Problemi spaziali:

Elemento tetraedrico a 4 nodi

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

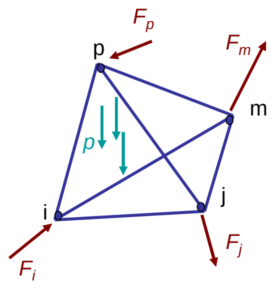
La trattazione è perfettamente analoga a quella vista per l'elemento triangolare a *3* nodi

Vettori spostamento e forze di elemento

$$\{d\}^e = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \\ d_p \end{Bmatrix} \qquad \{d_k\} = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} \qquad k = i, j, m, p$$

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \\ F_p \end{Bmatrix} \qquad \{F_k\} = \begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \\ W_k \end{Bmatrix} \qquad k = i, j, m, p$$

3 g.d.l. traslazionali nello spazio



Elemento tetraedrico a 4 nodi : funzioni di forma

Spostamento in seno all'elemento

$$\{f\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

Funzioni di forma lineari:

$$u = q_1 + q_2 x + q_3 y + q_4 z$$
$$v = q_5 + q_6 x + q_7 y + q_8 z$$
$$w = q_9 + q_{10} x + q_{11} y + q_{12} z$$

Le 12 costanti *q* possono essere ricavate risolvendo *3* sistemi di 4 equazioni in *4* incognite ognuno, del tipo:

$$u_i = q_1 + q_2 x_i + q_3 y_i + q_4 z_i$$
$$u_j = q_1 + q_2 x_j + q_3 y_j + q_4 z_j$$
$$u_m = q_1 + q_2 x_m + q_3 y_m + q_4 z_m$$
$$u_p = q_1 + q_2 x_p + q_3 y_p + q_4 z_p$$

....

Elemento tetraedrico a 4 nodi: funzioni di forma

Reinserendo nelle funzioni di forma le incognite *q* trovate è possibile esprimere gli spostamenti in seno all'elemento mediante relazioni del tipo:

$$u = \sum_{k=i}^{p} \frac{(a_k + b_k x + c_k y + d_k z)}{6V} u_k = \sum_{k=i}^{p} N_k' u_k \qquad \text{con} \qquad N_k' = \frac{(a_k + b_k x + c_k y + d_k z)}{6V}$$

$$6V = \det\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \qquad a_i = \det\begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \qquad b_i = -\det\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \qquad ....$$

In forma compatta

$$\{f\} = \left[[I]N_i' \ [I]N_j' \ [I]N_m' \ [I]N_k' \right] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \\ d_p \end{Bmatrix} \qquad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di deformazione

Vettore deformazione, *6* componenti nello spazio:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{du}{dx}\\ \frac{dv}{dy}\\ \frac{dw}{dz}\\ \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\\ \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\\ \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_i & B_j & B_m & B_p\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}d_i\\ d_j\\ d_m\\ d_p\end{Bmatrix}=[B]\{d\}^e$$

Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di deformazione

Componenti della matrice di deformazione

$$[B_k]=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_k'}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial z}\\ \frac{\partial N_k'}{\partial y} & \frac{\partial N_k'}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial z} & \frac{\partial N_k'}{\partial y}\\ \frac{\partial N_k'}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k'}{\partial x}\end{bmatrix}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}b_k & 0 & 0\\ 0 & c_k & 0\\ 0 & 0 & d_k\\ c_k & b_k & 0\\ 0 & d_k & c_k\\ d_k & 0 & b_k\end{bmatrix}\qquad k=i,j,m,p$$

Eventuali deformazioni iniziali possono essere descritte mediante un vettore ancora a *6* componenti

$$\{\varepsilon_0\}=\alpha\Delta T\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di elasticità

Campo di tensione in seno all'elemento

$$\{\sigma\} = [D]\left([B]\{d\}^e - \{\varepsilon_0\}\right) + \{\sigma_0\}$$

Matrice di elasticità

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \nu' & \nu' & 0 & 0 & 0 \\ \nu' & 1 & \nu' & 0 & 0 & 0 \\ \nu' & \nu' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m' \end{bmatrix} \qquad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \quad m' = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

Il Metodo degli Elementi Finiti

Elemento tetraedrico a 4 nodi: matrice di rigidezza

Per quanto riguarda la matrice di rigidezza, vale un'espressione analoga a quella vista per l'elemento triangolare piano

$$[K]^e = [B]^T[D]\,[B]\,V \quad = \begin{bmatrix} B_i^T \\ B_j^T \\ B_m^T \\ B_p^T \end{bmatrix}[D]\begin{bmatrix} B_i & B_j & B_m & B_p \end{bmatrix}\cdot V$$

La generica sottomatrice può essere scritta come segue:

$$[K]_{rs} = [B]_r^T[D]\,[B]_s \cdot V$$

Mentre per i vettori forze nodali equivalenti

$$\{F\}^e_{\varepsilon_0} = -[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}V$$

$$\{F_{\sigma 0}\}^e = \int_V [B]^T\{\sigma_0\}dV$$

$$\{F\}^e_p = -\int_v [N]^T\{p\}dV \qquad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$$