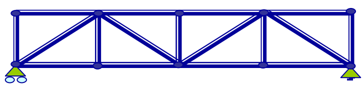
Il Metodo degli Elementi Finiti

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione

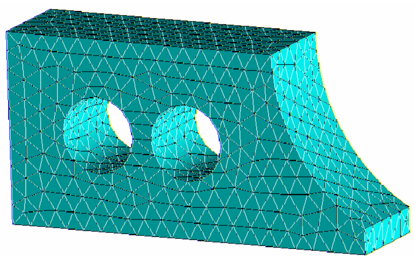
In alcune strutture la divisione in porzioni elementari, facilmente schematizzabili, discende immediatamente dal disegno e dalla tecnologia utilizzata per la costruzione.



Le caratteristiche di rigidezza dei vari elementi sono facilmente ricavabili dai modelli strutturali degli elementi (barre assiali, travi)

Molto spesso, invece, particolarmente nei componenti meccanici, la struttura è un continuo tridimensionale, che non presenta una preferenziale suddivisione in elementi.

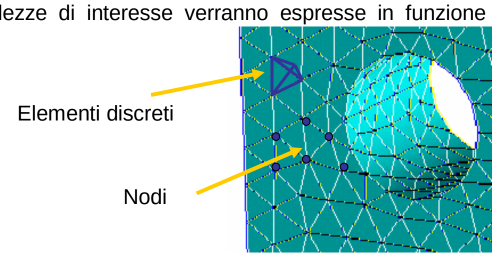
In questi casi si può immaginare comunque di dividere la struttura in un numero finito di elementi, ognuno dei quali sarà caratterizzato da un certo numero di punti nodali nei quali definire le grandezze cinematiche e dinamiche. La rigidezza della struttura dipende dalle caratteristiche elastiche del materiale e dalla cinematica dei singoli elementi.



Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

L'idea è di ricondursi al caso già visto del calcolo strutturale matriciale, mediante le seguenti ipotesi di lavoro:

- Si rappresenta il continuo tramite un numero discreto di elementi finiti, connessi tra loro in un numero discreto di punti nodali lungo il contorno. *(**approssimazione: la connessione tra porzioni di continuo è nella realtà su infiniti punti e non in pochi punti discreti**).* Gli spostamenti nodali saranno ancora le incognite del problema, e tutte le grandezze di interesse verranno espresse in funzione di tali spostamenti.

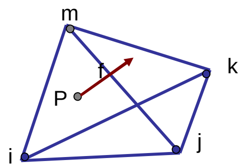


Il Metodo degli Elementi Finiti

Introduzione

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

- Un insieme appropriato di funzioni viene scelto per descrivere il campo di spostamenti in seno al singolo elemento in funzione degli spostamenti nodali: funzioni di forma *(**approssimazione, legata alla scelta arbitraria delle funzioni di forma. In aggiunta, queste dovrebbero assicurare i requisiti di continuità degli spostamenti (congruenza) e delle deformazioni**. Non sempre è possibile soddisfare tali condizioni).*



$$\{f(x,y,z)\} = N(\{d_i\},\{d_j\},\{d_m\},\{d_k\})$$

P punto generico di coordinate x,y,z interno all'elemento.
{f} spostamento del punto *P*

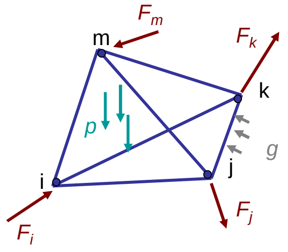
Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

- Dal campo di spostamento definito sopra, è possibile ricavare il campo di deformazione corrispondente, sempre in seno all'elemento. Noto il campo di deformazione, si risale al campo di tensione, assunto il legame costitutivo del materiale e tenuto conto anche di eventuali deformazioni iniziali e tensioni residue.

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix} \longrightarrow [D],\ \{\varepsilon_0\},\{\sigma_0\} \longrightarrow \{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}$$

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

- Si determina un sistema di forze concentrate ai nodi che faccia equilibrio alle tensioni sul contorno e ad ogni carico distribuito nell'elemento. *(**approssimazione: concentrando le forze ai nodi, la condizione di equilibrio statico è verificata soltanto globalmente.**)*



Si cerca cioè ancora una relazione di equilibrio di elemento del tipo:

$$\{F\}^e=[K]^e\{d\}^e+\{F\}^e_p+\{F\}^e_{\varepsilon 0}+..$$

determinando $[K]^e, \{F\}^e_p, \{F\}^e_{\varepsilon 0}$ tramite opportune relazioni dipendenti dal tipo di elemento

Il metodo degli elementi finiti è lo studio dei criteri con cui rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti localmente equivalenti, dal punto di vista statico, alle corrispondenti porzioni del continuo.

Con queste ipotesi, il problema è ricondotto al caso del calcolo strutturale matriciale. Si può cioè scrivere la condizione di equilibrio per ogni elemento:

$$\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon 0}^e + \ldots$$

Successivamente la condizione di equilibrio viene imposta a livello di struttura (discreta):

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0} - \ldots$$

La soluzione segue infine l'iter già visto per i sistemi discreti

Le Funzioni di Forma

Il Metodo degli Elementi Finiti

Funzioni di forma

Vettori forze e spostamenti di elemento

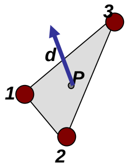
$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_i \\ .. \\ F_m \end{Bmatrix}^e \qquad \{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_m \end{Bmatrix}^e \qquad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ .. \\ F_{ir_e} \end{Bmatrix} \qquad \{d_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ .. \\ d_{ir_e} \end{Bmatrix}$$

m = numero dei nodi di elemento

r_e = numero dei gradi di libertà per nodo

Spostamento di un punto generico interno all'elemento

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ .. \\ f_{r_e} \end{Bmatrix}$$



N.B. Anche il vettore *f* ha r_e componenti

{f} come le sue componenti è funzione di *x,y,z* , coordinate di *P* all'interno dell'elemento considerato

$$\{f\} = \{f(x,y,z)\}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Funzioni di forma

Spostamento interno in funzione degli spostamenti nodali: le ***Funzioni di Forma***

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ .. \\ f_{r_e} \end{Bmatrix} = [N]\{d\}^e \longrightarrow \{f\} = [N_1 \quad .. \quad N_i \quad .. \quad N_m] \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

Dimensionalmente: $[N] = [r_e \ x \ mr_e]$

Le matrici $[N]_i$,sono quadrate di dimensioni r_e x r_e e dipendono ancora dalle coordinate *x,y,z* del punto *P* considerato:

$$[N]_i = [N(x,y,z)]_i$$

Le funzioni di forma devono fornire l'appropriato spostamento nodale, quando riferite alla posizione corrispondente al nodo stesso. Ad esempio, in un caso a *2 g.d.l.* per nodo (r_e=*2*):

$$[N(x_i,y_i,z_i)]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [N(x_j,y_j,z_j)]_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \forall \ j \neq i \quad J = 1..m$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Funzioni di forma

Le matrici $[N]_i$ possono essere scritte sempre come il prodotto di una funzione per la matrice identità:

$$[N] = [[I]\cdot N_1' \quad [I]\cdot N_i' \quad [I]\cdot N_m'] \qquad\qquad [I] = [r_e \ x \ r_e]$$

dove N'_j sono funzioni arbitrarie, note con il nome di ***funzioni di spostamento o di forma***, le quali legano il campo degli spostamenti interni all'elemento al vettore degli spostamenti nodali.

N.B. Nel caso degli elementi monodimensionali, visti nella trattazione dei sistemi discreti, l'introduzione delle funzioni di forma non è indispensabile. Per l'identificazione di deformazioni e tensioni in funzione degli spostamenti nodali ci si avvale della teoria elementare della trave.

N.B. Per una trattazione più approfondita e dettagliata delle funzioni di forma, si veda la parte relativa all'elemento piano triangolare a 3 nodi.

Il Metodo degli Elementi Finiti

Funzioni di forma: campo di deformazione

Campo di deformazione nell'elemento

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ .. \\ \varepsilon_{r_\varepsilon} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon\} = [B]\{d\}^e = [B_1 \quad .. \quad B_i \quad .. \quad B_m] \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_m \end{Bmatrix}^e$$

r_ε = numero dei termini del vettore deformazione di elemento

Dimensionalmente: $[B] = [r_\varepsilon \ x \ mr_e]$ $\quad ([B]_i = [r_\varepsilon \ x \ r_e])$

[B] si può derivare, nel vero senso della parola, dalla *[N]*, essendo le componenti di deformazione, le derivate parziali spaziali degli spostamenti. Ad esempio, nel caso spaziale:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Funzioni di forma: campo di tensione

Campo di tensione nell'elemento

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ .. \\ \sigma_{r_\sigma} \end{Bmatrix} \qquad \{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

r_σ = numero dei termini del vettore tensione di elemento

$$\{\sigma\} = [D]([B]\{d\}^e - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} = [S]\{d\}^e - [D]\{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\}$$

$[D]\,[S]$ Matrici di elasticità e di tensione

$\{\varepsilon_0\}$ Vettore deformazioni iniziali

$\{\sigma_0\}$ Vettore tensioni residue iniziali

N.B. Per una trattazione più approfondita e dettagliata delle matrici di deformazione e di elasticità, si veda ancora la parte relativa all'elemento piano triangolare a 3 nodi.

Dimensionalmente: $[D] = [r_\sigma \; x \; r_\varepsilon]$, $[S] = [r_\sigma \; x \; r_e]$

Anche $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ sono f(x,y,z) : $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon(x,y,z)\}$, $\{\sigma\} = \{\sigma(x,y,z)\}$

Relazione di equilibrio di elemento

Relazione di equilibrio di elemento

La relazione che esprime la condizione di equilibrio dell'elemento nel continuo si può ricavare chiamando in causa il principio dei lavori virtuali

$\{F\}^e$ vettore delle forze esterne agenti sull'elemento, applicate direttamente ai nodi:

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_i \\ .. \\ F_m \end{Bmatrix} \qquad \{F_i\}^e = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ .. \\ F_{ir_e} \end{Bmatrix}$$

N.B. In questo caso *{F}^e* rappresenta le forze nodali che sono staticamente equivalenti alle tensioni $\{\sigma\}$ realmente agenti sul contorno dell'elemento.

$\{p\}$ vettore dei carichi distribuiti per unità di volume, ad esempio dovuto ad azioni inerziali:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

La condizione di equilibrio tra le forze esterne e le reazioni interne, dovute allo stato tensionale, si ricava tramite il principio dei lavori virtuali → Supponendo l'elemento in equilibrio, imponendo un campo di arbitrari spostamenti virtuali il lavoro compiuto dalle forze esterne deve eguagliare quello compiuto dalle forze interne

$$\boxed{L_e = L_i}$$

Relazione di equilibrio di elemento

$\boxed{L_e = L_i}$ → $\{d^*\}^e$ campo di spostamenti virtuali.

Lo spostamento interno virtuale e la deformazione conseguente al campo di spostamenti virtuali sono date dai vettori:

$$\{f^*\} = [N]\{d^*\}^e \rightarrow \{f^*\}^{\mathrm{T}} = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} [N]^{\mathrm{T}}$$

$$\{\varepsilon^*\} = [B]\{d^*\}^e$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne vale:

$$L_e = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \{F\}^e + \int_V \{f^*\}^{\mathrm{T}} \{p\} dV = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \left(\{F\}^e + \int_V [N]^{\mathrm{T}} \{p\} dV \right)$$

Il lavoro virtuale compiuto dalle tensioni interne vale:

$$L_i = \int_V \left[\{\varepsilon^*\}\right]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} dV = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \int_V [B]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} dV$$

Uguagliando i lavori si ottiene:

$$\left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \left(\{F\}^e + \int_V [N]^{\mathrm{T}} \{p\} dV \right) = \left[\{d^*\}^e\right]^{\mathrm{T}} \int_V [B]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} dV$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Relazione di equilibrio di elemento

$$\cancel{\lfloor \{d^*\}^e \rfloor^{T}}\left(\{F\}^e + \int_V [N]^T\{p\}dV\right) = \cancel{\lfloor \{d^*\}^e \rfloor^{T}}\int_V [B]^T\{\sigma\}dV$$

eliminando lo spostamento virtuale d'elemento si ottiene:

$$\{F\}^e = \int_V [B]^T\{\sigma\}dV - \int_V [N]^T\{p\}dV$$

Ricordando le relazioni:

$$\{\varepsilon\} = [B]\ \{d\}^e$$

$$\{\sigma\} = [D]\ (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{\sigma\} = [D]\ ([B]\{d\}^e - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T[D]\ [B]\ dV\right)\{d\}^e - \int_V [B]^T[D]\ \{\varepsilon_0\}dV + \int_V [B]^T\{\sigma_0\}dV - \int_V [N]^T\{p\}dV$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^e = \left(\int_V [B]^T[D]\ [B]\ dV\right)\{d\}^e - \int_V [B]^T[D]\ \{\varepsilon_0\}dV + \int_V [B]^T\{\sigma_0\}dV - \int_V [N]^T\{p\}dV$$

Questa relazione è del tipo: $\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}^e_{\varepsilon_0} + \{F\}^e_{\sigma_0} + \{F\}^e_p$

In conclusione si può scrivere:

$$[K]^e = \int_V [B]^T[D]\ [B]\ dV$$ Matrice di rigidezza di elemento

$$\{F\}^e_{\varepsilon_0} = -\int_V [B]^T[D]\ \{\varepsilon_0\}dV$$ Forze nodali equivalenti alla deformazione iniziale (dilatazione termica)

$$\{F\}^e_{\sigma_0} = \int_V [B]^T\{\sigma_0\}dV$$ Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (tensioni residue)

$$\{F\}^e_p = -\int_V [N]^T\{p\}dV$$ Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (pressioni, forze di massa)

Relazione di equilibrio di elemento

Se l'elemento appartiene al confine esterno del continuo, su di esso potrebbe agire un carico distribuito, il cui valore per unità di lunghezza potrebbe essere espresso tramite il vettore:

$$\{g\} = [g_x \; g_y \; g_z]^T$$

Alle forze nodali equivalenti elencate in precedenza andrebbe allora aggiunto il vettore:

$$\{F\}_g^e = -\int_C [N]^T \{g\} dC$$

Dove l'integrazione si intende estesa sulla porzione di contorno sul quale agisce il carico distribuito appartenente all'elemento considerato.
In alternativa i carichi distribuiti agenti sul contorno possono inglobarsi nei carichi concentrati esterni di struttura descritti dal vettore $\{R\}$ (vedi sezione successiva).

N.B. Per una trattazione più approfondita e dettagliata si veda sempre la parte relativa all'elemento piano triangolare a 3 nodi.

Soluzione del problema agli Elementi Finiti:

Assemblaggio della struttura, procedimento risolutivo e considerazioni sulla convergenza del metodo

Il Metodo degli Elementi Finiti

Assemblaggio della struttura e risoluzione del problema elastico

- Determinando una relazione di elemento del tipo $\{F\}^e = [K]^e\{d\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\varepsilon_0}^e + ..$ di fatto ci si è ricondotti al caso del calcolo strutturale di sistemi discreti. In questo caso infatti, i singoli elementi fanno le veci dei veri e propri componenti individuali connessi tra loro mediante un numero discreto di punti nodali.
L'assemblaggio procede pertanto mediante gli stessi passi previsti per tale metodo; si ricostruisce cioè la matrice di rigidezza di struttura $[K]$, i carichi nodali equivalenti a carichi distribuiti e deformazioni iniziali $\{F\}_p^e$ $\{F\}_{\varepsilon_0}^e$, e si stimano le forze esterne {R} supposte concentrate ai nodi

-Una volta risolto il sistema di equazioni della struttura assemblata:

$$[K]\{d\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\varepsilon_0} - ...$$

e cioè trovati il campo di spostamenti incogniti $\{d\}$ e le reazioni vincolari, si possono identificare, elemento per elemento che discretizza il continuo, sia il campo di deformazione che quello di tensione mediante le:

$$\{\varepsilon\}^e = [B]\{d\}^e$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\}^e - [D]\{\varepsilon_0\}^e + \{\sigma_0\}^e$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Assemblaggio della struttura e risoluzione del problema elastico

Nel procedimento illustrato, il principio dei lavori virtuali è stato applicato al singolo elemento per ricavare le forzi nodali equivalenti che garantiscono l'equilibrio dell'elemento stesso nella struttura. Si è poi seguito l'approccio già visto per i sistemi discreti. Non è indispensabile però ragionare prima a livello di elemento e poi di struttura; è possibile applicare il ragionamento all'intero continuo senza chiamare in causa le forze interelemento.

$$\{f\} = [\overline{N}]\{d\} \qquad \begin{Bmatrix} f_1 \\ .. \\ f_{r_e} \end{Bmatrix} = [\overline{N}_1 \; ... \; \overline{N}_n]\begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_n \end{Bmatrix}$$

Vettore spostamento del generico *punto P* della struttura in funzione degli spostamenti nodali di struttura

dove:

$[\overline{N}_i] = [N_i]^e$ Se *P* cade all' interno di un elemento al quale appartiene il nodo *i*-esimo

$[\overline{N}_i] = 0$ altrimenti

Analoga definizione può darsi per la matrice di deformazione $[\overline{B}]$

Il principio dei lavori virtuali può ora essere applicato all'intera struttura

$$L_e \rightarrow \left[d^*\right]^T\{R\}+\int_V\left[f^*\right]^T\{p\}dV+\int_C\left[f^*\right]^T\{g\}dC=\int_V\left[\varepsilon^*\right]^T\{\sigma\}dV \leftarrow L_i$$

dove gli integrali vanno calcolati sull'intero volume e contorno

Rielaborando si ottiene:

$$\{R\}=\left(\int_V[\overline{B}]^T[D][\overline{B}]dV\right)\{d\}-\int_V[\overline{B}]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV+\int_V[\overline{B}]^T\{\sigma_0\}dV-\int_V[\overline{N}]^T\{p\}dV-\int_C[\overline{N}]^T\{g\}dC$$

Ricordando come sono state definite le matrici globali $[\overline{N}],[\overline{B}]$

$$[K]_{rs}=\int_V[\overline{B}]^T[D][\overline{B}]dV=\sum_e\int_{V_e}\left[[B]^e\right]^T[D][B]^e dV_e=\sum_e[K]_{rs}^e$$

Stesse considerazioni si possono ripetere per gli altri termini..

Ci si riconduce infine al medesimo sistema

$$[K]\{d\}=\{R\}-\{F\}_p-\{F\}_{\varepsilon_0}-\ldots$$

E' anche possibile giustificare la formulazione del metodo agli elementi finiti mediante considerazioni di tipo energetico; il principio dei lavori virtuali può infatti essere riscritto per l'intero continuo in esame:

$$\int_V\left[\varepsilon^*\right]^T\{\sigma\}dV-\left(\left[d^*\right]^T\{R\}+\int_V\left[f^*\right]^T\{p\}dV+\int_C\left[f^*\right]^T\{g\}dC\right)=0$$

Il primo termine può essere interpretato come variazione dell'energia interna di deformazione *U*, mentre il secondo è la variazione di energia potenziale dei carichi esterni *W*. Si può pertanto scrivere:

$$d\chi=d(U+W)=0$$

Dove χ è chiamata energia potenziale totale. La precedente espressione indica che, perché sia garantito l'equilibrio, l'energia potenziale totale deve essere stazionaria.
Si può dimostrare che nel caso elastico l'energia potenziale totale è anche minima.

Assemblaggio della struttura e risoluzione del problema elastico

Il sistema di equazioni del metodo degli elementi finiti, determinato in precedenza per altra via, può così essere ottenuto tramite le relazioni:

$$\frac{\partial \chi}{\partial d} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \chi}{\partial d_1} \\ .. \\ .. \\ \dfrac{\partial \chi}{\partial d_n} \end{Bmatrix} = 0$$

In pratica con il metodo degli elementi finiti si trova il minimo dell'energia potenziale sulla base di un assegnato numero di spostamenti. E' evidente come all'infittirsi della discretizzazione, cioè al crescere del numero di elementi, e quindi dei punti nodali, la condizione di equilibrio sia imposta su un numero di gradi di libertà maggiore. Ciò si traduce in una migliore approssimazione della soluzione numerica a quella vera.

Il Metodo degli Elementi Finiti

La convergenza del metodo, approssimazioni legate alle ipotesi di lavoro

Cercando di rappresentare il continuo mediante un insieme di elementi discreti di dimensioni finite si introducono le seguenti approssimazioni:

- la connessione tra porzioni di continuo è nella realtà su infiniti punti e non in pochi punti discreti.

- concentrando le forze ai nodi, la condizione di equilibrio statico è verificata soltanto globalmente.

- la scelta arbitraria delle funzioni di forma non garantisce che gli spostamenti veri in seno ai singoli elementi siano descritti accuratamente. In aggiunta, queste dovrebbero assicurare i requisiti di continuità degli spostamenti (congruenza) e delle deformazioni.

Al decrescere delle dimensioni degli elementi discreti (con *h* la dim. media di elem.) tali approssimazioni si riducono. Si può dimostrare che sotto opportune ipotesi (riguardanti le funzioni di forma ed altro..), il metodo degli elementi finiti converge alla soluzione esatta quando h → 0.

L.Cortese Progettazione Meccanica agli Elementi Finiti *(a.a. 2011-2012)*

La convergenza del metodo, l'importanza della scelta delle funzioni di forma

La precisione del metodo dipende fortemente da come le funzioni di forma riescono a descrivere il campo di spostamenti reale. Esse sono scelte in maniera arbitraria e introducono una approssimazione qualora il campo vero di spostamenti non sia descrivibile mediante la formulazione analitica adottata. L'errore si riduce al decrescere della dimensione dell'elemento

Per assicurare la convergenza del metodo al risultato corretto, si dimostra che le funzioni di forma devono essere scelte in base ai seguenti criteri:

1) devono essere in grado di rappresentare correttamente i moti rigidi: in tali casi non devono generare deformazioni nell'elemento;

2) devono essere in grado di riprodurre la condizione di campo uniforme di deformazione all'interno dell'elemento;

3) le deformazioni in corrispondenza della separazione tra gli elementi possono presentare una discontinuità ma questa deve essere finita (ciò corrisponde alla condizione che gli spostamenti siano continui tra elementi contigui, ovvero che le funzioni di spostamento siano C_0 *in corrispondenza della separazione. Ci sono inoltre classi di elementi che richiedono che gli spostamenti siano* C_1*).*