienti calcolati per il nodo $\boldsymbol{i}$, relativi ai gradi di libertà v_i e θ_i , possono essere dunque espressi in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} F_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

N.B. Anche in questo caso le forze sono la quota parte dovuta agli spostamenti presi in considerazione. Stesso discorso per i calcoli delle diapositive successive. Soltanto quando verrà considerata la matrice di rigidezza completa le forze saranno quelle totali

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

La forza ed il momento relativi al nodo $\boldsymbol{j}$ e dipendenti dallo spostamento e dalla rotazione del nodo $\boldsymbol{i}$ possono essere calcolati utilizzando le equazioni di equilibrio:

$$\sum F = F_{yi} + F_{yj} = 0 \longrightarrow F_{yj} = -F_{yi}$$

da cui si ricava immediatamente che:

$$F_{xj} = -\frac{12EJ}{L^3} v_i - \frac{6EJ}{L^2} \vartheta_i$$

Dall'equilibrio dei momenti si ottiene: $\sum M = -F_{yi}L + M_{zi} + M_{zj} = 0 \longrightarrow$

$$M_{zj} = F_{yi}L - M_{zi} = \frac{6EJ}{L^2} v_i + \frac{2EJ}{L} \vartheta_i$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

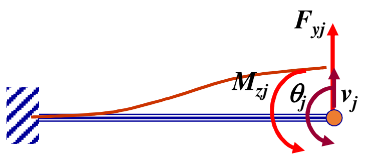
Quindi i coefficienti calcolati per il nodo j, relativi ai gradi di libertà v_i e θ_i , possono essere espressi in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

Per il nodo j si procede in modo analogo, a meno del diverso segno dei momenti e delle rotazioni:



In questo caso, applicando all'estremo libero sia la forza F_{yj} che il momento M_{zj} si ottengono le seguenti relazioni per lo spostamento v_j e la rotazione θ_j:

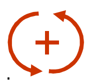
$$v_j = \frac{F_{yj} L^3}{3EJ} + \frac{M_{zj} L^2}{2EJ}$$

$$\vartheta_j = \frac{F_{yj} L^2}{2EJ} + \frac{M_{zj} L}{EJ}$$

Operando come nel caso precedente si giunge alla seguente relazione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Convenzione per momenti e rotazioni: positivi se antiorari



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

Sfruttando ancora le condizioni di equilibrio si ha:

$$\sum F = F_{yi} + F_{yj} = 0 \longrightarrow F_{yi} = -F_{yj}$$

$$\sum M = -F_{yj}L + M_{zi} + M_{zj} = 0 \qquad M_{zi} = F_{yj}L - M_{zj}$$

Di conseguenza i coefficienti calcolati per il nodo i, relativi ai gradi di libertà v_j e θ_j, possono essere espressi in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} F_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{12EJ}{L^3} & \dfrac{6EJ}{L^2} \\ -\dfrac{6EJ}{L^2} & \dfrac{2EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana, calcolo matrice di rigidezza: componenti flessionali

I coefficienti di rigidezza flessionali possono essere rappresentati in una matrice 4 x 4 come segue

$$\begin{Bmatrix} F_{yi} \\ M_{zi} \\ V_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{12EJ}{L^3} & \dfrac{6EJ}{L^2} & -\dfrac{12EJ}{L^3} & \dfrac{6EJ}{L^2} \\ \dfrac{6EJ}{L^2} & \dfrac{4EJ}{L} & -\dfrac{6EJ}{L^2} & \dfrac{2EJ}{L} \\ -\dfrac{12EJ}{L^3} & -\dfrac{6EJ}{L^2} & \dfrac{12EJ}{L^3} & -\dfrac{6EJ}{L^2} \\ \dfrac{6EJ}{L^2} & \dfrac{2EJ}{L} & -\dfrac{6EJ}{L^2} & \dfrac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana: Matrice di Rigidezza di Elemento, riferimento locale

Ora sono noti tutti i coefficienti di rigidezza dell'elemento e può essere scritta l'intera matrice di rigidezza dell'elemento.

$$\begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

N.B. i termini nulli indicano che non vi è accoppiamento tra forze assiali e momento flettente e tra forze assiali e taglio. Questo è previsto dalla teoria elementare della trave.

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

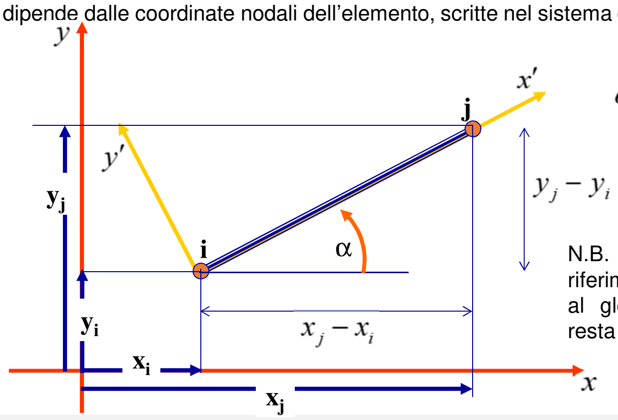
Trasformazioni di coordinate

La matrice di rigidezza ottenuta è scritta nel sistema di riferimento locale.

Per calcolare la matrice nel sistema globale è necessario eseguire il prodotto matriciale:

$$[K] = [L]^T \, [K'] \, [L]$$

Dove *[L]* è la matrice di rotazione, che può essere scritta in funzione dell'angolo α che dipende dalle coordinate nodali dell'elemento, scritte nel sistema globale.



$$\alpha = arc\tan\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

N.B. Nel caso dell'asta piana il riferimento locale è ruotato rispetto al globale attorno all'asse z, che resta comune ai due sistemi

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trasformazioni di coordinate

La matrice di rotazione *[L]* scritta nel piano, per due gradi di libertà di traslazione ed uno di rotazione, ha la forma:

$[L] =$

$\cos\alpha$	$\text{sen}\,\alpha$	0	0	0	0
$-\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$\cos\alpha$	$\text{sen}\,\alpha$	0
0	0	0	$-\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	0
0	0	0	0		1

La trasposta si ricava molto semplicemente scambiando le righe con le colonne:

$[L]^T =$

$\cos\alpha$	$-\text{sen}\,\alpha$	0	0	0	0
$\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$\cos\alpha$	$-\text{sen}\,\alpha$	0
0	0	0	$\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	0
0	0	0	0		1

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trasformazioni di coordinate

Il primo prodotto matriciale:

$$[K'] \, [L]$$

Abbreviazioni: $c = \cos\alpha$
$s = \text{sen}\,\alpha$

$\cos\alpha$	$\text{sen}\,\alpha$	0	0	0	0
$-\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	$\cos\alpha$	$\text{sen}\,\alpha$	0
0	0	0	$-\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	0
0	0	0	0		1

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
0	$\frac{12EJ}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$	0	$-\frac{12EJ}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$
0	$\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$	0	$-\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0
0	$-\frac{12EJ}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$	0	$\frac{12EJ}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$
0	$\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$	0	$-\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$

$\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0	$-\frac{EAc}{L}$	$-\frac{EAs}{L}$	0
$-\frac{12EJs}{L^3}$	$\frac{12EJc}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$	$\frac{12EJs}{L^3}$	$-\frac{12EJc}{L^3}$	$\frac{6EJ}{L^2}$
$-\frac{6EJs}{L^2}$	$\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$	$\frac{6EJs}{L^2}$	$-\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$
$-\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0	$\frac{EAc}{L}$	$\frac{EAs}{L}$	0
$\frac{12EJs}{L^3}$	$-\frac{12EJc}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$	$-\frac{12EJs}{L^3}$	$\frac{12EJc}{L^3}$	$-\frac{6EJ}{L^2}$
$-\frac{6EJs}{L^2}$	$\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{2EJ}{L}$	$\frac{6EJs}{L^2}$	$-\frac{6EJc}{L^2}$	$\frac{4EJ}{L}$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trasformazioni di coordinate

Il secondo prodotto matriciale:

$$[L]^T \left[[K'] \; [L] \right]$$

Abbreviazioni: $c = \cos\alpha$
$s = \operatorname{sen}\alpha$

$$\begin{bmatrix} \frac{EAc}{L} & \frac{EAs}{L} & 0 & -\frac{EAc}{L} & -\frac{EAs}{L} & 0 \\ -\frac{12EJs}{L^3} & \frac{12EJc}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{12EJs}{L^3} & -\frac{12EJc}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ -\frac{6EJs}{L^2} & \frac{6EJc}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{6EJs}{L^2} & -\frac{6EJc}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{EAc}{L} & \frac{EAs}{L} & 0 & \frac{EAc}{L} & \frac{EAs}{L} & 0 \\ \frac{12EJs}{L^3} & -\frac{12EJc}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & -\frac{12EJs}{L^3} & \frac{12EJc}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ -\frac{6EJs}{L^2} & \frac{6EJc}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{6EJs}{L^2} & -\frac{6EJc}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} Ac^2+\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s & -Ac^2-\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s \\ \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2+\frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2-\frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c \\ -\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 4J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 2J \\ -Ac^2-\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s & Ac^2+\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s \\ \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2-\frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2+\frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c \\ -\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 2J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 4J \end{bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana: Matrice di Rigidezza di Elemento, riferimento globale

La matrice di rigidezza 6 x 6 di un elemento trave nel piano è dunque:

$$[K] = \frac{E}{L} \cdot \begin{bmatrix} Ac^2+\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s & -Ac^2-\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -\frac{6J}{L}s \\ \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2+\frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2-\frac{12J}{L^2}c^2 & \frac{6J}{L}c \\ -\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 4J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 2J \\ -Ac^2-\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s & Ac^2+\frac{12J}{L^2}s^2 & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & \frac{6J}{L}s \\ \left(-A+\frac{12J}{L^2}\right)sc & -As^2-\frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c & \left(A-\frac{12J}{L^2}\right)sc & As^2+\frac{12J}{L^2}c^2 & -\frac{6J}{L}c \\ -\frac{6J}{L}s & \frac{6J}{L}c & 2J & \frac{6J}{L}s & -\frac{6J}{L}c & 4J \end{bmatrix}$$

Per calcolarla è necessario conoscere la caratteristica elastica del materiale e i dati geometrici dell'elemento: →

L = lunghezza
A = area della sezione
J = Momento d'inerzia della sezione
E = Modulo di Young

$$\alpha = arc\tan\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

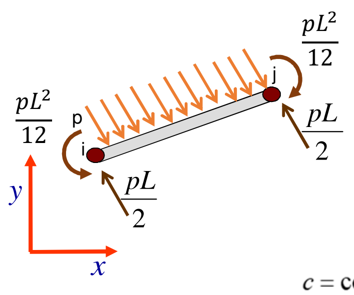
Elemento trave piana, effetto dei carichi distribuiti

Una volta ricavata la matrice di rigidezza *[K]*, nell'equazione di equilibrio della trave piana rimangono da calcolare i vettori nodali equivalenti che equilibrano i carichi distribuiti:

$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$$

Carico uniformemente distribuito *p*: in questo caso lo schema è quello di una trave incastrata-incastrata:

$$\{F\}_p^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_p^e = \begin{Bmatrix} -\frac{pL}{2}s \\ \frac{pL}{2}c \\ \frac{pL^2}{12} \\ -\frac{pL}{2}s \\ \frac{pL}{2}c \\ -\frac{pL^2}{12} \end{Bmatrix}_p^e$$



$c = \cos\alpha$
$s = \mathrm{sen}\,\alpha$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

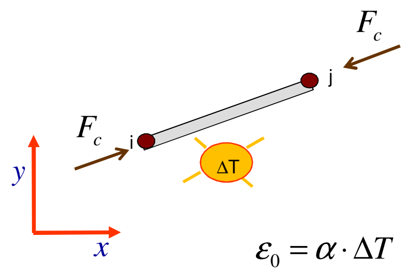
Elemento trave piana, effetto dei carichi distribuiti

Le forze nodali che impediscono le deformazioni iniziali sono le stesse già viste per l'asta piana:

$$\varepsilon_0 = \alpha \Delta T \qquad \sigma_0 = E\varepsilon_0$$

$$F_c = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A$$

$$\{F\}_{\epsilon 0}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_{\epsilon 0}^e = E\alpha\Delta T A \begin{Bmatrix} c \\ s \\ 0 \\ -c \\ -s \\ 0 \end{Bmatrix}_{\epsilon 0}^e$$



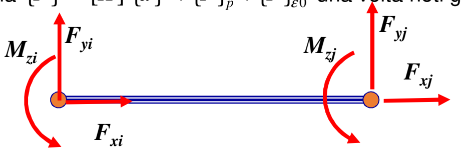
$\varepsilon_0 = \alpha \cdot \Delta T$

$c = \cos\alpha$
$s = \mathrm{sen}\,\alpha$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana: stato di tensione e deformazione nell'elemento

Nella configurazione di equilibrio, per ogni sezione individuata dall'ascissa *x*, sono note le caratteristiche di sollecitazione (sforzo normale, taglio e momento flettente) agenti ai nodi, calcolabili tramite la $\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e$ una volta noti gli spostamenti nodali.



Trascurando l'effetto del taglio, lecito per travi snelle, ai nodi si avrà uno stato di tensione e deformazione monoassiale indotto dalla sovrapposizione degli effetti normali e flessionali. I due punti critici coincidono con la fibra tesa e compressa delle sezioni ai nodi, e si avrà:

$$\sigma_{xi}^{norm} = \frac{F_{xi}}{A} \qquad \sigma_{xj}^{norm} = \frac{F_{xj}}{A}$$

$$\sigma_{xi}^{flex} = \pm\frac{M_{zi}}{J}z \qquad \sigma_{xj}^{flex} = \pm\frac{M_{zj}}{J}z$$

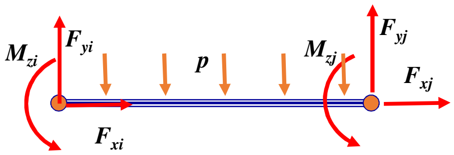
$$\sigma_{tot} = \sigma_{eqv} = \sigma^{norm} + \sigma^{flex}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Trave piana: stato di tensione e deformazione nell'elemento

All'interno dell'elemento l'identificazione di tensioni e deformazioni è più complessa rispetto di quanto visto ai nodi per la presenza dei carichi distribuiti e delle def. Iniziali.
Si avrà quindi in generale *{ε}={ε(x)}, {σ}={σ(x)}*, con x orientata come l'asse della trave.

$$\{\varepsilon\} = ? \qquad \{\sigma\} = ?$$



E' comunque possibile identificare gli effetti (in campo elastico vale anche il p.s.e, per cui si possono valutare un effetto alla volta e poi sommarli), utilizzando la teoria della trave.