Problemi di tipo assialsimmetrico:

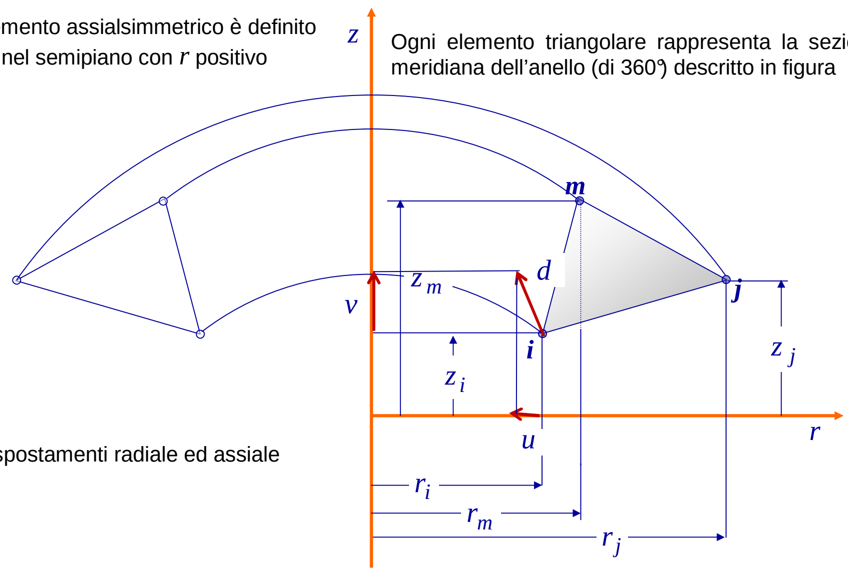
Elemento triangolare a 3 nodi

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi

L'elemento assialsimmetrico è definito solo nel semipiano con *r* positivo

Ogni elemento triangolare rappresenta la sezione meridiana dell'anello (di 360°) descritto in figura



u,v spostamenti radiale ed assiale

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi: funzioni di forma

Spostamenti in seno all'elemento

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=\left[N_i'[I]\;\; N_j'[I]\;\; N_k'[I]\right]\{d\}^e$$

$$N_k'=\frac{1}{2\Delta}(a_k+b_k r+c_k z)\quad k=i,j,m$$

Δ *area del triangolo* i,j,m

$$a_i=r_j z_m-r_m z_j\quad b_i=z_j-z_m\quad c_i=r_m-r_j$$

Analogamente a quanto già visto per l'elemento piano a 3 nodi

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi:matrice di deformazione

Vettore deformazione: *4* componenti

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{u}{r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

In questo tipo di problemi è presente una deformazione circonferenziale (con distribuzione assialsimmetrica), e una corrispondente tensione circonferenziale. Tali sforzi interni compiono lavoro e pertanto vanno tenuti in considerazione

$$\{\varepsilon\}=[B]\{d\}^e=\left[B_i\;\; B_j\;\; B_m\right]\begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix}$$

$$[B_k]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_k'}{\partial r} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_k'}{\partial z} \\ \dfrac{N_k'}{r} & 0 \\ \dfrac{\partial N_k'}{\partial z} & \dfrac{\partial N_k'}{\partial r} \end{bmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ \dfrac{a_k}{r}+b_k+\dfrac{c_k z}{r} & 0 \\ c_k & b_k \end{bmatrix}$$

N.B. La presenza della ε_θ fa si che, anche con funzioni di forma lineari, la distribuzione di deformazione nell'elemento non sia costante, ma dipenda da *r !*.

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi:matrice di elasticità

Vettore tensione: 4 componenti

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}$$

Esplicitando rispetto alle tensioni si ricava la matrice di elasticità

Leggi di Hooke per materiale isotropo, riferimento cilindrico

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\theta)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_r = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{rz} = \frac{1}{G}\tau_{rz}$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu' & \nu' & 0 \\ \nu' & 1 & \nu' & 0 \\ \nu' & \nu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m' \end{bmatrix}$$

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad m' = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Elemento assialsimmetrico triangolare a 3 nodi:matrice di rigidezza

Per la matrice di rigidezza

$$[K]^e = 2\pi \int_\Delta [B]^T [D][B] r\,dr\,dz$$

Qui il calcolo è più complesso perché la matrice *B* non è costante nell'elemento ma dipende dalla coordinata radiale *r*

Si usa di solito una soluzione numerica approssimata che fornisce buoni risultati con una discretizzazione sufficientemente fitta. Si considera la matrice B costante in tutti i punti dell'elemento e pari al valore che assume nel centroide dell' elemento di coordinate:

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_m}{3} \qquad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_m}{3}$$

Con questa approssimazione: $[K]^e = 2\pi [\bar{B}]^T [D][\bar{B}]\bar{r}\Delta$