Introduzione al Calcolo Strutturale Matriciale

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta

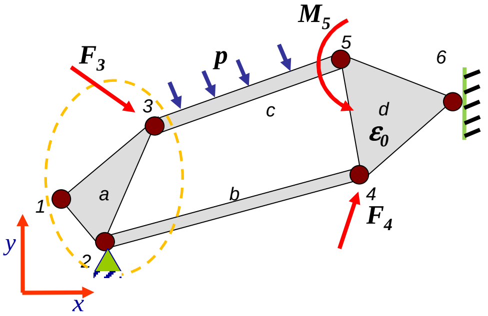
Per struttura discreta si intende un sistema meccanico composto da elementi strutturali caratterizzati da una propria individualità, connessi tra loro tramite un numero discreto di punti nodali.

I nodi possono essere soggetti a vincoli e a carichi concentrati. Eventuali carichi distribuiti possono essere applicati direttamente agli elementi costituenti.

Mediante il calcolo strutturale matriciale è possibile risolvere questa classe di problemi, sia per configurazioni isostatiche che iperstatiche.

In particolare, è possibile identificare la configurazione di equilibrio, le reazioni vincolari, lo stato di tensione e deformazione nei singoli componenti.

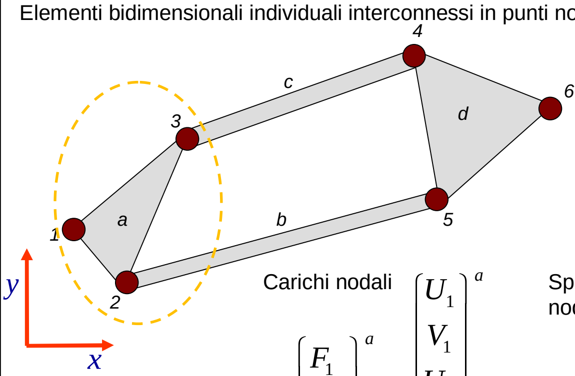
Tutto ciò esprimendo le grandezze in funzione degli ***spostamenti nodali***, e a patto di conoscere le proprietà elastiche degli elementi costituenti.

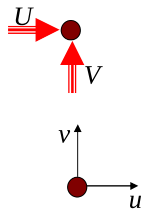


Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta (esempio bidimensionale)

Elementi bidimensionali individuali interconnessi in punti nodali





Carichi nodali

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix}^a$$

Spostamenti nodali

$$\{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}^a$$

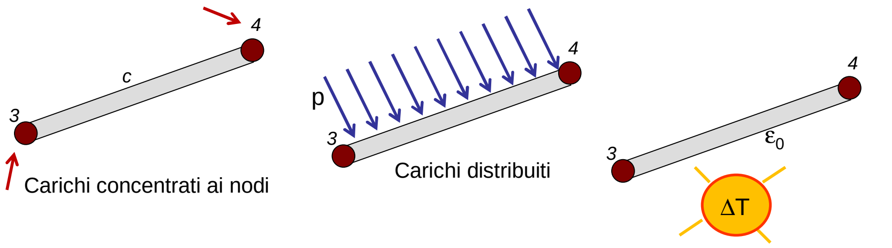
$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}$$

$$\{d_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta (esempio bidimensionale)

Carichi agenti sul generico elemento della struttura



Carichi concentrati ai nodi

Carichi distribuiti

Deformazioni iniziali dovute a carichi termici

Per risolvere il problema discreto, si parte dalla relazione che esprime la condizione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta: caso generale

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}^a_p + \{F\}^a_{\varepsilon 0}$$

$\{F\}^a$ Vettore delle forze agenti sui nodi

$\{F\}^a_p$ Vettore delle forze nodali necessarie ad equilibrare i carichi distribuiti

$\{F\}^a_{\varepsilon_0}$ Vettore delle forze nodali necessarie ad equilibrare le deformazioni iniziali

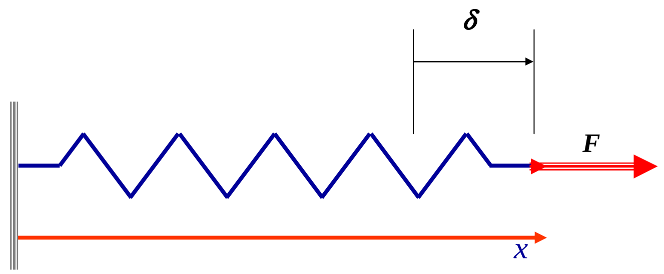
$\{F\}^a_d = [K]^a \{d\}^a$ Vettore delle forze nodali necessarie a produrre lo spostamento elastico dei nodi descritto dal vettore $\{d\}^a$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Concetto di rigidezza di una struttura

Esempio: molla elicoidale

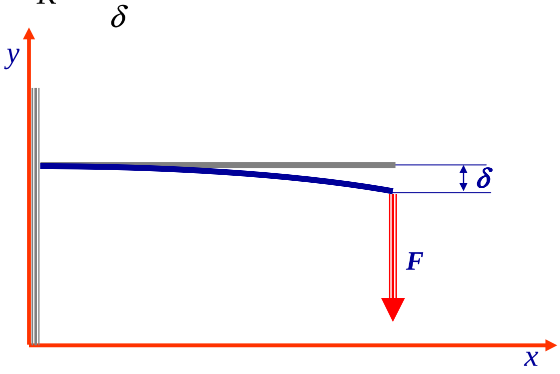
$$K_{elic} = \frac{F}{\delta}$$



Concetto di rigidezza di una struttura

Esempio: trave incastrata

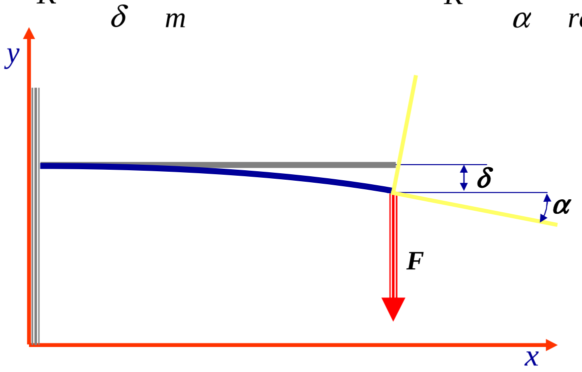
$$K^{f} = \frac{F}{\delta}$$



Concetto di rigidezza di una struttura

Esempio: trave incastrata

$$K^{f} = \frac{F}{\delta} = \frac{N}{m} \qquad K^{I} = \frac{F}{\alpha} = \frac{N}{rad}$$

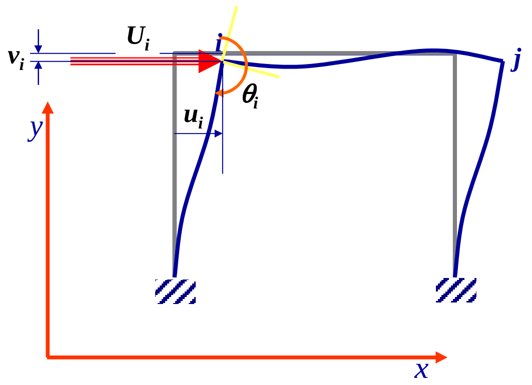


Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Concetto di rigidezza di una struttura

Esempio: portale

$$K = \frac{F}{\delta} \longrightarrow \quad K^*_{11} = \frac{U_i}{u_i} \quad K^*_{12} = \frac{U_i}{v_i} \quad K^*_{13} = \frac{U_i}{\vartheta_i}$$



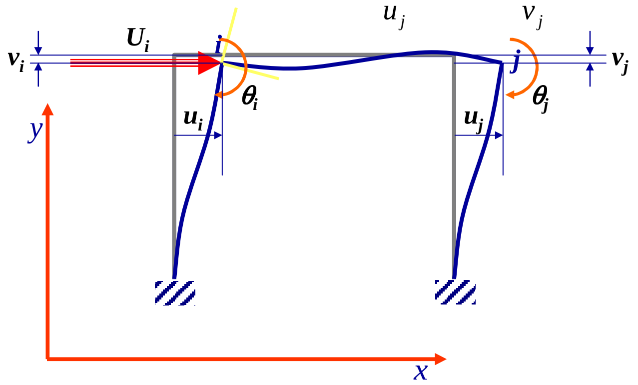
Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Concetto di rigidezza di una struttura

Esempio: portale

$$K = \frac{F}{\delta} \longrightarrow \quad K^*_{11} = \frac{U_i}{u_i} \quad K^*_{12} = \frac{U_i}{v_i} \quad K^*_{13} = \frac{U_i}{\vartheta_i}$$

$$K^{*14} = \frac{U_i}{u_j} \quad K^{*15} = \frac{U_i}{v_j} \quad K^{*16} = \frac{U_i}{\vartheta_j}$$



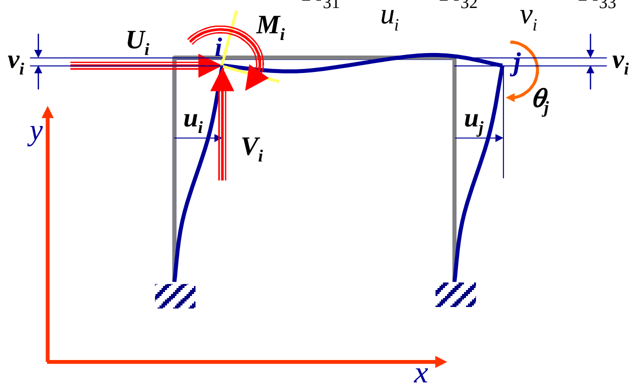
Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Concetto di rigidezza di una struttura

Esempio: portale

$$K = \frac{F}{\delta} \longrightarrow \quad K^*_{21} = \frac{V_i}{u_i} \quad K^*_{22} = \frac{V_i}{v_i} \quad K^*_{23} = \frac{V_i}{\vartheta_i}$$

$$K^*_{31} = \frac{M_i}{u_i} \quad K^*_{32} = \frac{M_i}{v_i} \quad K^*_{33} = \frac{M_i}{\vartheta_i}$$



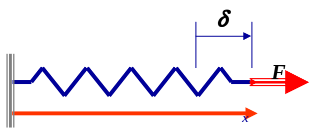
Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Concetto di rigidezza di una struttura

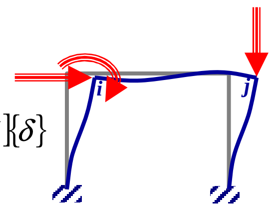
Stesso discorso si potrebbe ripetere all'inverso pensando di imporre uno spostamento alla volta, e vedendo quali forze si generano conseguentemente. Si troverebbero altre componenti *K* analoghe a quelle viste negli esempi in precedenza.

In generale quindi, la rigidezza di una qualsiasi struttura può essere rappresentata da una matrice

$$F = K \cdot \delta$$



$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$



N.B. La matrice di rigidezza *[K]* *NON E'* la *[K*]* ricavata a titolo di esempio in precedenza.
Di seguito verrà chiarito il suo reale significato.

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: vettori forza e spostamento

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}^a_p + \{F\}^a_{\varepsilon 0}$$

m = numero dei nodi di elemento

l = numero dei gradi di libertà per nodo

$$\{F\}^a = \begin{Bmatrix} F_1 \\ .. \\ F_i \\ .. \\ F_m \end{Bmatrix}^a \qquad \{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_m \end{Bmatrix}^a \qquad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{i1} \\ .. \\ F_{il} \end{Bmatrix} \qquad \{d_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i1} \\ .. \\ d_{il} \end{Bmatrix}$$

Dunque i vettori forza e spostamento hanno in generale *m* x *l* elementi

N.B Le componenti di forza e spostamento sono “generalizzate”, potendo trattarsi anche di momenti e rotazioni

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Struttura discreta caso generale: matrice di rigidezza di elemento

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}^a_p + \{F\}^a_{\varepsilon 0}$$

m = numero dei nodi di elemento

l = numero dei gradi di libertà per nodo

$$[K]^a = \begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1i} & .. & K_{1m} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{i1} & .. & K_{ij} & .. & K_{im} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{m1} & .. & K_{mj} & .. & K_{mm} \end{bmatrix} \qquad [K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{ij_{11}} & .. & K_{ij_{1l}} \\ .. & & .. \\ K_{ij_{l1}} & .. & K_{ij_{ll}} \end{bmatrix}$$

$[K]^a$ Matrice di rigidezza di elemento, di dimensioni *ml* x *ml*

Struttura discreta caso generale: matrice di rigidezza di elemento

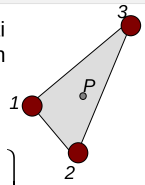
Significato dei termini della matrice di rigidezza di elemento

$$\{F\}_d^a = \begin{Bmatrix} F_{d_1} \\ .. \\ F_{d_i} \\ .. \\ F_{d_m} \end{Bmatrix}_d^a = \begin{bmatrix} K_{11} & .. & K_{1i} & .. & K_{1m} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{i1} & .. & K_{ij} & .. & K_{im} \\ .. & & .. & & .. \\ K_{m1} & .. & K_{mj} & .. & K_{mm} \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} d_1 \\ .. \\ d_i \\ .. \\ d_m \end{Bmatrix}^a = [K]^a \{d\}^a$$

Il generico termine K_{ij} consente di determinare la quota parte della *componente* *i*-esima della $\{F\}_d$ elastica che si genera qualora si imponesse la *j*-esima componente del vettore $\{d\}$, mantenendo nulli tutti gli altri spostamenti di elemento.

Struttura discreta caso generale: tensioni e deformazioni di elemento

Per ogni punto *P* interno all'elemento discreto, o soltanto per i punti critici, è possibile descrivere il campo di tensione e deformazione, in funzione degli spostamenti nodali, mediante le espressioni:



$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\}^a$$

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ .. \\ \varepsilon_{r_\varepsilon} \end{Bmatrix} \qquad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ .. \\ \sigma_{r_\sigma} \end{Bmatrix}$$

dimensionalmente:

$[B]$ $[r_\varepsilon \ x \ ml]$ Matrice di deformazione

$[D]$ $[r_\sigma \ x \ r_\varepsilon]$ Matrice di elasticità (è l'inverso del legame costitutivo!)

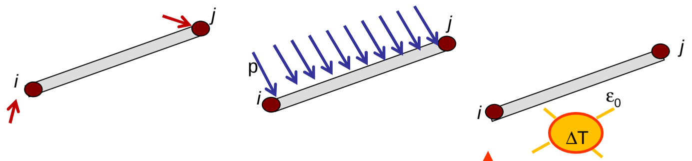
N.B. Nel caso più generale le componenti delle espressioni sono *f(x,y,z),* coordinate di *P* all'interno dell'elemento considerato

Elemento Asta nel piano

Dalle dispense del prof. Dario Amodio e dalle lezioni del prof. Giovanni Santucci

Elemento asta generalizzata nel piano

Asta nel piano, di sezione uniforme *A*, lunghezza *L*. Parametri elastici del materiale *E*,*ν*. Asta “generalizzata”, in grado di reagire a trazione-compressione per l’effetto dei carichi concentrati nodali e deformazioni iniziali, e a flessione, sotto l’azione dei carichi distribuiti.

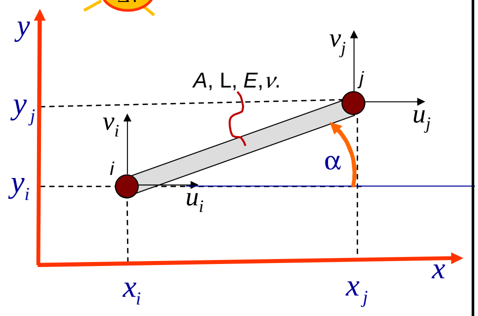


Lunghezza dell’asta

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

Angolo formato dall’asta con l’asse delle ascisse

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right)$$

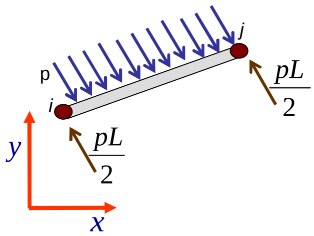


Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Forze nodali equivalenti ai carichi distribuiti:

$$\{F\}_p^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_p^a = \frac{pL}{2}\begin{Bmatrix} -\sin a \\ \cos a \\ -\sin a \\ \cos a \end{Bmatrix}$$



Relazione di equilibrio di elemento

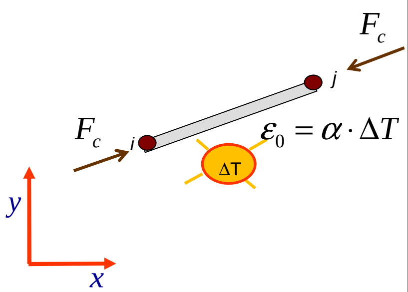
$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Forze nodali che impediscono le deformazioni iniziali:

$$\varepsilon_0 = \alpha \Delta T \qquad \sigma_0 = E\varepsilon_0$$

$$F_c = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A$$

$$\{F\}_{\varepsilon_0}^a = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0}^a = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} \cos a \\ \sin a \\ -\cos a \\ -\sin a \end{Bmatrix}$$



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

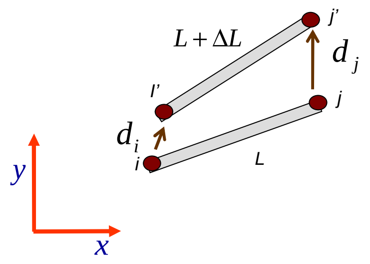
Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Spostamenti nodali

$$\{d\}^a = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}^a = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$



Allungamento dell'asta

$$\Delta L = (u_j - u_i)\cos a + (v_j - v_i)\sin a$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

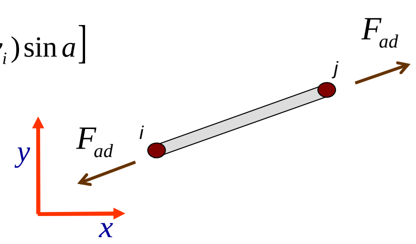
$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Forza assiale in grado di produrre l'allungamento ΔL

$$F_{ad} = A \cdot E \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{EA}{L}\left[(u_j - u_i)\cos a + (v_j - v_i)\sin a\right]$$

In componenti

$$\{F\}_d^a = \begin{Bmatrix} F_{d_i} \\ F_{d_j} \end{Bmatrix}_d^a = \begin{Bmatrix} -cF_{ad} \\ -sF_{ad} \\ cF_{ad} \\ sF_{ad} \end{Bmatrix}_d^a = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix}$$



Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

$$U_i = \frac{EA}{L}\left(+u_i c^2 + v_i sc - u_j c^2 - v_j sc\right)$$

$$V_i = \frac{EA}{L}\left(+u_i sc + v_i s^2 - u_j sc - v_j s^2\right)$$

$$U_j = \frac{EA}{L}\left(-u_i c^2 - v_i sc + u_j c^2 + v_j sc\right)$$

$$V_i = \frac{EA}{L}\left(-u_i sc - v_i s^2 + u_j sc + v_j s^2\right)$$

$$c = \cos a$$

$$s = \sin a$$

Introduzione al calcolo strutturale matriciale

Elemento asta generalizzata nel piano

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a \{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

In notazione matriciale:

$$\{F\}_d^a = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^a \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} = [K]^a \{d\}^a$$

$$K_{ij} = \frac{EA}{L}(-1)^{i+j}\begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}$$

N.B. [*K*] è sempre simmetrica, conseguenza della conservazione dell'energia

Relazione di equilibrio di elemento

$$\{F\}^a = [K]^a\{d\}^a + \{F\}_p^a + \{F\}_{\varepsilon 0}^a$$

Per l'asta "generalizzata" si ha dunque:

$$\{F\}^a = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}^a \{d\}^a + \frac{pL}{2}\begin{Bmatrix} -s \\ c \\ -s \\ c \end{Bmatrix} + E\alpha\Delta T\begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix}$$

Deformazioni e tensioni massime e minime di elemento

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\{d\}^a + \frac{pL^2 z}{8EI}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} - \alpha\Delta T\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix}\{d\}^a + \frac{pL^2 z}{8I}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} - E\alpha\Delta T\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

z semiampiezza della sezione trasversale dell'asta

N.B. L'asta "pura" si comporta solo come puntone, reagendo soltanto a trazione-compressione, e non a flessione. In tal caso non è possibile applicare carichi distribuiti. Tutte le espressioni relative all'asta generalizzata, si possono particolarizzare eliminando i contributi dovuti a tali carichi.

Trasformazione di coordinate: caso generale

Spesso conviene definire le caratteristiche di elemento in un riferimento locale e poi "trasformare" le espressioni nel riferimento globale all'atto dell'assemblaggio finale della struttura

Conoscendo la posizione del sistema locale associato all'elemento rispetto a quello globale è possibile legare i vettori spostamento nei due riferimenti mediante:

$$\{d'\}^a = [L]\{d\}^a$$

$[L]$ Matrice di trasformazione degli spostamenti nodali. E'composta da coseni direttori.

Nel sistema locale si avranno:

$$\{F'\}^a_d = [K']^a\{d'\}^a$$

$$\{F'\}^a_p$$

$$\{F'\}^a_{\varepsilon_0}$$

La relazione tra $\{F'\}$, $\{F\}$ e $[K']$, $[K]$ segue dall'invarianza del lavoro svolto dalle forze rispetto al sistema di riferimento

Trasformazione di coordinate: caso generale

Il lavoro nei 2 sistemi deve essere lo stesso:

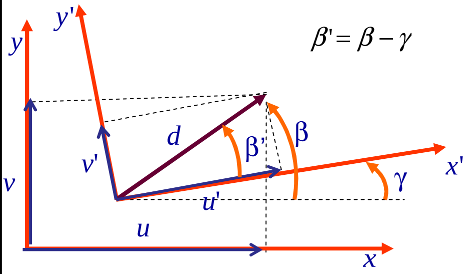
$$\left(\{F\}^a\right)^T\{d\}^a = \left(\{F'\}^a\right)^T\{d'\}^a \quad = \quad \left(\{F\}^a\right)^T\{d\}^a = \left(\{F'\}^a\right)^T[L]\{d\}^a$$

$\longrightarrow$ $\{F\}^a = [L]^T\{F'\}^a$ Relazione tra i vettori forze nei due riferimenti

$$\{F\}^a = [L]^T\{F'\}^a \longrightarrow [K]^a\{d\}^a = [L]^T[K']^a\{d'\}^a = [L]^T[K']^a[L]\{d\}^a$$

$\longrightarrow$ $[K]^a = [L]^T[K']^a[L]$ Relazione tra le matrici di rigidezza nei due riferimenti

Trasformazione di coordinate: caso bidimensionale



$$\beta' = \beta - \gamma$$

$$\cos\beta' = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$
$$\sin\beta' = \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma$$

$$u = d\cos\beta \qquad u' = d\cos\beta'$$
$$v = d\sin\beta \qquad v' = d\sin\beta'$$

$$u' = d\cos\beta\cos\gamma + d\sin\beta\sin\gamma = u\cos\gamma + v\sin\gamma$$
$$v' = d\sin\beta\cos\gamma - d\cos\beta\sin\gamma = -u\sin\gamma + v\cos\gamma$$

$$\{d_i'\} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \{d_i\} = [L_{ii}]\{d_i\}$$

Ad esempio, per un elemento monodimensionale a 2 nodi nel piano:

$$\{d'\}^a = \begin{Bmatrix} d_i' \\ d_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ii} & 0 \\ 0 & L_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} = [L]\{d\}^a$$

Spesso si pone l'asse x' coincidente con l'asse dell'elemento: $\beta' = 0 \quad \beta = \gamma = \alpha$

Trasformazione di coordinate: caso bidimensionale

Nel caso dell'asta nel piano

$$\{d'\}^a = \begin{Bmatrix} d_i' \\ d_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \{d\}^a$$

$$\beta' = 0 \quad \beta = \gamma = \alpha \qquad c = \cos a \quad s = \sin a$$

La matrice di rigidezza nel riferimento locale si scrive:

$$U_i' = \frac{EA}{L}u_i' - \frac{EA}{L}u_j'$$
$$U_j' = -\frac{EA}{L}u_i' + \frac{EA}{L}u_j'$$

quindi: $[K'] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$[K] = [L]^T[K'][L] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$