

Problemi di tipo assialsimmetrico:
Elemento triangolare a 3 nodi

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

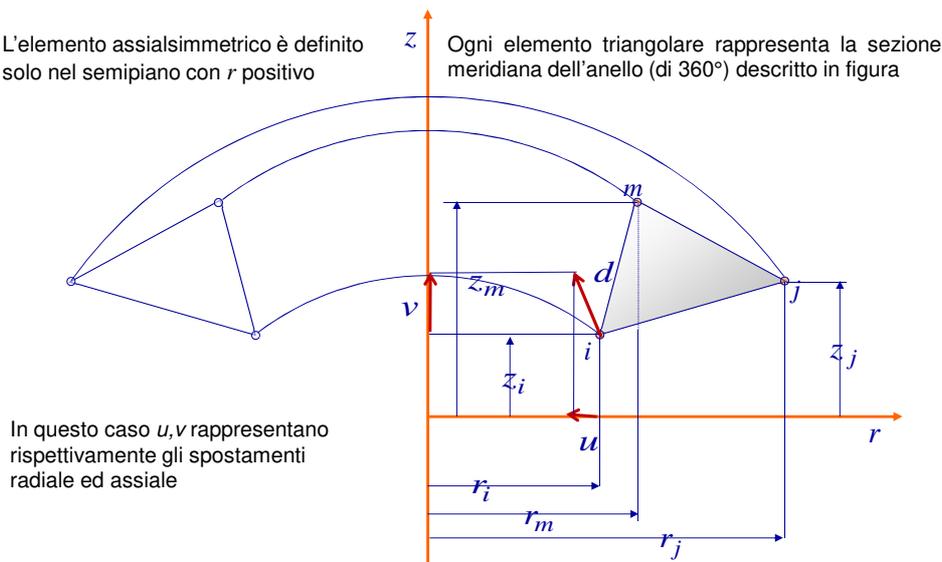
L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi

L'elemento assialsimmetrico è definito solo nel semipiano con r positivo

Ogni elemento triangolare rappresenta la sezione meridiana dell'anello (di 360°) descritto in figura



In questo caso u, v rappresentano rispettivamente gli spostamenti radiale ed assiale

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi: funzioni di forma

Spostamenti in seno all'elemento

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N_i'[I] \quad N_j'[I] \quad N_k'[I]] \{d\}^e$$

$$N_k' = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k r + c_k z) \quad k = i, j, m$$

Δ area del triangolo i, j, m

$$a_i = r_j z_m - r_m z_j \quad b_i = z_j - z_m \quad c_i = r_m - r_j$$

.....

Analogamente a quanto già visto per l'elemento piano a 3 nodi

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Vettore deformazione: 4 componenti

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

In questo tipo di problemi è presente una deformazione circonferenziale (con distribuzione assialsimmetrica), e una corrispondente tensione circonferenziale. Tali sforzi interni compiono lavoro e pertanto vanno tenuti in considerazione nei vettori tensione e deformazione

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\}^e = [B_i \quad B_j \quad B_m] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} \quad [B_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k'}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial z} \\ \frac{N_k'}{r} & 0 \\ \frac{\partial N_k'}{\partial z} & \frac{\partial N_k'}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ \frac{a_k}{r} + b_k + \frac{c_k z}{r} & 0 \\ c_k & b_k \end{bmatrix}$$

N.B. La presenza della ε_θ fa sì che, anche con funzioni di forma lineari, la distribuzione di deformazione nell'elemento non sia costante, ma dipenda da r !

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Vettore tensione: 4 componenti

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}$$

Esplicitando rispetto alle tensioni si ricava la matrice di elasticità

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu' & \nu' & 0 \\ \nu' & 1 & \nu' & 0 \\ \nu' & \nu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m' \end{bmatrix}$$

Leggi di Hooke per materiale isotropo, riferimento cilindrico

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\theta)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$

$$\gamma_{rz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz} = \frac{1}{G} \tau_{rz}$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad m' = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi: matrice di rigidità

Per la matrice di rigidità

$$[K]^e = 2\pi \int_{\Delta} [B]^T [D] [B] r dr dz$$

Qui il calcolo è più complesso perché la matrice B non è costante nell'elemento ma dipende dalla coordinata radiale r

E' possibile usare una soluzione approssimata che fornisce buoni risultati con una discretizzazione sufficientemente fitta. Si considera la matrice B costante in tutti i punti dell'elemento e pari al valore che assume nel centroide dell' elemento di coordinate:

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_m}{3} \quad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_m}{3}$$

Con questa approssimazione si ottiene una relazione in forma chiusa:

$$[K]^e = 2\pi [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] \bar{r} \Delta$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)