Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Sia nell'ipotesi di stato di tensione piana che di deformazione piana il vettore delle deformazioni può scriversi

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}$$

le componenti di spostamento u e v sono date dalle relazioni:

$$u = N_i' \cdot u_i + N_j' \cdot u_j + N_m' \cdot u_m$$

$$v = N_i' \cdot v_i + N_j' \cdot v_j + N_m' \cdot v_m$$

con: $$N_k' = \frac{1}{2\Delta}(a_k + b_k x + c_k y)$$

N.b. Nello stato di tensione piana la ε_z non è nulla, ma non contribuisce all'energia elastica di deformazione essendo $\sigma_z=0$ per ipotesi. Verrà per ora trascurata nella trattazione. Si può comunque calcolare a posteriori tramite $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$.

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Le derivate assumono quindi le espressioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_i'}{\partial x}u_i + \frac{\partial N_j'}{\partial x}u_j + \frac{\partial N_m'}{\partial x}u_m \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_i'}{\partial y}v_i + \frac{\partial N_j'}{\partial y}v_j + \frac{\partial N_m'}{\partial y}v_m \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta}(c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_i'}{\partial y}u_i + \frac{\partial N_i'}{\partial x}v_i + \frac{\partial N_j'}{\partial y}u_j + \frac{\partial N_j'}{\partial x}v_j + \frac{\partial N_m'}{\partial y}u_m + \frac{\partial N_m'}{\partial x}v_m \longrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta}(c_i u_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_m u_m + b_m v_m)$$

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

Legame tra le componenti della deformazione e spostamenti nodali, in forma matriciale:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0\\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m\\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m\end{bmatrix}\{d\}^e \qquad \{\varepsilon\}=[B]\{d\}^e$$

La matrice di deformazione $[B]$ ha dimensioni r_ε x (r_em), nel caso in esame *3x6*, e può essere divisa in tre sottomatrici *3x2* del tipo:

$$[B_k]=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_k & 0\\ 0 & c_k\\ c_k & b_k\end{bmatrix} \quad \text{per } k=i,j,m$$

N.B. Nel caso dell'elemento piano a 3 nodi i termini della matrice $[B]$ sono costanti, infatti non contengono le variabili x,y. La deformazione è descritta come costante in tutto l'elemento. Ciò introduce una approssimazione importante nel rappresentare elevati gradienti di deformazione.

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di deformazione

La deformazione appena calcolata, in funzione degli spostamenti nodali è quella totale. Per calcolare correttamente lo stato di tensione, è necessario sottrarre alla deformazione totale eventuali deformazioni iniziali, quali ad esempio, le dilatazioni termiche:

$$\{\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{x0}\end{Bmatrix}=\alpha\cdot\Delta T\cdot\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}$$ valida nel caso di stato piano di tensione

oppure:

$$\{\varepsilon_0\}=(1+\nu)\cdot\alpha\cdot\Delta T\cdot\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}$$ valida nel caso di stato piano di deformazione

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Lo stato di tensione in un punto dell'elemento è descritto dal vettore $\{\sigma\}$, composto da r_σ termini (in questo caso ancora *3*).
In condizioni di comportamento elastico del materiale, tale vettore può essere espresso come :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

La matrice *[D]* ha dimensioni *3x3*; il vettore $\{\sigma_0\}$ rappresenta l'eventuale stato di tensione residuo preesistente nel materiale prima dell'applicazione del carico.

Le matrici $[D]$ per lo stato piano di tensione e per lo stato di deformazione piana si ottengono invertendo le relative relazioni di Hooke, ovvero ricavando le σ in funzione delle ε

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di tensione

Legge di Hooke scritta per lo stato piano di tensione:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Invertendo si trova la relazione
$\{\sigma\}_{el} = [D]\{\varepsilon\}_{el}$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Stato piano di <u>tensione</u>

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di deformazione (ε_z =0)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = 0 \longrightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

dalla legge di Hooke si ha:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \longrightarrow \varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \longrightarrow \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di elasticità

Matrice di elasticità $[D]$ per lo stato piano di deformazione (ε_z =0)

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \tau_{xy}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

Invertendo si trova la relazione $\{\sigma\}_{el} = [D]\{\varepsilon\}_{el}$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Stato piano di <u>deformazione</u>

Nonostante la componente dello stato tensionale σ_z sia diversa da zero, nel caso di deformazione piana, non compie alcun lavoro, essendo nulla la ε_z e, pertanto, essa non viene presa in considerazione: la matrice $[D]$ rimane una 3x3.

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

Si procede ora al calcolo della matrice di rigidezza nel caso di elemento piano a tre nodi con stato piano di tensione.

Come si è visto per l'elemento triangolare a deformazione costante i coefficienti della matrice $[B]$ sono delle costanti. L'integrazione è dunque una semplice moltiplicazione.

Indicando con *t* lo spessore (costante) dell'elemento si può scrivere:

$$[K]^e = [B]^T [D]\,[B]\,V = \begin{bmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \end{bmatrix} [D]\,\begin{bmatrix} B_i & B_j & B_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} B_i^T D B_i & B_i^T D B_j & B_i^T D B_m \\ B_j^T D B_i & B_j^T D B_j & B_j^T D B_m \\ B_m^T D B_i & B_m^T D B_j & B_m^T D B_m \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

La generica sottomatrice può essere scritta come segue:

$$[K]_{rs} = [B]_r^T [D]\,[B]_s \cdot t \cdot \Delta$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: matrice di rigidezza, stato piano di tensione

$$[K]_{rs} = [B]_r^T [D]\,[B]_s \cdot t \cdot \Delta = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D]\,\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

$$[K]_{rs} = \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} b_s & 0 \\ 0 & c_s \\ c_s & b_s \end{bmatrix} \cdot \frac{t}{4\Delta}$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2} c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2} c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2} b_r b_s \end{bmatrix}$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} & K_{im} \\ K_{ji} & K_{jj} & K_{jm} \\ K_{mi} & K_{mj} & K_{mm} \end{bmatrix}$$

La generica sottomatrice $[K]_{rs}$

$$[K]_{rs} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\nu}{2}c_r c_s & \nu b_r c_s + \frac{1-\nu}{2}c_r b_s \\ \nu c_r b_s + \frac{1-\nu}{2}b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\nu}{2}b_r b_s \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza di elemento completa

$$[K]^e = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{t}{4\Delta}\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ii} & K_{ii} \\ K_{ji} & K_{ji} & K_{ji} \\ K_{mi} & K_{mi} & K_{mi} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc}
b_i b_i + \frac{1-\nu}{2}c_i c_i & \nu b_i c_i + \frac{1-\nu}{2}c_i b_i & b_i b_j + \frac{1-\nu}{2}c_i c_j & \nu b_i c_j + \frac{1-\nu}{2}c_i b_j & b_i b_m + \frac{1-\nu}{2}c_i c_m & \nu b_i c_m + \frac{1-\nu}{2}c_i b_m \\
\nu c_i b_i + \frac{1-\nu}{2}b_i c_i & c_i c_i + \frac{1-\nu}{2}b_i b_i & \nu c_i b_j + \frac{1-\nu}{2}b_i c_j & c_i c_j + \frac{1-\nu}{2}b_i b_j & \nu c_i b_m + \frac{1-\nu}{2}b_i c_m & c_i c_m + \frac{1-\nu}{2}b_i b_m \\
\hline
b_j b_i + \frac{1-\nu}{2}c_j c_i & \nu b_j c_i + \frac{1-\nu}{2}c_j b_i & b_j b_j + \frac{1-\nu}{2}c_j c_j & \nu b_j c_j + \frac{1-\nu}{2}c_j b_j & b_j b_m + \frac{1-\nu}{2}c_j c_m & \nu b_j c_m + \frac{1-\nu}{2}c_{ij} b_m \\
\nu c_j b_i + \frac{1-\nu}{2}bjc_i & c_j c_i + \frac{1-\nu}{2}b_j b_i & \nu c_j b_j + \frac{1-\nu}{2}b_{ij} c_j & c_j c_j + \frac{1-\nu}{2}b_j b_j & \nu c_j b_m + \frac{1-\nu}{2}b_j c_m & c_j c_m + \frac{1-\nu}{2}b_j b_m \\
\hline
b_m b_i + \frac{1-\nu}{2}c_m c_i & \nu b_m c_i + \frac{1-\nu}{2}c_m b_i & b_m b_j + \frac{1-\nu}{2}c_m c_j & \nu b_m c_j + \frac{1-\nu}{2}c_m b_j & b_m b_m + \frac{1-\nu}{2}c_m c_m & \nu b_m c_m + \frac{1-\nu}{2}c_m b_m \\
\nu c_m b_i + \frac{1-\nu}{2}b_m c_i & c_m c_i + \frac{1-\nu}{2}b_m b_i & \nu c_m b_j + \frac{1-\nu}{2}b_m c_j & c_m c_j + \frac{1-\nu}{2}b_m b_j & \nu c_m b_m + \frac{1-\nu}{2}b_m c_m & c_m c_m + \frac{1-\nu}{2}b_m b_m
\end{array}\right]$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti

A questo punto devono essere valutate anche le forze nodali equivalenti

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alle deformazioni iniziali (ex: dilatazione termica)

$$\{F_{\sigma 0}\}^e = \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV$$

Forze nodali equivalenti alla tensione iniziale (ex: tensioni residue)

$$\{F_p\}^e = -\int_V [N]^T \{p\} dV$$

Forze equivalenti a carichi uniformemente distribuiti (ex: forze di massa)

Per l'elemento piano $\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento piano triangolare a 3 nodi: forze nodali equivalenti

Forze nodali equivalenti alle deformazioni iniziali

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -[B]^T [D] \{\varepsilon_0\} \cdot t \cdot \Delta = -\begin{Bmatrix} B_i^T D \ \varepsilon_0 \\ B_j^T D \ \varepsilon_0 \\ B_m^T D \ \varepsilon_0 \end{Bmatrix} \cdot t \cdot \Delta$$

Per il singolo sottovettore r-$esimo$ si ha:

$$\{F_{\varepsilon 0}\}_r = -[B]_r^T [D] \{\varepsilon\} \cdot t\Delta = -\frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \alpha T \cdot t \cdot \Delta$$

$$= -\begin{bmatrix} b_r & 0 & c_r \\ 0 & c_r & b_r \end{bmatrix} [D] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\alpha T t}{2} = -\frac{E \ \alpha T t}{2(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} b_r + \nu b_r \\ \nu c_r + c_r \end{Bmatrix}$$

Il vettore completo che rappresenta le forze equivalenti ad una dilatazione termica dell'elemento, dovuta ad un incremento ΔT della temperatura, può quindi essere scritto come segue:

$$\{F_{\varepsilon 0}\}^e = -\frac{E\ \alpha \mathrm{T} t}{2(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} b_i + \nu b_i \\ \nu c_i + c_i \\ b_j + \nu b_j \\ \nu c_j + c_j \\ b_m + \nu b_m \\ \nu c_m + c_m \end{Bmatrix}$$

Le forze nodali equilibranti i carichi uniformemente distribuiti sull'elemento possono essere espresse come segue:

$$\{F_p\}^e = -\left(\int_V [N]^{\mathrm{T}} dV\right)\{p\} \quad = -\left(\int_V \begin{Bmatrix} \mathrm{I}N_i' \\ \mathrm{I}N_j' \\ \mathrm{I}N_m' \end{Bmatrix} dV\right)\{p\}$$

Per il singolo sottovettore r-esimo si ha:

$$\{F_p\}_r = -[\mathrm{I}]\left(\int_V N_r' dV\right)\{p\} \quad = -\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \int_V N_r' dV$$

Il vettore completo, come si è fatto nei casi precedenti, si ottiene facilmente dal sottovettore generico permutando gli indici.