

**Problemi spaziali:  
Elemento tetraedrico a 4 nodi**

*Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci*

L.Cortese      Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti*

**Elemento tetraedrico a 4 nodi**

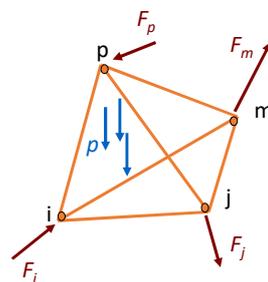
La trattazione è analoga a quella vista per l'elemento triangolare a 3 nodi

Vettori spostamento e forze di elemento

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \\ d_p \end{Bmatrix} \quad \{d_k\} = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} \quad k = i, j, m, p$$

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \\ F_p \end{Bmatrix} \quad \{F_k\} = \begin{Bmatrix} F_{xk} \\ F_{yk} \\ F_{zk} \end{Bmatrix} \quad k = i, j, m, p$$

3 g.d.l. traslazionali nello spazio



L.Cortese      Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento tetraedrico a 4 nodi : funzioni di forma**

Spostamento in seno all'elemento

Funzioni di forma lineari:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$u = q_1 + q_2x + q_3y + q_4z$$

$$v = q_5 + q_6x + q_7y + q_8z$$

$$w = q_9 + q_{10}x + q_{11}y + q_{12}z$$

Le 12 costanti  $q$  possono essere ricavate risolvendo 3 sistemi di 4 equazioni in 4 incognite ognuno, del tipo:

$$u_i = q_1 + q_2x_i + q_3y_i + q_4z_i$$

$$u_j = q_1 + q_2x_j + q_3y_j + q_4z_j$$

$$u_m = q_1 + q_2x_m + q_3y_m + q_4z_m$$

$$u_p = q_1 + q_2x_p + q_3y_p + q_4z_p$$

.... ..

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento tetraedrico a 4 nodi: funzioni di forma**

Reinserendo nelle funzioni di forma le incognite  $q$  trovate è possibile esprimere gli spostamenti in seno all'elemento mediante relazioni del tipo:

$$u = \sum_{k=i}^p \frac{(a_k + b_kx + c_ky + d_kz)}{6V} u_k = \sum_{k=i}^p N_k' u_k \quad \text{con} \quad N_k' = \frac{(a_k + b_kx + c_ky + d_kz)}{6V}$$

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad \dots$$

In forma partizionata

$$\{f\} = [N_i'[I] \quad N_j'[I] \quad N_m'[I] \quad N_k'[I]] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \\ d_p \end{Bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti*

**Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di deformazione**

Vettore deformazione, 6 componenti indipendenti nello spazio:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dy} \\ \frac{dw}{dz} \\ \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \end{Bmatrix} = [B_i \ B_j \ B_m \ B_p] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \\ d_p \end{Bmatrix} = [B]\{d\}^e$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti*

**Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di deformazione**

Componenti della matrice di deformazione

$$[B_k] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k'}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial z} \\ \frac{\partial N_k'}{\partial y} & \frac{\partial N_k'}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial z} & \frac{\partial N_k'}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k'}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_k & 0 & 0 \\ 0 & c_k & 0 \\ 0 & 0 & d_k \\ c_k & b_k & 0 \\ 0 & d_k & c_k \\ d_k & 0 & b_k \end{bmatrix} \quad k = i, j, m, p$$

Eventuali deformazioni iniziali possono essere descritte mediante un vettore ancora a 6 componenti

$$\{\varepsilon_0\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di elasticità**

Campo di tensione in seno all'elemento

$$\{\sigma\} = [D] \left( [B] \{d\}^e - \{\varepsilon_0\} \right) + \{\sigma_0\}$$

Matrice di elasticità 6x6, caso generale

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu' & \nu' & 0 & 0 & 0 \\ \nu' & 1 & \nu' & 0 & 0 & 0 \\ \nu' & \nu' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m' \end{bmatrix} \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad m' = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di rigidezza**

Per quanto riguarda la matrice di rigidezza, vale un'espressione in forma chiusa analoga a quella vista per l'elemento triangolare piano

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] V = \begin{bmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \end{bmatrix} [D] [B_i \ B_j \ B_m] \cdot V$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} B_i^T DB_i & B_i^T DB_j & B_i^T DB_m \\ B_j^T DB_i & B_j^T DB_j & B_j^T DB_m \\ B_m^T DB_i & B_m^T DB_j & B_m^T DB_m \end{bmatrix} \cdot V$$

La generica sottomatrice può essere scritta come segue:

$$[K]_{rs} = [B]_r^T [D] [B]_s \cdot V$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti*

## Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di rigidezza

Vettori forze nodali equivalenti

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^e = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} V$$

$$\{F_{\sigma_0}\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV$$

$$\{F\}_p^e = - \int_V [N]^T \{p\} dV \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$$