

Problemi piani: L'elemento triangolare a 3 nodi

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

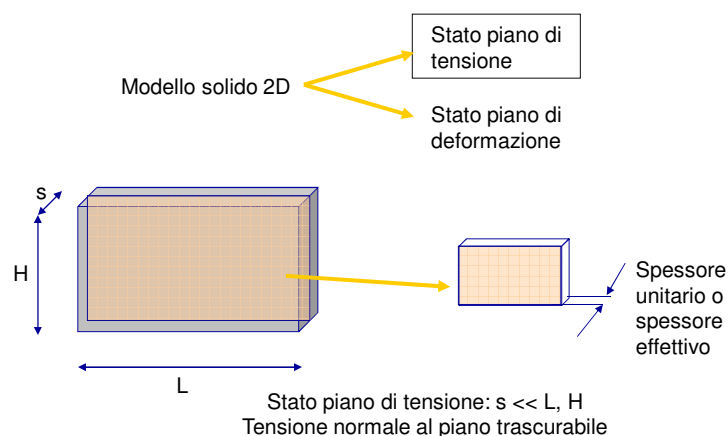
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elementi bidimensionali: stato di tensione piana

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo *bidimensionale*, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



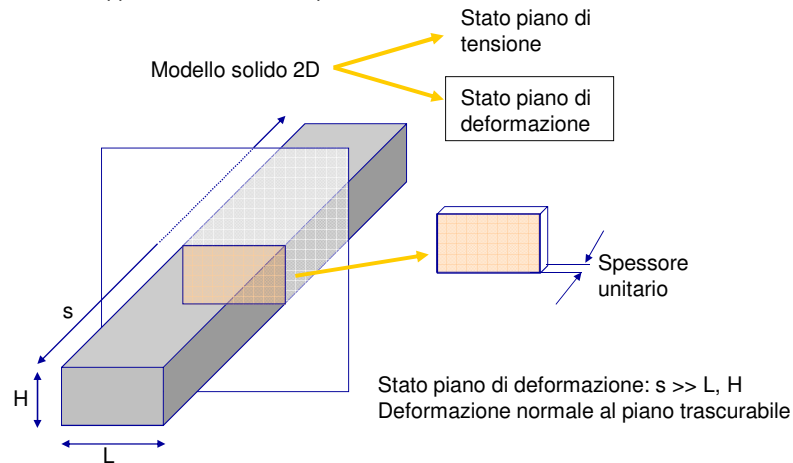
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elementi bidimensionali: stato di deformazione piana

In molti casi, pur essendo l'oggetto da studiare un solido continuo, la schematizzazione del comportamento strutturale può essere fatta con un modello continuo *bidimensionale*, con un sufficiente grado di approssimazione. Ciò è possibile ogniqualvolta la generica sezione trasversale sia rappresentativa del comportamento dell'intero solido



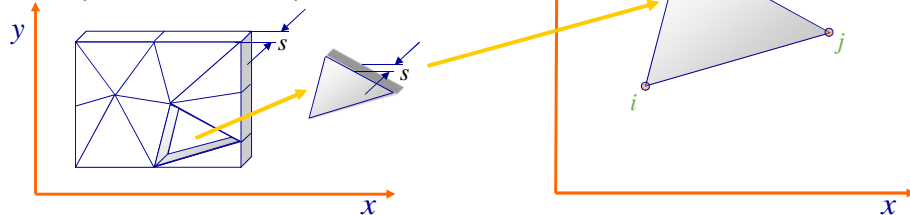
L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Si consideri un solido (omogeneo ed isotropo) e si ipotizzi che carichi e vincoli, ad esso applicati, siano tali da generare un campo piano di spostamenti e che tale piano sia normale allo spessore. In tal caso è spesso possibile ricondursi ai casi visti prima di *stato di tensione piana o deformazione piana*



In queste condizioni è possibile rappresentare il comportamento strutturale del solido con un modello piano.

Si divida il solido in una serie di elementi triangolari, di dimensioni finite.

Si immagini ora di estrarre uno di tali triangoli dal continuo e di studiare il suo comportamento riferendolo ad un sistema di coordinate cartesiane.

Per le ipotesi e le assunzioni fatte l'elemento può solo spostarsi, deformandosi, sul piano xy .

Ogni suo punto ha quindi due componenti di spostamento, che indicheremo come u e v .

L.Cortese

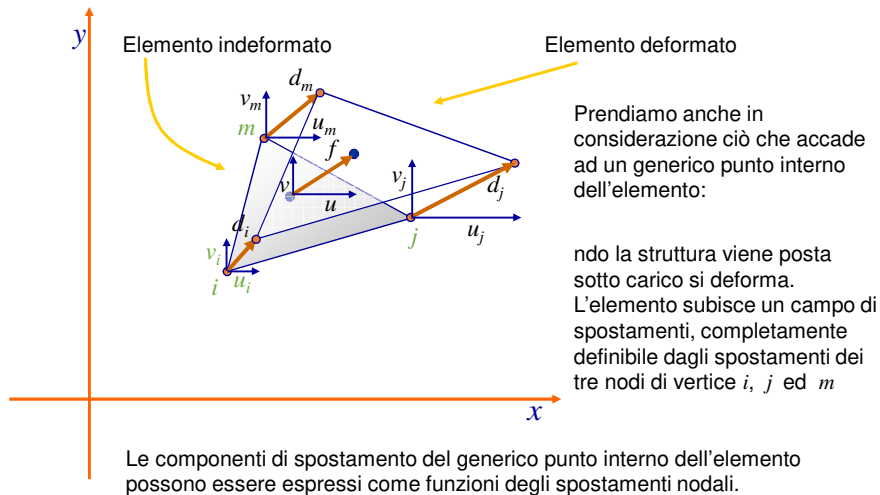
Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi

Consideriamo quindi l'elemento e , dotato di spessore s , nel piano $x y$.

L'elemento è un triangolo di vertici i, j, m



L.Cortese

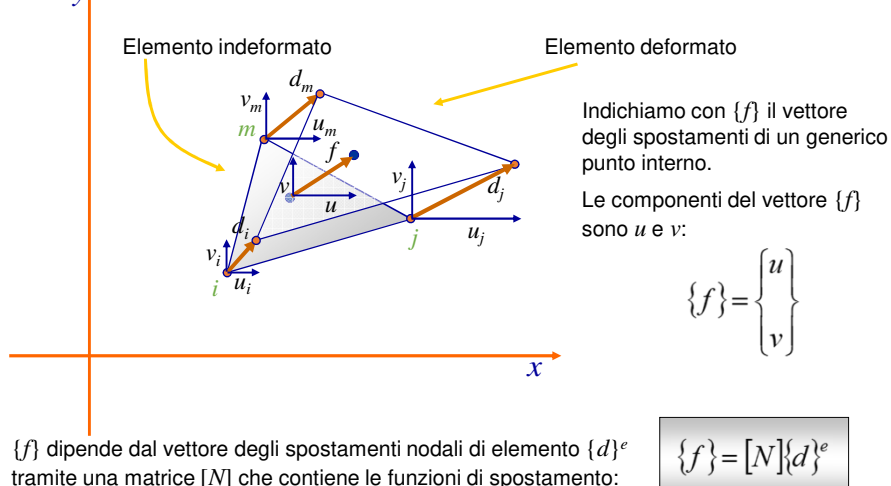
Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Consideriamo quindi l'elemento e , dotato di spessore s , nel piano $x y$.

L'elemento è un triangolo di vertici i, j, m

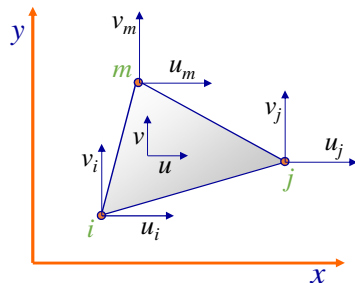


L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma



Nel caso di
elemento piano a
tre nodi

$$r_e = 2$$

$$m = 3$$

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\} = [N] \{d\}^e \longrightarrow \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

$[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ sono quadrate di dimensioni 2×2

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le matrici $[N]_i$, $[N]_j$ ed $[N]_m$ possono essere viste (sempre, non solo in questo caso particolare!) come il prodotto di una funzione per la matrice identità:

$$[N] = \begin{bmatrix} [I] \cdot N'_i & [I] \cdot N'_j & [I] \cdot N'_m \end{bmatrix} \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e N'_i , N'_j ed N'_m sono funzioni arbitrarie, note con il nome di *funzioni di spostamento o di forma*, le quali legano il campo degli spostamenti interni all'elemento al vettore degli spostamenti nodali.

Chiaramente:

$$\{f\} = \{f(x, y, z)\}, \quad [N]_k = [N(x, y, z)]_k$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Dal primo dei due sistemi si ha:

$$q_1 = \frac{a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m}{2\Delta}$$

Dove a_i , a_j e a_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la prima colonna:

e dove Δ ha il significato:
$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} = \text{area del triangolo } i \ j \ m$$

Matrice dei coefficienti

Per i minori:

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j \quad a_j = -(x_i y_m - x_m y_i) \quad a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} + & - & + \\ 1 & x_j & y_j \\ - & 1 & x_j & y_j \\ + & 1 & x_m & y_m \end{matrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

I valori delle incognite q sono calcolati come segue

Ancora dal primo dei due sistemi si calcola la seconda incognita:

$$q_2 = \frac{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m}{2\Delta}$$

Dove b_i , b_j e b_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la seconda colonna:

$$b_i = y_j - y_m \quad b_j = y_m - y_i \quad b_m = y_i - y_j$$

e la terza incognita:

$$q_3 = \frac{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m}{2\Delta}$$

Dove c_i , c_j e c_m sono i minori della matrice dei coefficienti che si ottengono escludendo la terza colonna:

$$c_i = x_m - x_j \quad c_j = x_i - x_m \quad c_m = x_j - x_i$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Gli altri tre valori delle incognite q si ottengono semplicemente introducendo nelle relazioni precedenti le componenti di spostamento v in luogo di u

$$q_4 = \frac{a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_5 = \frac{b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m}{2\Delta}$$

$$q_6 = \frac{c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m}{2\Delta}$$

avendo $a_i, a_j, a_m, b_i, b_j, b_m, c_i, c_j$ e c_m gli stessi valori calcolati prima in funzione delle coordinate nodali dell'elemento e riportati qui per riepilogo.

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ a_j = x_m y_i - x_i y_m \\ a_m = x_i y_j - x_j y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_i = y_j - y_m \\ b_j = y_m - y_i \\ b_m = y_i - y_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_i = x_m - x_j \\ c_j = x_i - x_m \\ c_m = x_j - x_i \end{cases}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

A questo punto sono calcolabili le componenti del vettore $\{f\}$ di spostamento dei punti interni all'elemento, u e v , in funzione degli spostamenti nodali e delle coordinate x e y .

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) \cdot u_i + (a_j + b_j x + c_j y) \cdot u_j + (a_m + b_m x + c_m y) \cdot u_m]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) \cdot v_i + (a_j + b_j x + c_j y) \cdot v_j + (a_m + b_m x + c_m y) \cdot v_m]$$

$$u = \frac{1}{2\Delta} [N'_i \cdot u_i + N'_j \cdot u_j + N'_m \cdot u_m]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [N'_i \cdot v_i + N'_j \cdot v_j + N'_m \cdot v_m]$$

Dove le funzioni N'_k sono espresse da:

$$N'_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice delle funzioni di forma

Le relazioni precedenti possono scriversi in forma matriciale come segue:

ed in modo più compatto:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [I]N'_i & [I]N'_j & [I]N'_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}^e \rightarrow \{f\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

$$\{f\} = [N]\{d\}^e$$

Si ricorda che le funzioni di spostamento dipendono dalle coordinate del punto interno all'elemento e dalle coordinate dei nodi mediante le a_k, b_k, c_k e Δ :

$$N'_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) \quad \text{per } k=i,j,m$$

$$2\Delta = x_j y_m - x_m y_j - x_i \cdot (y_m - y_j) + y_i \cdot (x_m - x_j)$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Sia nell'ipotesi di stato di tensione piana che di deformazione piana il vettore delle deformazioni può scriversi

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{le componenti di spostamento } u \text{ e } v \text{ sono date dalle relazioni:}$$

$$u = N'_i \cdot u_i + N'_j \cdot u_j + N'_m \cdot u_m$$

$$v = N'_i \cdot v_i + N'_j \cdot v_j + N'_m \cdot v_m$$

$$\text{con: } N'_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y)$$

N.b. Nello stato di tensione piana la ε_z non è nulla, ma non contribuisce all'energia elastica di deformazione essendo $\sigma_z=0$ per ipotesi. Verrà per ora trascurata nella trattazione. Si può comunque calcolare a posteriori tramite $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Le derivate assumono quindi le espressioni:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial N'_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N'_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N'_m}{\partial x} u_m \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial N'_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial N'_j}{\partial y} v_j + \frac{\partial N'_m}{\partial y} v_m \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial N'_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N'_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N'_j}{\partial y} u_j + \frac{\partial N'_j}{\partial x} v_j + \frac{\partial N'_m}{\partial y} u_m + \frac{\partial N'_m}{\partial x} v_m \longrightarrow \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_m u_m + b_m v_m)\end{aligned}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Legame tra le componenti della deformazione e spostamenti nodali, in forma matriciale:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{d\}^e \quad \{\varepsilon\} = [B] \{d\}^e$$

La matrice di deformazione $[B]$ ha dimensioni $r_\varepsilon \times (r_m)$, nel caso in esame 3×6 , e può essere divisa in tre sottomatrici 3×2 del tipo:

$$[B_k] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix} \quad \text{per } k=i,j,m$$

N.B. Nel caso dell'elemento piano a 3 nodi i termini della matrice $[B]$ sono costanti, infatti non contengono le variabili x, y . La deformazione è descritta come costante in tutto l'elemento. Ciò introduce una approssimazione importante nel rappresentare elevati gradienti di deformazione.

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione**

La deformazione appena calcolata, in funzione degli spostamenti nodali è quella totale. Per calcolare correttamente lo stato di tensione, è necessario sottrarre alla deformazione totale eventuali deformazioni iniziali, quali ad esempio, le dilatazioni termiche:

$$\{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{x0} \end{Bmatrix} = \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{valida nel caso di stato piano di tensione}$$

oppure:
$$\{\varepsilon_0\} = (1 + \nu) \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{valida nel caso di stato piano di deformazione}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità**

Lo stato di tensione in un punto dell'elemento è descritto dal vettore $\{\sigma\}$, composto da 3 termini (in questo caso ancora 3).

In condizioni di comportamento elastico del materiale, tale vettore può essere espresso come :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

La matrice $[D]$ ha dimensioni 3×3 ; il vettore $\{\sigma_0\}$ rappresenta l'eventuale stato di tensione residuo preesistente nel materiale prima dell'applicazione del carico.

Le matrici $[D]$ per lo stato piano di tensione e per lo stato di deformazione piana si ottengono invertendo le relative relazioni di Hooke, ovvero ricavando le σ in funzione delle ε

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di tensione

Legge di Hooke scritta per lo stato piano di tensione:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy} \frac{2(1+\nu)}{E}$$

Invertendo si trova la relazione

$$\{\sigma\}_{el} = [D]\{\varepsilon\}_{el}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Stato piano di tensione

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di deformazione ($\varepsilon_z = 0$)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

dalla legge di Hooke si ha:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right] \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy} \frac{2(1+\nu)}{E}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di deformazione ($\varepsilon_z = 0$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy} \frac{2(1+\nu)}{E} \end{aligned}$$

Invertendo si trova la relazione $\{\sigma\}_{el} = [D]\{\varepsilon\}_{el}$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Stato piano di deformazione

Nonostante la componente dello stato tensionale σ_z sia diversa da zero, nel caso di deformazione piana, non compie alcun lavoro, essendo nulla la ε_z e, pertanto, essa non viene presa in considerazione: la matrice $[D]$ rimane una 3×3 .

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

Si procede ora al calcolo della matrice di rigidezza nel caso di elemento piano a tre nodi con stato piano di tensione.

Come si è visto per l'elemento triangolare a deformazione costante i coefficienti della matrice $[B]$ sono delle costanti. L'integrazione è dunque una semplice moltiplicazione.

Indicando con t lo spessore (costante) dell'elemento si può scrivere:

$$[K]^e = [B]^T [D] [B] V = \begin{bmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} B_i & B_j & B_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} B_i^T D B_i & B_i^T D B_j & B_i^T D B_m \\ B_j^T D B_i & B_j^T D B_j & B_j^T D B_m \\ B_m^T D B_i & B_m^T D B_j & B_m^T D B_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

La generica sottomatrice può essere scritta come segue:

$$[K]_{rs} = [B]_r^T [D] [B]_s \cdot t \cdot \Delta$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

$$[K]_{rs} = [B]_r^T [D] [B]_s \cdot t \cdot \Delta = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

$$[K]_{rs} = \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix} \cdot \frac{t}{4\Delta}$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2} c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2} c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2} b_r b_s \end{bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

La generica sottomatrice $[K]_{rs}$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2} c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2} c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2} b_r b_s \end{bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

La matrice di rigidezza di elemento completa

$$[K]^e = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{t}{4\Delta} \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_i b_i + \frac{1-\nu}{2} c_i c_i & \nu b_i c_i + \frac{1-\nu}{2} c_i b_i & b_i b_j + \frac{1-\nu}{2} c_i c_j & \nu b_i c_j + \frac{1-\nu}{2} c_i b_j & b_i b_m + \frac{1-\nu}{2} c_i c_m & \nu b_i c_m + \frac{1-\nu}{2} c_i b_m \\ \nu c_i b_i + \frac{1-\nu}{2} b_i c_i & c_i c_i + \frac{1-\nu}{2} b_i b_i & \nu c_i b_j + \frac{1-\nu}{2} b_i c_j & c_i c_j + \frac{1-\nu}{2} b_i b_j & \nu c_i b_m + \frac{1-\nu}{2} b_i c_m & c_i c_m + \frac{1-\nu}{2} b_i b_m \\ b_j b_i + \frac{1-\nu}{2} c_j c_i & \nu b_j c_i + \frac{1-\nu}{2} c_j b_i & b_j b_j + \frac{1-\nu}{2} c_j c_j & \nu b_j c_j + \frac{1-\nu}{2} c_j b_j & b_j b_m + \frac{1-\nu}{2} c_j c_m & \nu b_j c_m + \frac{1-\nu}{2} c_j b_m \\ \nu c_j b_i + \frac{1-\nu}{2} b_j c_i & c_j c_i + \frac{1-\nu}{2} b_j b_i & \nu c_j b_j + \frac{1-\nu}{2} b_j c_j & c_j c_j + \frac{1-\nu}{2} b_j b_j & \nu c_j b_m + \frac{1-\nu}{2} b_j c_m & c_j c_m + \frac{1-\nu}{2} b_j b_m \\ b_m b_i + \frac{1-\nu}{2} c_m c_i & \nu b_m c_i + \frac{1-\nu}{2} c_m b_i & b_m b_j + \frac{1-\nu}{2} c_m c_j & \nu b_m c_j + \frac{1-\nu}{2} c_m b_j & b_m b_m + \frac{1-\nu}{2} c_m c_m & \nu b_m c_m + \frac{1-\nu}{2} c_m b_m \\ \nu c_m b_i + \frac{1-\nu}{2} b_m c_i & c_m c_i + \frac{1-\nu}{2} b_m b_i & \nu c_m b_j + \frac{1-\nu}{2} b_m c_j & c_m c_j + \frac{1-\nu}{2} b_m b_j & \nu c_m b_m + \frac{1-\nu}{2} b_m c_m & c_m c_m + \frac{1-\nu}{2} b_m b_m \end{bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti

A questo punto devono essere valutate anche le forze nodali equivalenti

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = - \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV \quad \text{Forze nodali equivalenti alle deformazioni iniziali (ex: dilatazione termica)}$$

$$\{F_{\sigma 0}\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad \text{Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (ex: tensioni residue)}$$

$$\{F_p\}^e = - \int_V [N]^T \{p\} dV \quad \text{Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (ex: forze di massa)}$$

$$\text{Per l'elemento piano} \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti**

Forze nodali equivalenti alle deformazioni iniziali

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} \cdot t \cdot \Delta = - \begin{Bmatrix} B_i^T D \varepsilon_0 \\ B_j^T D \varepsilon_0 \\ B_m^T D \varepsilon_0 \end{Bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

Per il singolo sottovettore *r-esimo* si ha:

$$\begin{aligned} \{F_{\varepsilon 0}\}_r &= -[B]_r^T [D] \{\varepsilon\} \cdot t \Delta = -\frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \alpha T \cdot t \cdot \Delta \\ &= - \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\alpha T t}{2} = -\frac{E \alpha T t}{2(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} b_r + \nu b_r \\ \nu c_r + c_r \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti**

Il vettore completo che rappresenta le forze equivalenti ad una dilatazione termica dell'elemento, dovuta ad un incremento ΔT della temperatura, può quindi essere scritto come segue:

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\frac{E \alpha T t}{2(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} b_i + \nu b_i \\ \nu c_i + c_i \\ b_j + \nu b_j \\ \nu c_j + c_j \\ b_m + \nu b_m \\ \nu c_m + c_m \end{Bmatrix}$$

L.Cortese

Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti (a.a. 2019-2020)

*Il Metodo degli Elementi Finiti***Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti**

Le forze nodali equilibranti i carichi uniformemente distribuiti sull'elemento possono essere espresse come segue:

$$\{F_p\}^e = - \left(\int_V [N]^T dV \right) \{p\} = - \int_V \begin{Bmatrix} IN'_i \\ IN'_j \\ IN'_m \end{Bmatrix} dV \{p\}$$

Per il singolo sottovettore r -esimo si ha:

$$\{F_p\}_r = -[I] \left(\int_V N'_r dV \right) \{p\} = - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \int_V N'_r dV$$

Il vettore completo, come si è fatto nei casi precedenti, si ottiene facilmente dal sottovettore generico permutando gli indici.