Il Metodo degli Elementi Finiti in campo Non-Lineare (cenni)

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Il Metodo degli Elementi Finiti in campo Non-Lineare

Nella trattazione vista finora le equazioni risolutive sono lineari, il che equivale ad una forma quadratica per l'energia potenziale totale. In campo elastico ciò dipende dalla relazione lineare che intercorre tra deformazione e spostamenti $\{\varepsilon\}=[B]\{d\}$ e tensioni deformazioni $\{\sigma\}=[B]\{\varepsilon\}$

Esistono numerose categorie di problemi, di rilevanza ingegneristica, per cui la condizione di linearità non è verificata. E' possibile trattare anche tali problemi risolvendo con procedimento diverso le equazioni di equilibrio, non più lineari.
Cause di non linearità:

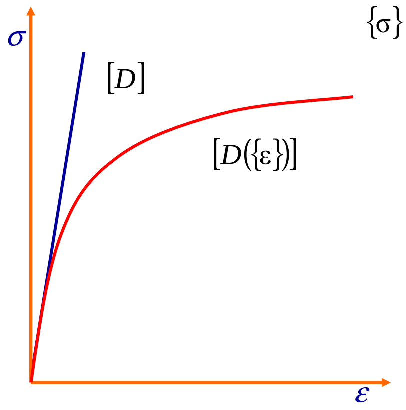
- materiale → relazione non lineare tra deformazione e tensione
- geometria → spostamenti dovuti al carico comparabili con le dimensioni della struttura. Forze esterne dipendenti dagli spostamenti della struttura.
- contatto → L'algoritmo di gestione del contatto si basa su relazioni non lineari.

Il Metodo degli Elementi Finiti in campo Non-Lineare: non linearità dovuta al materiale

Lavorando in campo plastico il legame tensione-deformazione non è più lineare. In generale la rigidezza del materiale dipende dalla deformazione accumulata così come la matrice di elasticità *[D]*

$$\{\varepsilon\}=[B]\{d\}$$

$$\{\sigma\}=[D]\,(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}$$



Equazione risolutiva del metodo, in forma compatta.

$$[K]\{d\}-\{R\}=0$$

$\{R\}$ Vettore che rappresenta i carichi nodali esterni, ivi inclusi i carichi equivalenti ai carichi distribuiti e alle deformazioni e tensioni iniziali

$$F\,(\{\sigma\},\{\varepsilon\})=0$$

Il Metodo degli Elementi Finiti in campo Non-Lineare: non linearità dovuta al materiale

Metodo della rigidezza variabile

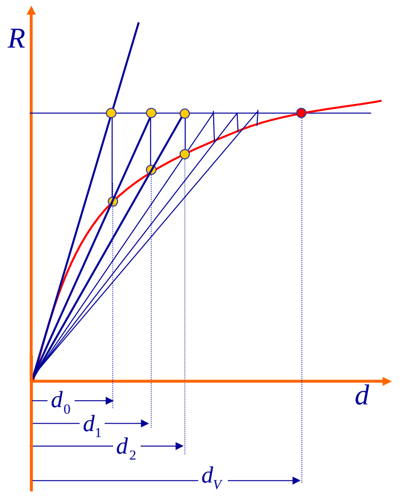
$$\{\sigma\}=[D]\,(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}$$

$$[D(\{\varepsilon\})]$$

$$[D(\{d\})]$$

$$[K]\{d\}-\{R\}=0$$

$$\{\Psi\}=[K(\{d\})]\{d\}-\{R\}=0$$



Soluzione con procedimento iterativo

$\{d\}_{(0)}=[K]^{-1}\{R\}$ valutato in campo elastico

$$[K]_{(0)}=[K(\{d\}_{(0)})]$$

$$\{d\}_{(1)}=[K]_{(0)}^{-1}\{R\} \qquad [K]_{(1)}=[K(\{d\}_{(1)})]$$

$$\{d\}_{(2)}=[K]_{(1)}^{-1}\{R\}$$

……………………….

$$\{d\}_{(n+1)}=[K]_{(n)}^{-1}\{R\} \qquad [K]_{(n)}=[K(\{d\}_{(n)})]$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Il Metodo degli Elementi Finiti in campo Non-Lineare: non linearità dovuta al materiale

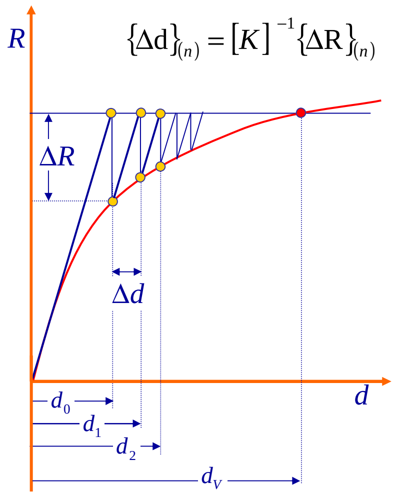
Metodo della tensione iniziale

$$\{\sigma\}=[D]\left(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}\right)+\{\sigma_0\}$$

$$\{F_{\sigma 0}\}=\int_V [B]^T\{\sigma_0\}dV$$

$$\{\Psi\}=[K]\{d\}-\{R(\{d\})\}=0$$

$$\{\Delta d\}_{(n)}=[K]^{-1}\{\Delta R\}_{(n)}$$



Soluzione con procedimento iterativo

$$\{d\}_{(0)}=[K]^{-1}\{R\}_{(0)} \longrightarrow \{\sigma_0\}_{(1)} \longrightarrow \{R\}_{(1)}$$

$$\{d\}_{(1)}=[K]^{-1}\{R\}_{(1)} \longrightarrow \{\sigma_0\}_{(2)} \longrightarrow \{R\}_{(2)}$$

$$\{d\}_{(2)}=[K]^{-1}\{R\}_{(2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\{d\}_{(n-1)} \longrightarrow \{\sigma_0\}_{(n)} \longrightarrow \{R\}_{(n)}$$

$$\{d\}_{(n)}=[K]^{-1}\{R\}_{(n)}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

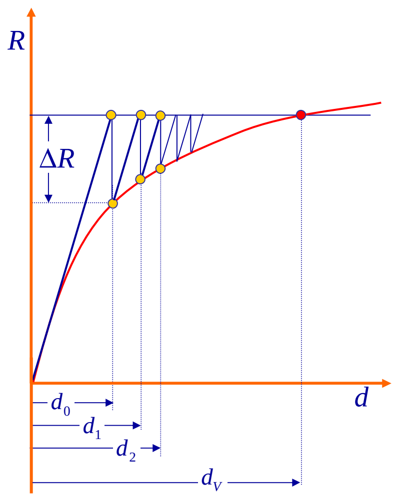
Il Metodo degli Elementi Finiti in campo Non-Lineare: non linearità dovuta al materiale

Metodo della deformazione iniziale

$$\{\sigma\}=[D]\left(\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}\right)+\{\sigma_0\}$$

$$\{F_{\varepsilon 0}\}=-\int_V [B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV$$

$$\{\Psi\}=[K]\{d\}-\{R(\{d\})\}=0$$



Soluzione con procedimento iterativo

$$\{d\}_{(0)}=[K]^{-1}\{R\}_{(0)} \longrightarrow \{\varepsilon_0\}_{(1)} \longrightarrow \{R\}_{(1)}$$

$$\{d\}_{(1)}=[K]^{-1}\{R\}_{(1)} \longrightarrow \{\varepsilon_0\}_{(2)} \longrightarrow \{R\}_{(2)}$$

$$\{d\}_{(2)}=[K]^{-1}\{R\}_{(2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\{d\}_{(n-1)} \longrightarrow \{\varepsilon_0\}_{(n)} \longrightarrow \{R\}_{(n)}$$

$$\{d\}_{(n)}=[K]^{-1}\{R\}_{(n)}$$

Nei metodi precedentemente esposti si arriva a convergenza, riuscendo ad individuare il campo di spostamento vero d_v , soltanto se la “non-linearità non è eccessiva”. In pratica perché i metodi possano funzionare, i carichi devono essere applicati progressivamente a piccoli passi, e per ogni passo è necessario iterare per raggiungere la convergenza. In campo non-lineare si procede pertanto per tanti “sottopassi” successivi, per ognuno dei quali viene calcolata una soluzione intermedia. Il calcolo del passo seguente parte dal risultato del precedente. L’ultimo sottopasso porta alla soluzione finale desiderata.

Immaginando ad esempio di dover risolvere il problema di una trave incastrata con carico *F* all’estremità di entità tale da comportarne la plasticizzazione, si potrebbe suddividere il problema ad esempio in *i=100* sottopassi e risolverlo progressivamente aumentando il carico ad intervalli di *F/100*.