

**GUIDA ALLE LEZIONI DEL CORSO DI
COSTRUZIONE DI MACCHINE**

1 - TRASMISSIONI MECCANICHE

1.1 - Introduzione.

Una trasmissione meccanica è un meccanismo destinato a trasmettere potenza da un motore primo ad una macchina operatrice, generalmente implicando una variazione delle velocità, forze e momenti e talvolta dei caratteri e delle leggi del moto.

La presenza di una trasmissione fra motore primo e macchina operatrice è dovuta ad una serie di ragioni:

- a) le velocità richieste degli organi di lavoro della macchina operatrice molto spesso sono differenti dalle velocità di motori standard;
- b) la velocità della macchina deve essere frequentemente variata (regolata) mentre il motore primo non può essere usato con pieno vantaggio a questo scopo;
- c) in taluni istanti le operazioni della macchina possono richiedere momenti assai superiori di quelli che si ottengono sull'albero del motore;
- d) talvolta lo stesso motore dev'essere usato per muovere più meccanismi con velocità differenti;
- e) generalmente i motori sono progettati per moti rotatori uniformi mentre gli organi di lavoro della macchina operatrice debbono spesso muoversi con velocità variabile o arresti periodici;
- f) talvolta considerazioni di sicurezza, opportunità di manutenzione o le dimensioni delle macchine non permettono accoppiamenti diretti fra motore e macchina operatrice.

Nei passati decenni le trasmissioni meccaniche furono di fatto i soli apparati usati nelle macchine per raggiungere gli scopi precedentemente elencati. Una caratteristica preminente nell'attuale ingegneria meccanica è l'impiego estensivo per gli stessi scopi, assieme alle trasmissioni meccaniche, di quelle elettriche, idrauliche e pneumatiche. Frequentemente sia le trasmissioni meccaniche che quelle summenzionate sono usate simultaneamente per muovere vari meccanismi.

I vantaggi comparati offerti da queste trasmissioni sono delineati, seppure in via generale, nella Tav. 1.

Proprietà e vantaggi	Trasmissioni non meccaniche			Trasmis. meccaniche	
	elettrica	idraulica	pneumat.	attrito	interfer.
Sorgente di potenza centralizzata	•		•		
Semplicità di trasmissione su grandi distanze	•				
Facile accumulazione di potenza			•		
Variazione discontinua di velocità su grandi intervalli	•			•	•
Variazione continua di velocità su grandi intervalli	•	•		•	•
Accurata conservazione del rapporto di trasmissione					•
Elevate velocità di rotazione	•		•		
Semplicità di realizzazione di moti rettilinei		•	•	•	•
Insensibilità alla temperatura ambiente	•		•		•
Pressioni agenti sulla macchina comparativamente elevate		•			•
Facilità di controllo, sia automatico che a distanza	•				

Tavola 1 - Proprietà e vantaggi delle trasmissioni di potenza.

La scelta appropriata di una trasmissione per ciascun caso concreto può essere fatta solo tramite la comparazione di caratteristiche tecniche ed economiche di diversi progetti.

Il corso di Costruzione di Macchine tratta le trasmissioni meccaniche, progettate per moti rotatori uniformi. Trasmissioni di altro tipo, così come trasmissioni idrauliche, elettriche e pneumatiche, sono l'oggetto di corsi specializzati che ne trattano specificamente il funzionamento ed il progetto.

1.2 - Tipi di trasmissioni.

In funzione delle modalità con le quali esse trasmettono il moto dal motore primo alla macchina operatrice, le trasmissioni meccaniche appartengono alle seguenti categorie:

- 1 - Trasmissioni per attrito: a contatto diretto (ruote di frizione) e a connessione flessibile (trasmissioni a cinghia);
- 2 - Trasmissioni per interferenza: a contatto diretto (ingranaggi dentati e a vite) e a connessione flessibile (trasmissioni per catena o a cinghia dentata).

Sia le trasmissioni ad attrito che quelle per interferenza si diversificano, per la mutua collocazione degli alberi, in trasmissioni ad assi paralleli, concorrenti e sghembi; per le variazioni del rapporto di trasmissione, in trasmissioni a rapporto costante, a gradini e variabile con continuità.

Se la potenza sia trasmessa per attrito o per interferenza determina la forma delle superfici di contatto e, contemporaneamente, le proprietà caratteristiche della trasmissione.

Nelle trasmissioni per attrito le sezioni trasversali delle superfici di contatto, normali all'asse di rotazione, sono cerchi. La costruzione di tali superfici, anche quando viene richiesta una grande precisione, è abbastanza semplice. Nelle trasmissioni per interferenza le parti provviste di denti trasmettono il momento dalla ruota motrice a quella mossa. Mentre la trasmissione funziona, alcuni denti si abbandonano mentre altri sono a contatto l'un l'altro ed altri ancora iniziano l'ingranamento. Anche modeste imprecisioni nel profilo dei denti e le deformazioni degli elementi causano accelerazioni che si traducono in rumore e rapida usura delle superfici di accoppiamento. Questo è il principale svantaggio degli ingranaggi dentati. Sebbene una più elevata precisione costruttiva e denti di forma speciale possono ridurre questo inconveniente, esso non può essere interamente eliminato. Perciò, ad esempio, nei torni destinati alla finitura di superfici di lavoro, la testa è mossa non da ingranaggi ma da cinghie.

Nelle trasmissioni ad attrito la transizione dalla periferia di contatto di un diametro alla periferia dell'altro può essere fatta liscia come si desidera. La variazione del rapporto di trasmissione può perciò essere effettuata con gradualità.

Negli ingranaggi dentati ciò può essere fatto solo attraverso l'impiego di apparecchiature complicate.

1.3 - Trasmissioni con rapporto di trasmissione costante.

Il progetto di una trasmissione a rapporto di velocità costante dovrebbe, di norma, discendere dai seguenti dati: potenza trasmessa (W) o momento torcente (M_t) sull'albero mosso; velocità di rotazione (giri/min) dell'albero motore (n_1) e dell'albero condotto (n_2); mutua collocazione degli alberi e distanza fra di essi; dimensioni di ingombro; condizioni operative della trasmissione $M_t = f(t)$ e $n = F(t)$.

In generale il progetto ha parecchie soluzioni, cioè, le condizioni date possono essere usate per sviluppare trasmissioni di vari tipi. Tutti i possibili progetti dovrebbero essere comparati per rendimento, peso, dimensioni, costi di costruzione e di esercizio al fine di scegliere il più vantaggioso. Alcune considerazioni generali, soprattutto l'esperienza disponibile nella progettazione, nella costruzione e nella gestione di differenti trasmissioni, ci permette di delineare generalmente i limiti di applicazione prioritaria di questi meccanismi di trasmissione. Comunque questi limiti sono di natura temporanea; giacché vengono prodotti nuovi materiali, i metodi di costruzione vengono migliorati e la nostra conoscenza dei fenomeni che si sviluppano nelle trasmissioni diventa sempre più approfondita cosicché i progetti vengono perfezionati per seguire più ampi campi di applicazione.

1.3.1 - Rapporto di trasmissione.

Il rapporto di velocità assegnato $i = n_1/n_2$ può essere ottenuto su uno stadio di un meccanismo di trasmissione di qualsiasi tipo ($i=i_1$) o su numerosi stadi di meccanismi dello stesso tipo o di differenti tipi ($i = i_1 \times i_2 \dots \times i_p$)

Elevati rapporti di velocità in un singolo stadio sono possibili in ingranaggi a ruote dentate. Ingranaggi a vite si distinguono per i valori più elevati di i_1 (usualmente ≤ 40); seguono gli ingranaggi dentati (i_1 da 4 a 20) e le trasmissioni a catena (catena a rulli $i_1 \leq$ da 6 a 10; catena silenziosa fino a 15). Negli ingranaggi a ruote dentate i valori ottenibili di i_1 sono, generalmente parlando, limitati solo dalle dimensioni del meccanismo.

1.3.2 - Velocità periferica.

Ad una data potenza trasmessa W lo sforzo periferico è dato da $P = C W/v$, dove v è la velocità periferica e C è una costante che tiene conto delle unità di misura adottate. Per contro lo sforzo periferico può essere espresso come un prodotto ($p \cdot b$) dello spessore b dell'elemento che trasmette la potenza (spessore della cinghia, nastro, ruota, ecc.) per il carico p per unità di larghezza. A parità di altre condizioni, per ridurre le dimensioni (b) della trasmissione è vantaggioso trasmettere potenza alla massima velocità possibile $v = v_{\max}$. Il valore di v_{\max} è limitato da vari fattori.

Per le trasmissioni a cinghia o catena le forze centrifughe, aggiungendo carico al flessibile e diminuendo la sua tensione utile, costituiscono un fattore importante. Per meccanismi con cinghie piane usuali si ha $v_{\max} \leq 25$ m/s; per cinghie speciali fatte di fibre sintetiche è $v_{\max} = 50$ m/s. Nelle cinghie trapezoidali il surriscaldamento dovuto all'isteresi elastica è un altro fattore importante. Il suo effetto, per un elevato numero di flessioni di cinghia nell'unità di tempo, cresce rapidamente in intensità. Cinghie trapezoidali standard permettono $v_{\max} = 25$ o 30 m/s; cinghie trapezoidali di qualità speciale (con un'anima in fili d'acciaio) ammettono $v_{\max} = 40$ m/s. Nei meccanismi a nastro d'acciaio le velocità periferiche possono arrivare fino ad 80 m/s.

Giacchè le maglie di una catena subiscono degli urti, la velocità delle trasmissioni a catena non dovrebbero superare il valore di 25-30 m/s.

Negli ingranaggi dentati l'aumento della velocità periferica richiede una precisione assai elevata in sede costruttiva, altrimenti carichi aggiuntivi generati dai difetti dei denti raggiungono valori proibitivi. Ingranaggi a denti dritti, per velocità maggiori di 10 m/s, e ingranaggi conici, per velocità superiori a 15 m/s, dovrebbero essere ad alta precisione. Al livello attuale di costruzione le più elevate velocità consentite agli ingranaggi raggiungono i 150 m/s.

Negli ingranaggi a vite la velocità periferica sulla vite non supera i 20 m/s. Essa è limitata dalla resistenza all'usura del materiale di cui è fatta la coppia.

La velocità delle trasmissioni per attrito usualmente non supera i 25 m/s.

1.3.3 - Potenza trasmessa.

Gli ingranaggi dentati possono trasmettere la potenza più elevata: riduttori ad ingranaggi per turbine navali raggiungono potenze anche superiori ai 35000 kW. Di fatto la potenza trasmessa da ingranaggi dentati è limitata solo dalla difficoltà di trasporto di pezzi meccanici di alta precisione di grandi dimensioni.

Negli ingranaggi a vite la potenza è limitata dalla grande quantità di calore prodotto e conseguentemente dall'elevata temperatura raggiunta. La potenza trasmessa negli odierni ingranaggi a vite mai supera i 550 kW. Comunque essa potrebbe essere aumentata di parecchie volte alterando la forma del dente (particolarmente attraverso l'uso di vite a clessidra) e così riducendo la quantità di calore generato ed aumentando la dissipazione del calore.

Nelle catene e cinghie trapezoidali più elevati valori di potenza vengono trasmessi aumentando le loro dimensioni trasversali ed il numero di catene o cinghie messe in parallelo. Comunque, quando vengono impiegati numerosi elementi in parallelo, la probabilità di distribuzione uniforme del carico fra di essi diminuisce e l'ulteriore aumento del numero di cinghie o catene diventa inutile. Così, per esempio, una cinghia trapezoidale della massima dimensione standard (tipo E) alla velocità di 25 m/s e sotto le più favorevoli condizioni di lavoro può trasmettere circa 35 kW. Venti cinghie potrebbero perciò essere necessarie per fornire circa 750 kW, se il carico fosse distribuito uniformemente su tutte le cinghie. Per cinghie trapezoidali 750-1100 kW costituisce il massimo della potenza trasmessa. Trasmissioni con cinghie piane di cuoio possono trasmettere 1800 kW, mentre trasmissioni per catena arrivano a circa 3500 kW.

La capacità di lavoro dei meccanismi di frizione e degli ingranaggi dentati è principalmente limitata dalla pressione al contatto. Ma mentre in ingranaggi dentati la pressione normale approssima lo sforzo periferico, in un meccanismo di frizione questa supera il precedente di almeno dieci volte (essa è pari allo sforzo periferico diviso il coefficiente di attrito). E' vero che nelle ruote di frizione il raggio di curvatura delle superfici di contatto, a parità di diametri primitivi, è parecchie volte più grande che negli ingranaggi dentati ma anche questo non basta per compensare le differenze nelle pressioni normali. Lo spessore delle ruote di frizione è similmente limitato giacché, a causa delle imprecisioni e deformazioni, solo una piccola parte della superficie nominale di contatto partecipa alla trasmissione dello sforzo periferico.

E' ora chiaro perchè la potenza massima dei meccanismi a frizione giammai supera 150-220 kW.

1.3.4 - Perdita di potenza e rendimento.

Questi indici occupano un posto speciale fra le caratteristiche di trasmissione. Innanzi tutto essi mostrano il dispendio di potenza improduttiva; giacché le trasmissioni vengono impiegate su vasta scala, ciò è di per sé assai importante. Secondariamente essi indicano l'ammontare del calore generato in una trasmissione ed indirettamente caratterizzano l'usura del meccanismo, giacché la potenza perduta nella trasmissione viene convertita in calore e va in parte a danneggiare le superfici attive. Lo studio dettagliato delle perdite di potenza e del rendimento appartiene alla teoria dei meccanismi. Qui ci dedicheremo alle perdite di potenza solo per quanto è necessario al fine del progetto della trasmissione, della scelta del materiale e per sviluppare progetti più nuovi e più razionali.

Le perdite di potenza in qualsiasi trasmissione possono essere espresse nella seguente forma generale:

$$L = L_o + L_v$$

dove L è la perdita di potenza (in kW), L_o è la parte costante delle perdite interamente indipendente dal carico e L_v è la parte variabile delle perdite, per intero proporzionale al carico.

La perdita L_o approssima la potenza di funzionamento "a vuoto", cioè, la potenza necessaria a far ruotare il meccanismo con una potenza d'uscita nulla. Essa dipende dal peso delle parti mosse, dalla velocità di rotazione e dall'attrito nei cuscinetti e nei denti. La perdita L_v viene espressa dalla relazione:

$$L_v = \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) W$$

dove η è il rendimento che tiene conto solo della parte delle perdite della trasmissione (L_v) proporzionali al carico. Così il rendimento totale della trasmissione che considera tutte le perdite è uguale a:

$$\eta_{tot} = \frac{W}{L + W} = \frac{W}{L_o + \frac{1-\eta}{\eta} W + W} = \frac{W}{L_o + \frac{W}{\eta}} = \frac{1}{\frac{L_o}{W} + \frac{1}{\eta}}$$

Segue dalla precedente espressione che il rendimento totale del meccanismo è funzione del carico (W): quando il carico diminuisce il rendimento si deteriora vistosamente; solo quando $L_o/W \ll 1/\eta$ si può assumere che η_{tot} è circa uguale a η . Ma indagini hanno mostrato che in trasmissioni ad alta velocità la perdita L_o è non solo commensurabile con W ma anche talvolta superiore. In particolare questo è il caso di alcuni tipi di trasmissioni di torni ad alta velocità.

Nella nostra ulteriore esposizione considereremo solo il fattore η , cioè, quella parte del rendimento totale che tiene conto delle perdite proporzionali al carico utile.

Prendiamo alcuni valori caratteristici di trasmissioni monostadio. Giacchè i valori di η sono prossimi all'unità, non è il rendimento ma i fattori di perdita, espressi in percentuale, più convenienti per la comparazione:

$$k_L = \frac{1}{\eta} - 1 = \frac{1-\eta}{\eta}$$

Le perdite negli ingranaggi dentati sono minime: 1% (corrispondenti ad $\eta = 0.99$); in una trasmissione per catena: 2%; in una trasmissione per cinghia piana: 2-5%; in ruote di frizione: 4%; nelle cinghie trapezoidali: 4%. In un ingranaggio a vite le perdite sono comparativamente alte: 10-25%; quindi, sebbene il rendimento di questo meccanismo sia comparativamente alto ($\eta = 0.9$), le sue perdite sono dieci volte più elevate che in un ingranaggio dentato.

Dovrebbe essere precisato che i valori citati sono solo di natura comparativa. I valori di rendimento e di perdite di potenza sono dovuti ai parametri strutturali del meccanismo.

1.3.5 - Pesì, dimensioni e costi delle trasmissioni.

Illustriamo questo punto con un esempio concreto: prendiamo una trasmissione da 75 kW con un rapporto di velocità in unico stadio $i_1 = n_1/n_2 = 1000/250 = 4$. Gli indici principali sono dati nella tabella 2.

Una idea delle dimensioni del meccanismo è fornita dall'interasse delle ruote e dal loro spessore. Il costo del meccanismo è dato come percentuale del costo della trasmissione a cinghie. Il peso del meccanismo include il peso dei suoi alberi e cuscinetti. Le velocità periferiche sono state assunte, per la cinghia, di 23 m/s, per la catena, di 7 m/s e, per gli ingranaggi dentati e a vite, di 5.85 m/s.

Meccanismi di trasmissione	Interasse [mm]	Spessore di ingranaggi ruote o pulegge [mm]	Peso approssimativo [kg]	Costo percentuale
Cinghia piana aperta	5000	350	500	106
Cinghia piana con ruota oziosa	2300	250	550	125
Cinghia a V aperta	1800	130	500	100
Catena	830	360	500	140
Ingranaggi dentati	280	160	600	165
Ingranaggi a vite	280	60	450	125

Tavola 2 - Confronto tra differenti soluzioni costruttive

Dalla tavola 2 si vede che gli ingranaggi dentati e a vite hanno una forma più compatta e possono essere così più facilmente inseriti nelle macchine. Se teniamo in conto la natura approssimata delle figure citate, le differenze in peso non si mostrano molto elevate. Il peso di tutti i tipi di trasmissione, conformemente alla loro condizione, cade fra i 450 e 500 kg. I valori inferiori si riferiscono agli ingranaggi a vite mentre i maggiori sono propri degli ingranaggi dentati.

1.4 - Trasmissioni per flessibile.

1.4.1 - Cinghia piana.

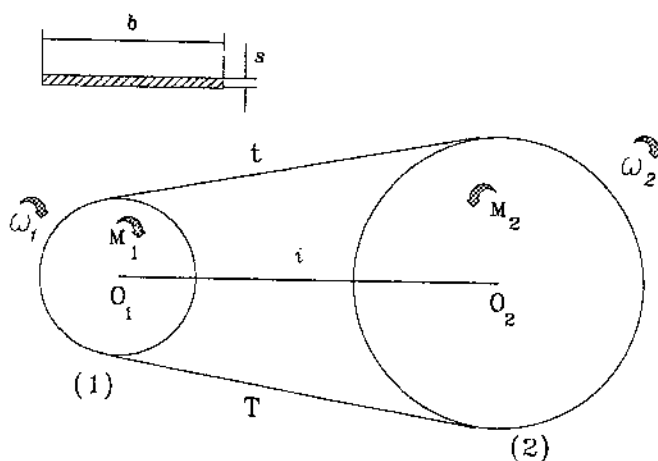


Fig. 1.1

Nella figura 1.1 è schematicamente rappresentata la trasmissione. Essa è costituita dalla puleggia motrice (1) e da quella condotta (2), attorno alle quali si avvolge la *cinghia piana*, caratterizzata da una sezione rettangolare $[s \cdot b]$, ove lo spessore s è assai più piccolo della larghezza b .

Se con ω_1 e ω_2 indichiamo le velocità angolari delle pulegge e con V la velocità della cinghia, l'assenza di strisciamento nel contatto cinghia-pulegge consente di scrivere:

$$\omega_1 \frac{d_1}{2} = V = \omega_2 \frac{d_2}{2}$$

donde la possibilità di definire il *rapporto di trasmissione*:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$$

Se M_1 ed M_2 sono i momenti applicati alle pulegge, sotto l'ipotesi di assenza di perdite per attrito, possiamo scrivere:

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2$$

dalla quale ancora ricaviamo

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$$

Al momento M_1 corrispondono le forze T e t sui rami di flessibile compresi tra le pulegge. In condizioni di regime stazionario, per l'equilibrio alla rotazione della porzione di cinghia che avvolge la puleggia (1), sussiste la relazione

$$(T - t) \frac{d_1}{2} = M_1$$

Analogamente per la puleggia (2)

$$(T - t) \frac{d_2}{2} = M_2$$

La diversificazione delle forze di trazione sui due rami di cinghia è dovuta alla presenza delle forze d'attrito nel contatto cinghia-pulegge. A queste forze si deve dunque la trasmissione di potenza.

L'equilibrio delle forze agenti sull'elemento infinitesimo di cinghia che corrisponde all'angolo al centro $d\alpha$ (figura 1.2), nelle due direzioni radiale e circonferenziale, conduce alle equazioni

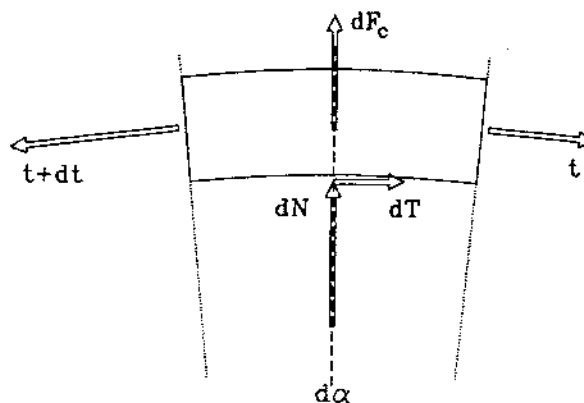


Fig. 1.2

$$dN + dF_c = 2t \cdot \sin \frac{d\alpha}{2}$$

$$(t + dt) - t = dT \quad (1.1)$$

dove la forza centrifuga elementare è data dalla

$$dF_c = dm \cdot \omega^2 \cdot \frac{d}{2} = \rho \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \frac{d^2}{4} \cdot d\alpha$$

con ρ massa volumica ed A area della sezione trasversale della cinghia.

Tenuto conto che, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, è $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$ e che, indicato con f il coefficiente di attrito cinghia-puleggia, risulta $dT = f \cdot dN$, le precedenti relazioni (1.1) si trasformano in

$$dN = t \cdot d\alpha - q \cdot V^2 \cdot d\alpha$$

$$dt = f \cdot dN$$

ove con $q = \rho A$ si indica la massa per unità di lunghezza della cinghia.

Essendo anche $dt=d(t-qV^2)$, si ottiene l'equazione differenziale $d(t-qV^2)=(t-qV^2) \cdot f \cdot d\alpha$ che, integrata per separazione di variabili nell'intervallo $[(t-qV^2) : (T-qV^2)]$, cui corrisponde l'angolo di abbraccio α , conduce alla relazione $(T-qV^2)/(t-qV^2) = e^{f\alpha}$.

Da questa è facile ricavare $(T-t) = [(e^{f\alpha} - 1)/e^{f\alpha}] \cdot (T-qV^2)$, cui corrisponde la massima potenza trasmissibile $W_0 = (T-t) \cdot V = [(e^{f\alpha} - 1)/e^{f\alpha}] \cdot (T-qV^2) \cdot V$ se con T_a intendiamo la massima trazione applicabile alla cinghia, in stretta relazione con la tensione ammissibile del materiale tramite la $T_a = A \cdot \sigma_0$.

La figura 1.2 bis visualizza l'andamento del *coefficiente di aderenza* $C_a = [(e^{f\alpha} - 1)/e^{f\alpha}]$ in funzione delle variabili α ed f .

Dall'esame della figura si nota come, nel caso di $\alpha = \pi$, un aumento del coefficiente d'attrito dal valore 0.5 a 1.5, comporta un aumento del coefficiente di aderenza del 25%.

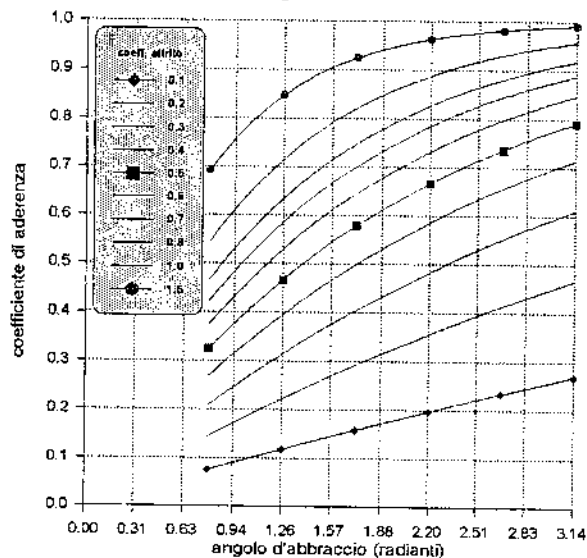


Fig. 1.2 bis

$f=0.5$ produce un coefficiente di attrito apparente $f^*=1.46$. Tale valore comporta, per un angolo di abbraccio di 135° , un incremento superiore al 40% nel coefficiente di aderenza che compare nella formula della massima potenza trasmissibile.

Parte di questo effetto positivo viene purtroppo perduto a causa dell'insorgere di una tensione flessionale, dovuta all'avvolgimento attorno alla puleggia di una cinghia la cui sezione è ora caratterizzata da una sensibile rigidità flessionale.

Applicando la teoria elastica della trave, nell'ipotesi di flessione pura, possiamo scrivere:

$$2/d = M_f / (E \cdot J) \quad \text{e} \quad \sigma_f = (M_f \cdot h_{\max}) / J$$

dove d è il diametro della puleggia, M_f è il momento flettente, E è il modulo di elasticità del materiale, J è il momento di inerzia della sezione e h_{\max} è la massima distanza dall'asse neutro (baricentrico) della sezione.

Lo stesso aumento del coefficiente d'attrito, comporta l'aumento di C_a del 40%, nel caso di $\alpha = 3 \cdot \pi/4$.

1.4.2 - Cinghia trapezoidale.

Un aumento apparente del coefficiente d'attrito si ottiene se si passa dalla sezione trasversale rettangolare a quella trapezoidale.

Si osservi infatti, nella figura 1.3, che alla componente radiale dF_r corrispondono due forze normali di contatto cinghia-puleggia $dN = dF_r / (2 \sin(\gamma/2))$ e, quindi, la forza d'attrito complessiva $dT = 2 \cdot f \cdot dN = 2 \cdot f \cdot dF_r / (2 \sin(\gamma/2)) = f^* \cdot dF_r$ con $f^* = f / (\sin(\gamma/2))$.

La forma trapezia, con l'azione di incuneamento della cinghia nella rispettiva cava di puleggia, consente dunque di esaltare le capacità di aderenza e di aumentare la massima potenza trasmissibile.

Così, per un angolo $\gamma = 40^\circ$, il coefficiente d'attrito

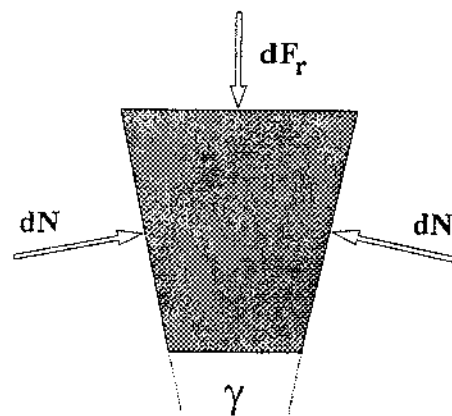


Fig. 1.3

Dalle relazioni precedenti si ricava $\sigma_f = \frac{2Eh_{\max}}{d}$

Ad essa si somma la tensione di trazione $\sigma_T = T/A$, già considerata nel precedente paragrafo, ottenendosi il valore cumulativo:

$$\sigma = \frac{T}{A} + \frac{2Eh_{\max}}{d}$$

Fissata che sia la tensione ammissibile σ_o , la massima trazione applicabile alla cinghia è data dalla relazione:

$$T_a = A\sigma_o - \frac{2EAh_{\max}}{d}$$

ottenendo, per la massima potenza trasmissibile, l'espressione più complessa

$$W = \frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} \left(A\sigma_o - \frac{2EAh_{\max}}{d} - qV^2 \right) \cdot V$$

La sollecitazione agente sulla cinghia è tipicamente di fatica. Non solo perchè la forza traente oscilla fra i valori t e T , ma soprattutto perchè la tensione di flessione assume valori in genere diversi sulle due pulegge, annullandosi peraltro nei tratti rettilinei.

La valutazione della massima potenza trasmissibile, compatibilmente con le capacità di resistenza a fatica del materiale della cinghia, può essere semplificata introducendo una trasmissione "equivalente" agli effetti della sollecitazione di fatica da flessione.

Tale trasmissione, caratterizzata da un rapporto di trasmissione unitario, viene definita "trasmissione tipo".

Durante il funzionamento la cinghia subisce N flessioni al livello di tensione individuato dalla $\sigma_1 = 2Eh_{\max}/d_1$ ed altre N al livello di tensione $\sigma_2 = 2Eh_{\max}/d_2$, in genere inferiore al precedente.

Se ora pensiamo di affiancare alla trasmissione *reale* quella *tipo*, caratterizzata da pulegge fra loro uguali di diametro d_e , il livello di tensione flessionale ivi raggiunto sarà dato dalla $\sigma_e = 2Eh_{\max}/d_e$.

Questo valore potrà dirsi equivalente ai valori σ_1 e σ_2 , agli effetti della sollecitazione di fatica, se, in un numero di cicli di sollecitazione pari a $2N$, esso conduce ad un consumo di vita uguale a quello che si produce nella trasmissione *reale*. Questo consumo di vita può essere valutato in via approssimata sulla base della legge di Miner, come somma dei consumi di vita relativi ai vari livelli di sollecitazione. Ciascuno di questi consumi essendo espresso come rapporto N_i/N_{ci} , ove N_i è il numero di cicli effettivamente subiti all' i -esimo livello di sollecitazione ed N_{ci} rappresenta il numero di cicli che a quello stesso livello di sollecitazione porta il pezzo a rottura per fatica.

La relazione chiave dell'equivalenza è dunque data da:

$$\frac{2N}{N_{ce}} = \frac{N}{N_{c1}} + \frac{N}{N_{c2}}$$

Come noto da altri corsi, la valutazione sperimentale delle capacità di resistenza a fatica dell'organo meccanico in esame conduce alla relazione analitica

$$\sigma_1^e \cdot N_{c1} = \sigma_2^e \cdot N_{c2} = \sigma_e^e \cdot N_{ce} = K$$

dove e e K sono parametri caratteristici delle prove di resistenza a fatica.

Si ottiene così immediatamente, dalle due relazioni precedenti, l'espressione della tensione equivalente

$$\sigma_e = \left(\frac{\sigma_1^e + \sigma_2^e}{2} \right)^{1/e}$$

dalla quale ricaviamo facilmente l'espressione del diametro equivalente

$$d_e = d_1 \cdot \left(\frac{2}{1 + \tau^2} \right)^{1/2}$$

Nella trasmissione *tipo*, caratterizzata da un rapporto di trasmissione unitario, risulta $\alpha = \pi$, quindi la massima potenza trasmissibile, definita "**potenza tipo**", può essere espressa dalla

$$W_o = \frac{e^{f\pi} - 1}{e^{f\pi}} \left(A\sigma_o - \frac{2EAh_{\max}}{d_e} - qV^2 \right) \cdot V$$

Come mostrato dalla precedente relazione, la potenza tipo dipende dalle dimensioni della cinghia (A), dal numero di cicli di sopravvivenza, tramite σ_o , dal diametro equivalente d_e e dalla velocità periferica V.

La potenza tipo viene valutata tramite attività sperimentale, eseguendo prove di resistenza a fatica sulla trasmissione tipo al variare dei parametri precedentemente elencati. I risultati sperimentali sono raccolti in tabelle che possono essere consultate dal progettista meccanico durante l'esecuzione dei progetti.

La massima potenza applicabile ad una cinghia nella trasmissione reale (tale valore viene definito "**potenza attuale**") si ottiene dalla potenza tipo con la relazione:

$$W_a = C_\alpha \cdot C_L \cdot C_h \cdot W_o$$

Il coefficiente correttivo C_α tiene conto della diminuita capacità di trasmissione che la trasmissione reale mostra nei confronti di quella tipo a causa del minor angolo di abbraccio che caratterizza l'avvolgimento sulla puleggia minore. Tale coefficiente è espresso dalla:

$$C_\alpha = \frac{(e^{f\alpha} - 1) \cdot e^{f\pi}}{e^{f\alpha} \cdot (e^{f\pi} - 1)}$$

Il coefficiente correttivo C_L tiene invece conto della diversa lunghezza che la cinghia ha nella trasmissione reale rispetto a quella L_o che essa ha nella trasmissione tipo. Questa differenza di lunghezze comporta, a parità di velocità V e di durata in ore prevista, un diverso numero di cicli di sollecitazione sopportati dalla cinghia e, quindi, comporta l'uso di una differente tensione ammissibile per il materiale.

Più in dettaglio, la durata in ore "h" di una cinghia può essere espressa come $h = \frac{N_c \cdot L}{3600 \cdot V}$, ove è ormai noto il significato dei simboli adottati. Se dunque vogliamo la stessa durata in ore nella trasmissione attuale ed in quella tipo, dobbiamo scrivere $N_c \cdot L = N_{co} \cdot L_o$ e quindi $\frac{N_{co}}{N_c} = \frac{L}{L_o}$. Ricordando che

la potenza trasmessa è proporzionale alla tensione sviluppata nel pezzo e utilizzando la già richiamata relazione $\sigma^f \cdot N_c = \sigma_o^f \cdot N_{co}$, possiamo scrivere

$$\frac{W}{W_o} = \frac{\sigma}{\sigma_o} = \left(\frac{N_{co}}{N_c} \right)^{1/2} = \left(\frac{L}{L_o} \right)^{1/2} = C_L$$

Infine il coefficiente correttivo C_h tiene conto che, per la trasmissione reale, il progettista può prevedere una durata in ore differente da quella standard che contraddistingue le prove di fatica eseguite nella trasmissione tipo. In questo caso si può infatti scrivere $\frac{N_{co}}{N_c} = \frac{h_o}{h}$ e, quindi, la relazione analoga alla precedente

$$\frac{W}{W_o} = \frac{\sigma}{\sigma_o} = \left(\frac{N_{co}}{N_c} \right)^{1/2} = \left(\frac{h_o}{h} \right)^{1/2} = C_h$$

Sulla base delle considerazioni svolte, il progetto di una trasmissione per cinghie trapezoidali si articola nelle seguenti fasi:

- 1 - Assegnata la potenza da trasmettere W , le velocità n_1 e n_2 delle pulegge e l'interasse i , si ricava la *potenza di calcolo* $W_c = c_s W$, tramite il fattore di servizio c_s , dipendente dalle condizioni di esercizio, anch'esse in genere note in sede di progetto.
- 2 - Utilizzando appositi diagrammi di selezione forniti dalle case costruttrici di cinghie di trasmissione, è possibile operare una scelta appropriata della sezione della cinghia da utilizzare, sulla base della potenza di calcolo e della velocità di rotazione della puleggia motrice (in genere la più piccola). Viene anche consigliato, corrispondentemente, un diametro minimo consentito per la puleggia minore, in prossimità del quale è bene fissare il diametro d_1 .
- 3 - Con il rapporto di trasmissione $\tau = n_2/n_1 = d_1/d_2$ si valuta il diametro $d_2 = d_1/\tau$ e, con l'interasse i , la lunghezza della cinghia: $L = \pi \cdot \frac{d_1 + d_2}{2} + \sqrt{4 \cdot i^2 + (d_2 - d_1)^2}$ e quindi arrotondato al valore commerciale immediatamente superiore.
Sarà quindi necessario apportare qualche modifica all'interasse i , se ciò non è possibile, prevedere l'aggiunta di una puleggia *tendicinghia* che permetta di recuperare il gioco cinghia-pulegge e di stabilire la dovuta trazione preliminare sulla cinghia stessa.
- 4 - Calcolato il diametro equivalente d_e e la velocità $V = \pi n_1 d_1 / 60$, dalle tabelle fornite dal costruttore nei manuali di selezione, si desume la potenza tipo W_o e quindi la potenza attuale W_a , tramite i coefficienti C_o , C_L e C_n , connessi alla geometria ormai nota della trasmissione e alla durata prescritta.
- 5 - Il rapporto W_c/W_a (potenza di calcolo su potenza attuale), arrotondato all'intero superiore, fornisce il numero di cinghie da impiegare in parallelo nella realizzazione della trasmissione di potenza.

1.4.3 - Catena di trasmissione.

La principale trasmissione meccanica per interferenza, con connessione flessibile, è quella per catena di trasmissione. Lo schema generale della trasmissione è identico a quello già discusso per le cinghie. Valgono dunque le relazioni fondamentali delle trasmissioni per flessibile:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{M_1}{M_2} = \tau$$

La trasmissione di potenza non è però affidata alle forze d'attrito, come per le cinghie, ma all'interferenza che si sviluppa, nel funzionamento, fra i denti delle ruote ed i perni che connettono fra di loro le varie maglie della catena.

La catena a rulli, schematizzata in figura 1.4, rappresenta il modello più largamente impiegato nelle attuali applicazioni nel settore delle trasmissioni di potenza.

I perni (a), a distanza di un passo (p), sono solidali alle piastine esterne (e). Le bussole (b) sono solidali alle piastrine interne (i). Il rullo (r) completa lo schema, favorendo le condizioni cinematiche di contatto fra catena e dente della ruota.

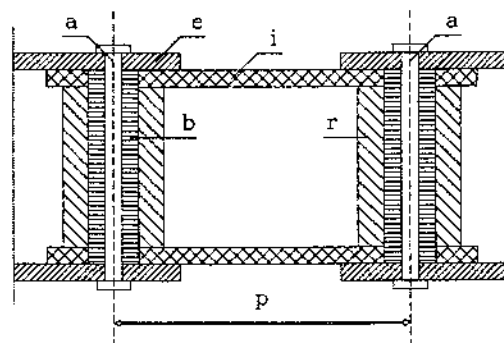


Fig. 1.4

Il funzionamento di una trasmissione per catena è caratterizzato da alcune anomalie intrinseche che, limitandone la velocità, pongono dei limiti anche alla potenza trasmissibile.

Innanzitutto va osservato che, durante il funzionamento, la velocità del ramo conduttore della catena passa dal valore massimo $V_{max} = \omega_1 R_1$ a quello minimo $V_{min} = \omega_1 r_1$, dove R_1 ed r_1 sono i raggi delle circonferenze circoscritta ed inscritta al poligono costituito dalle varie maglie di catena avvolte attorno alla ruota.

Con riferimento alla figura 1.5, sussiste la relazione $r_1 = R_1 \cdot \cos(\gamma_1/2)$ con $\gamma_1 = 2\pi/z_1$, essendo z_1 il numero dei denti della ruota (1).

Nel tempo $\Delta t = \gamma_1/(2\omega_1) = \pi/(z_1\omega_1)$ si ha dunque una variazione di velocità $\Delta V = \omega_1 R_1 [1 - \cos(\pi/z_1)]$ cui corrisponde l'accelerazione media

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{z_1 \omega_1^2 R_1}{\pi} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{z_1}\right) \right]$$

che si dimostra essere pertanto una funzione decrescente di z_1 .

Inoltre il ramo conduttore subisce anche un'oscillazione nella direzione trasversale e quindi sarà presente una componente di accelerazione anche in tale direzione. Queste accelerazioni inducono forze d'inerzia che sollecitano dannosamente la catena e gli organi ad essa collegati.

Altro effetto legato a quanto in precedenza descritto è l'oscillazione del rapporto di trasmissione.

Con riferimento alla figura 1.6, una volta tracciate per entrambe le ruote le due circonferenze di raggio R e $r = R \cdot \cos(\pi/z)$ (si ricordi che è anche $p = 2R \cdot \sin(\pi/z)$), a causa di una particolare geometria della trasmissione, può accadere di vedere il ramo motore dapprima nella posizione (1) e successivamente nella posizione (2), dopo una rotazione della ruota motrice di circa $\gamma/2$.

Ora si osservi che, mentre nella posizione (1) il rapporto di trasmissione assume il valore istantaneo $\tau_1 = R_1/r_2$, nella posizione (2) esso assume il valore $\tau_2 = r_1/R_2$.

Questa variabilità del rapporto di trasmissione indica che ad una velocità angolare d'ingresso costante corrisponde una velocità angolare d'uscita variabile nel tempo e quindi un'accelerazione angolare dell'equipaggio condotto, con l'insorgere di forze di inerzia che sollecitano sia il meccanismo trascinato che la stessa catena di trasmissione. Il fenomeno descritto può essere contenuto entro limiti accettabili regolando l'interasse in maniera che sul ramo conduttore della catena sia presente un numero intero di passi (figura 1.7).

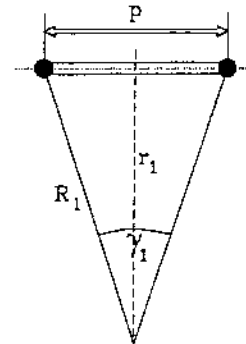


Fig. 1.5

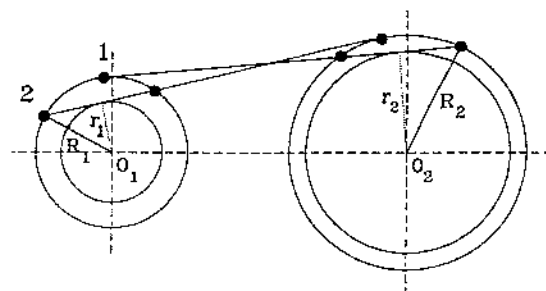


Fig. 1.6

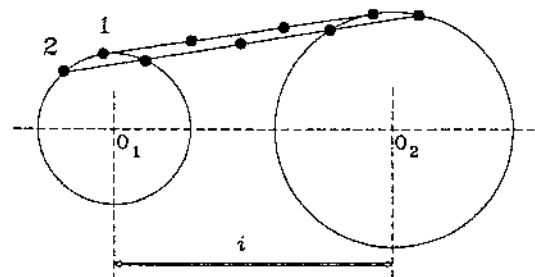


Fig. 1.7

Questa operazione viene definita "*messa in fase della trasmissione*".

In questo caso l'oscillazione del rapporto di trasmissione è minima: tale rapporto varia infatti tra i valori $\tau_1 = R_1/R_2$ e $\tau_2 = r_1/r_2$.

Il funzionamento della trasmissione per catena è infine caratterizzato dalla presenza di urti. Tali urti si sviluppano fra rullo e fondo gola dei denti della ruota.

Il moto relativo di una maglia rispetto alla ruota dentata motrice, una volta che il rullo di sinistra (figura 1.8) si è impegnato nella ruota, è infatti una rotazione attorno ad O_1^* , con velocità angolare approssimativamente pari ad $\omega_r = -\omega_1$.

La corrispondente velocità periferica del punto O_2^* , pari a $V_r = p \cdot \omega_r$, è la velocità di impatto del rullo sul fondo gola, velocità tanto più elevata quanto maggiore è il passo $p = O_1^*O_2^*$ della catena.

Tuttavia, la forma più frequente di avaria presente in una trasmissione di potenza per catena è dovuta all'usura.

Il moto relativo fra le maglie contigue comporta strisciamenti in corrispondenza della superficie cilindrica di contatto perno-bussola. Tale moto relativo è tanto più ampio quanto minore è il numero di denti della ruota, ferma restando la dimensione del passo. Gli strisciamenti avvengono in presenza di forze di attrito, proporzionali alla forza traente applicata alla catena, implicando un'azione dissipativa che, oltre a produrre calore, induce consumo di materiale. Col passare del tempo il passo della catena è destinato ad aumentare, creando difficoltà di accoppiamento catena-ruota, specialmente quando si abbia a che fare con cospicui interassi.

La lubrificazione provvede a limitare questi effetti dannosi, riducendo l'entità delle forze di attrito. Essa svolge una benefica azione anche sugli urti precedentemente descritti: per migliorarne l'efficacia, da quest'ultimo punto di vista, si opera un taglio assiale sul rullo, col che si permette una migliore penetrazione del lubrificante nel meato compreso fra rullo e bussola e si fornisce al rullo stesso una maggiore elasticità in fase d'urto. Operando in tal modo il sistema acquista notevoli capacità di smorzamento per dissipazione di energia, attutendo gli effetti dell'urto.

Altra modalità di avaria che si può incontrare in una catena di trasmissione è la rottura per fatica delle piastrelle, le quali sono sottoposte ad uno sforzo di trazione variabile nel tempo.

Danneggiamento per fatica di contatto potrà manifestarsi anche in altre parti della catena, come la superficie esterna del rullo, o della ruota.

Nel piano cartesiano che riporta in ascisse la velocità di rotazione n_1 della ruota motrice ed in ordinate la potenza trasmessa, è possibile individuare zone di pericolo agli effetti delle varie forme di avaria della catena. Viene così definita una superficie centrale A (figura 1.9) tale che, se il punto rappresentativo (n_1, W) delle condizioni di funzionamento cade nel suo interno, è garantito un corretto funzionamento della catena.

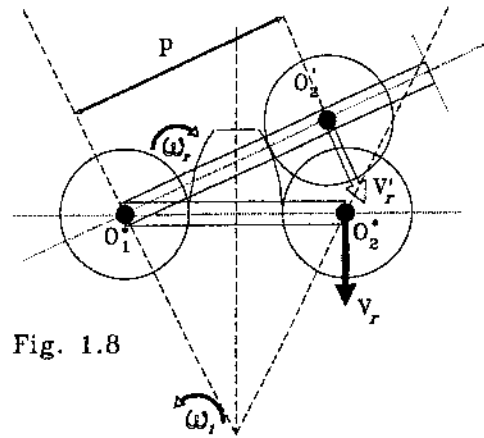


Fig. 1.8

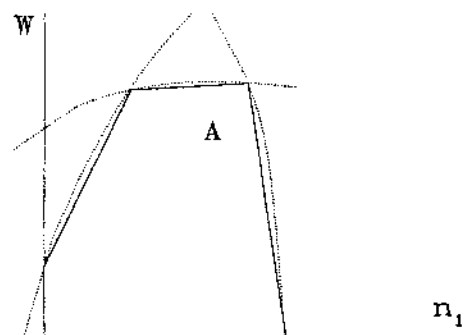


Fig. 1.9

L'area di questa superficie è tanto più estesa quanto maggiore è il passo della catena. L'insieme dei confini di tali superfici, ognuna delle quali è relativa ad un valore del passo della catena, costituisce un utile diagramma di selezione, nel quale, con adeguato cambiamento di scala sulle ordinate, è possibile peraltro prendere in considerazione anche l'impiego di catene a più file di rulli, equivalenti a più catene disposte in parallelo.

Le fasi nelle quali si articola il calcolo di una trasmissione per catena sono qui di seguito riportate, a partire dai dati di progetto che, in genere, sono:

- a) potenza da trasmettere W ;
- b) velocità n_1 ed n_2 delle ruote;
- c) interasse i ;
- d) notizie sulle condizioni di funzionamento previste.

fase 1 - Si valuta la potenza di calcolo $W_c = c_s W$, sulla base di un coefficiente di servizio c_s , desunto dal dato d).

fase 2 - Dal diagramma di selezione si ricava il passo della catena p .

fase 3 - Su tabelle fornite dal costruttore si determina il numero di denti z_1 della ruota motrice, in funzione della potenza trasmessa, della velocità della catena e del tipo di lubrificazione impiegata.

fase 4 - Si ricava il numero di denti della ruota condotta con la relazione $z_2 = z_1 n_1 / n_2$, mentre i diametri primitivi delle ruote si ottengono con $d_1 = p / \sin(\pi / z_1)$ e $d_2 = p / \sin(\pi / z_2)$.

fase 5 - La lunghezza della catena può essere valutata, seppure in via approssimata, con la formula

$$L = \pi \cdot \frac{d_1 + d_2}{2} + \sqrt{4i^2 + (d_2 - d_1)^2} \quad \text{ricavando così, dal}$$

rapporto L/p , il numero delle maglie che compongono la catena stessa. Tale rapporto va naturalmente arrotondato ad un intero che è bene sia pari, per consentire una regolare chiusura ad anello della catena, collegando la maglia estrema a piastrine esterne A con l'altra maglia di estremità a piastrine interne B (figura 1.10).

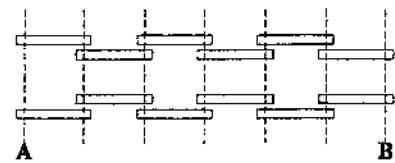


Fig. 1.10

1.4.4 - Cinghia dentata

Al contrario della trasmissione per cinghie trapezoidali, suscettibile di scorrimento accidentale cinghia-puleggia, la trasmissione per catena garantisce il perfetto e stabile sincronismo delle ruote. Implica per contro, tale trasmissione, una maggiore complessità costruttiva, anche per la presenza di un sistema di lubrificazione più o meno complesso, e non consente, a causa della presenza di vibrazioni ed urti, velocità di funzionamento molto elevate.

Un sistema di trasmissione di più recente ideazione, che unisce la silenziosità propria della cinghia trapezoidale alla garanzia di sincronismo caratteristica della catena di trasmissione, è costituito dalla cinghia dentata, nella quale la trasmissione degli sforzi cinghia-ruota non avviene per attrito ma per interferenza fra denti realizzati sulla cinghia ed apposite cavità praticate sulla periferia della ruota.

Il corpo della cinghia (figura 1.11) presenta uno strato intermedio di fili di acciaio o di materiale sintetico che fornisce ottime caratteristiche di rigidità longitudinale, mentre il modesto spessore della sezione garantisce una buona flessibilità. Ciò comporta, rispetto alla cinghia trapezoidale, sollecitazioni di flessione praticamente trascurabili. Per migliorare la resistenza ad usura, la superficie dentata della cinghia è rivestita di una tela di fibra sintetica.

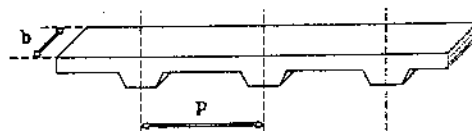


Fig. 1.11

Il progetto della trasmissione segue una prassi analoga a quanto finora descritto per gli altri flessibili. Valutata la potenza di calcolo W_c mediante un coefficiente di servizio, riferendosi ad un diagramma di selezione, si individua il passo da impiegare, sulla base della potenza di calcolo e della velocità di rotazione della ruota motrice.

Ricavato da apposita tabella il numero minimo di denti della ruota motrice, suggerito sulla base di criteri di resistenza dei denti della cinghia, si passa alla definizione dei diametri $d_1 = p \cdot z_1 / \pi$ e $d_2 = p \cdot z_2 / \pi$, essendo $z_1 / z_2 = n_2 / n_1 = \tau$.

Noto l'interasse i , è facile valutare la lunghezza L della cinghia, utilizzando la formula già vista per le cinghie piane. Il valore calcolato dovrà essere approssimato al più vicino valore commerciale, con eventuale correzione dell'interasse o aggiunta di una puleggia tendicinghia.

La larghezza della cinghia viene valutata sulla base del rapporto W_c / W_0 . La grandezza W_0 rappresenta la massima potenza trasmissibile da una cinghia di larghezza unitaria, caratterizzata dallo stesso passo. Il valore di questa potenza è fornito dalle case costruttrici in appositi manuali di selezione.

Dal momento che sono chiaramente disponibili solo alcuni valori della larghezza di cinghia, occorrerà approssimare la larghezza calcolata al valore commerciale immediatamente superiore.

Tutta questa operazione si sviluppa tenendo conto, mediante uso di opportuno coefficiente correttivo, di una maggiorazione di sicurezza, introdotta al fine di prevenire gli effetti di concentrazione di carico sui denti della cinghia, dovuti ad errori di parallelismo degli assi delle ruote o a difetti costruttivi della cinghia, in genere tanto più sensibili quanto maggiore è la larghezza della cinghia stessa.

1.5 - Trasmissioni per ingranaggi.

E' questa la trasmissione meccanica di potenza più largamente usata nelle macchine. Potenze trasmesse, velocità di rotazione e rendimenti possono essere assai elevati, in costruzioni compatte ed affidabili, con possibilità di trasmettere il movimento fra assi paralleli, concorrenti o sghembi, con rapporto di trasmissione sia fisso che variabile in modo discontinuo.

Sono qui di seguito riportati i criteri di dimensionamento delle ruote dentate con profilatura ad evolvente di cerchio.

1.5.1 - Ingranaggi ad assi paralleli.

Come noto, i moti assoluti delle due ruote e, quindi, il moto relativo dell'una rispetto all'altra sono moti piani: le caratteristiche cinematiche di funzionamento sono pertanto pienamente descritte nel piano del moto (piano xy della figura 1.12), normale alla direzione comune degli assi di rotazione delle ruote a_1 ed a_2 . Il moto relativo della ruota (2) rispetto alla ruota (1) è rotatorio e l'asse di istantanea rotazione, parallelo e complanare agli assi dei moti assoluti, cade nella fascia compresa fra gli assi a_1 ed a_2 , nel caso di velocità angolari assolute con verso discorde (ruote *esterne*), cade esternamente a tale fascia, nel caso di velocità angolari concordi (ruote *interne*).

La figura 1.13 descrive la posizione, sul piano del moto, della traccia C dell'asse d'istantanea rotazione del moto relativo, nel caso di ruote esterne (velocità angolari discordi). Tale posizione è ottenuta costruendo il diagramma delle velocità della ruota (2), nel moto relativo rispetto alla (1), come somma vettoriale delle velocità del suo moto assoluto, dipendenti dalla velocità angolare $\vec{\omega}_2$ ed indicate in figura come $V_2(\omega_2)$, e delle velocità del moto che blocca la ruota (1), dipendenti dalla velocità angolare $-\vec{\omega}_1$ ed indicate come $V_2(-\omega_1)$.

Nel punto C la velocità somma è nulla. Ciò comporta, peraltro, la relazione seguente:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$$

Se il rapporto di trasmissione τ si conserva costante, la posizione del punto C si conserva inalterata nello spazio. I luoghi delle successive posizioni assunte, da tale punto, in riferimenti solidali alle ruote saranno due circonferenze, l'una all'altra esterna e tangente nel punto C (*circonferenze primitive*). Nel moto relativo tra le due ruote le circonferenze primitive, dunque, rotolano l'una sull'altra senza strisciamento.

1.5.1.1 - Profilatura e taglio dei denti.

Molteplici sono i profili coniugati ideati per guidare il moto delle ruote secondo le condizioni precedentemente descritte. Tra di essi quelli maggiormente impiegati nella trasmissione di potenza sono i profili ad evolvente di cerchio. I motivi principali che giustificano tale scelta sono i seguenti:

- a) Facilità di costruzione del profilo (possibilità di uso di utensili a tagliente rettilineo).

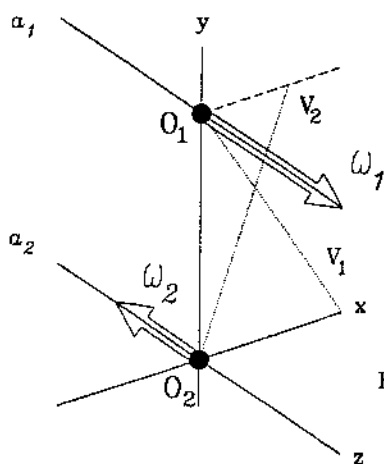


Fig. 1.12

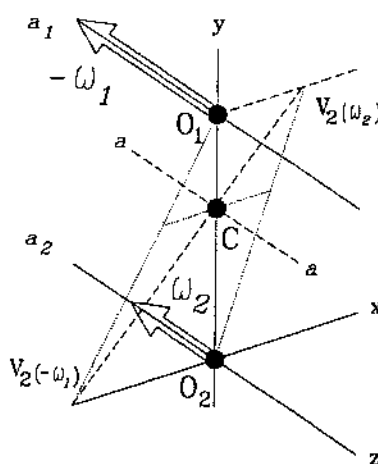


Fig. 1.13

- b) Assenza di conseguenze dannose nell'accoppiamento delle ruote dentate, a seguito di errori di interasse.
- c) Dolcezza di funzionamento, dovuta alla rigorosa fissità nello spazio della retta d'azione delle forze che si scambiano le ruote dentate e quindi all'assenza di vibrazioni di alberi e cuscinetti che tale fatto comporta.

Si richiamano qui di seguito alcune nozioni di base sugli ingranaggi con profilatura ad evolvente.

Con riferimento alla figura 1.14, la retta m , inclinata dell'angolo di pressione θ (detto anche *obliquità*) rispetto alla tangente t comune alle due primitive, individua le **circonferenze base**, concentriche alle primitive e di raggio $\rho = r \cdot \cos \theta$.

Il tracciamento di ciascun profilo coniugato si ottiene come traiettoria di un generico punto della retta m (ad esempio il punto C), quando questa rotola senza strisciare sulla rispettiva circonferenza base.

Questo stesso tracciamento si può ottenere come involuppo delle successive posizioni assunte dalla retta n , ortogonale alla retta d'ingranamento m e solidale alla retta t , quando quest'ultima retta rotola senza strisciare sulle circonferenze primitive. Questa procedura è quella effettivamente impiegata in sede costruttiva, quando si opera il taglio della ruota mediante la *dentiera utensile*.

Si ricorda che è proprio il contatto continuo fra i profili coniugati ad assicurare il voluto moto relativo delle ruote. Al fine di ridurre l'entità degli strisciamenti e la conseguente usura dei fianchi dei denti, la porzione utile dei profili, cioè quella destinata all'effettivo mutuo contatto, è limitata ad un intorno delle circonferenze primitive. Si ricorda infatti che, tanto più ci si allontana dal centro di istantanea rotazione del moto relativo delle due ruote, tanto maggiore risulta essere la velocità relativa di tale moto e quindi la velocità di strisciamento tra i profili.

Per garantire la continuità del moto, deve essere dunque prevista una serie di profili uniformemente intervallati: la distanza fra profili consecutivi, misurata lungo la circonferenza primitiva, si chiama **passo p** mentre, misurata lungo la circonferenza base, assume il nome di **passo base p_b** . Se z è il numero di profili previsto lungo tutta la circonferenza primitiva, si ha:

$$p = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{z} \quad \text{e} \quad p_b = \frac{2 \cdot \pi \cdot \rho}{z} = p \cdot \cos \theta$$

Si indica con **modulo** la lunghezza: $m = p/\pi = 2r/z = d/z$, detto appunto anche *passo diametricale*.

Nel proporzionamento modulare della dentatura, il segmento di profilo utilizzato è quello interno alla fascia anulare delimitata dalle circonferenze di troncatura: quella *esterna* ha raggio $r_{te} = r + m$ e quella *interna* ha raggio $r_{ti} = r - 1,25 \cdot m$.

Durante il moto il punto di contatto fra i profili coniugati scorre sulla retta m , limitatamente al segmento MN (*segmento di ingranamento*), individuato dall'intersezione di m con le circonferenze di troncatura esterna delle due ruote.

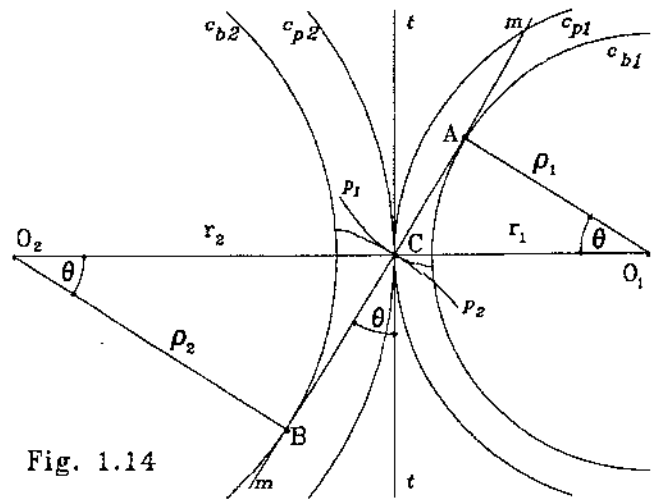


Fig. 1.14

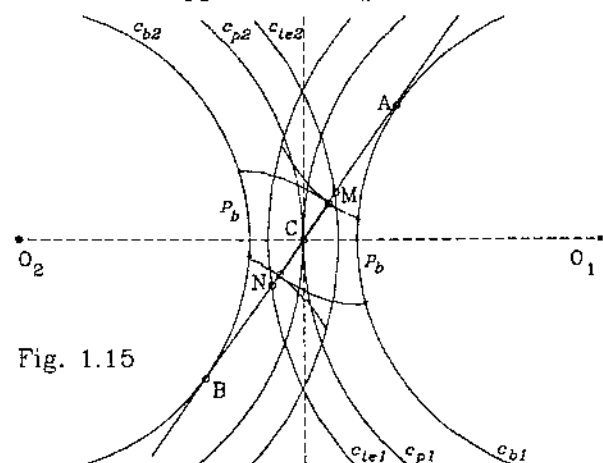


Fig. 1.15

La continuità di trasmissione del moto è garantita se una coppia di profili subentra nell'ingranamento, toccandosi nel punto M, allorchè la coppia precedente ha cessato l'accoppiamento in corrispondenza del punto N. Ciò si realizza quando la distanza fra i profili consecutivi, misurata lungo la retta di ingranamento ed uguale per costruzione al passo base, coincide con la lunghezza del segmento

$MN = \lambda$. Per motivi di sicurezza si impone $\lambda > p_b$ e, cioè, $\lambda/p_b > 1$. Al rapporto $\Gamma = \lambda/p_b$ si attribuisce il nome di *grado di ricoprimento*.

Per consentire il moto di accoppiamento anche nel verso opposto, è prevista un'identica serie di profili, contrapposti ai precedenti e ciascuno localizzato, a meno dei giochi costruttivi, sulla mezzzeria del passo. I due profili, appartenenti alle due diverse schiere e a convessità contrapposte, individuano così i fianchi del singolo dente.

Appartengono ad una stessa famiglia tutte le ruote mutuamente accoppiabili, caratterizzate dallo stesso passo (o modulo). Esse differiscono per numero di denti e, quindi, per diametro primitivo $d = mz$. Fra di esse c'è quella, detta dentiera, caratterizzata da un numero infinito di denti: il suo raggio primitivo è infinito e la primitiva corrispondente è una retta. La dentiera ha i fianchi dei denti rettilinei: infatti infinito è anche il raggio della circonferenza base e dunque anche il punto A di tangenza della retta d'ingranamento con la circonferenza base si sposta all'infinito. Ciò, ricordando le modalità di tracciamento del profilo ad evolvente di cerchio, comporta curvatura nulla dei fianchi dei denti.

La dentiera, accoppiata con una generica ruota di diametro d e rotante con velocità angolare ω , è animata di moto traslatorio con velocità $V = \omega \cdot d/2$.

Il taglio dei denti di un ingranaggio può dunque facilmente essere condotto, per involuppo, utilizzando la rispettiva dentiera e partendo da un tondo pieno di diametro esterno pari al diametro di troncatura esterna della dentatura. La dentiera utensile sarà caratterizzata da un addendum pari a 1.25 volte il modulo e da un dedendum uguale al modulo. L'utensile è animato da un moto di taglio parallelo alla direzione assiale della ruota e, in una prima fase, si addentra gradualmente nel corpo della ruota procedendo nella direzione radiale della stessa (moto di alimentazione iniziale), fino a che la *linea dei dati* della dentiera non diventa tangente alla primitiva della ruota in corso di costruzione. La linea dei dati è la linea ideale per la quale il pieno del dente è uguale al vano fra denti: questa linea coincide con la primitiva della dentiera, durante le operazioni di taglio senza correzione. Nella seconda fase di costruzione della dentatura, infatti, il moto di alimentazione si trasforma in quello che sarà il moto di accoppiamento della ruota dentata con la sua dentiera: la ruota gira con la velocità angolare ω e la dentiera utensile trasla con la velocità $V = \omega \cdot d/2$. Più propriamente, corrispondentemente ad un passo di rotazione $\Delta\theta$ della ruota, la dentiera utensile avanza del passo di traslazione $\Delta s = \Delta\theta \cdot d/2$.

Quanto descritto costituisce la condizione di *taglio normale* della ruota dentata. E' possibile operare anche un taglio con *spostamento*. Nel taglio con spostamento, durante la fase primaria che vede il moto di alimentazione svilupparsi nella direzione radiale della ruota, ci si arresta in posizione differente a quella che caratterizza il taglio normale. Chiameremo *spostamento* la distanza s fra la linea dei dati e la primitiva di taglio della ruota. Si opera taglio con spostamento *positivo* quando si posiziona la linea dei dati esternamente alla primitiva della ruota.

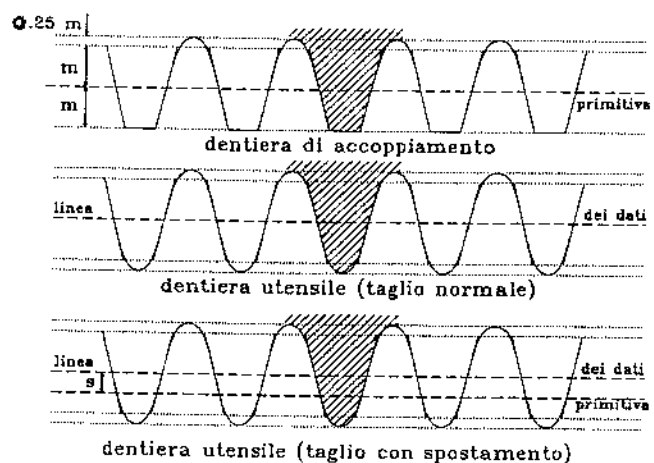


Fig. 1.16

In questo caso, il tondo di partenza dovrà avere un diametro più grande di quello che avrebbe avuto nel taglio normale: occorre infatti sommare la quantità $2s$.

Lo spostamento sarà *negativo* se la linea dei dati viene posizionata all'interno della primitiva di taglio della ruota.

La successiva fase secondaria di taglio, che completa la costruzione della dentatura, avviene con un moto di alimentazione avente le stesse caratteristiche cinematiche del taglio normale: si garantisce così una immutata primitiva di taglio della ruota.

Nella pratica costruttiva corrente lo spostamento viene riferito al modulo, introducendo lo *spostamento relativo* $x = s/m$.

Il taglio con spostamento non altera il numero dei denti della ruota, rispetto a quanto ottenuto nel taglio normale. Altera purtuttavia la forma del dente e quindi ne varia la capacità a resistere alle sollecitazioni esterne. In particolare uno spostamento positivo aumenta lo spessore del dente in corrispondenza della sua radice mentre sulla punta genera effetto contrario. Inoltre è possibile osservare che, accoppiando due ruote tagliate con spostamento, le primitive del moto relativo che si stabilisce, da definirsi *primitive di lavoro*, non coincidono con le *primitive di taglio*, quelle cioè che definiscono l'accoppiamento delle singole ruote con la dentiera utensile durante le operazioni di taglio.

Il rapporto di trasmissione, $\tau = n_2/n_1 = z_1/z_2$, è indipendente dagli spostamenti delle ruote accoppiate, mentre sono funzioni di queste grandezze sia l'*interasse* che l'*angolo di pressione*. Uno dei motivi per i quali si effettua il taglio delle ruote con spostamento è infatti proprio quello di poter ottenere particolari valori di interasse intermedi fra quelli normalizzati, disponibili solo in numero discreto, a causa della standardizzazione dei valori del modulo:

$$i = \frac{1}{2} \cdot (d_1 + d_2) = \frac{1}{2} \cdot d_1 \left(1 + \frac{d_2}{d_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot z_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau} \right)$$

A tale proposito è bene precisare che, sebbene sia vero che accoppiando ruote tagliate con spostamenti uguali ed opposti non si ottiene alcuna variazione di interasse e di angolo di pressione, non si può assolutamente affermare, in termini generali nel caso di differenti spostamenti, che la variazione di interasse sia uguale alla somma algebrica degli spostamenti.

1.5.1.2 - Progetto della ruota dentata a denti dritti.

Le avarie che più frequentemente si incontrano nell'esercizio delle trasmissioni di potenza per ingranaggi sono le seguenti:

- Erosione superficiale** per eccessiva pressione al contatto fra i fianchi dei denti. La superficie danneggiata si mostra ricoperta di cavità e sfaldature, principalmente su di una fascia a cavallo del cilindro primitivo. E' bene precisare che la presenza del lubrificante può anche esaltare tale fenomeno degenerativo delle superfici coniugate.
- Rottura per flessione** del dente. E' una tipica rottura per fatica che si manifesta in corrispondenza della radice del dente, nella zona di raccordo del dente col corpo della ruota, laddove peraltro fenomeni di concentrazione degli sforzi accentuano lo stato di tensione del materiale.
- Surriscaldamento e microfusioni** locali, con profonda alterazione della geometria delle superfici coniugate, a causa di difetto di lubrificazione. Il contatto diretto metallo-metallo, in presenza di elevate pressioni, implica perdite di energia assai localizzate, con raggiungimento di alti valori della temperatura. Ne conseguono vistose deformazioni permanenti delle superfici coniugate che pregiudicano la bontà dell'accoppiamento.

1.5.1.2.1 - Dimensionamento a massima sollecitazione di contatto.

Per evitare avarie di tipo a), occorre limitare la pressione di contatto delle superfici coniugate, assegnando adeguate dimensioni alle ruote dentate.

La teoria sviluppata da Hertz, relativa al contatto di due cilindri indefiniti ad assi paralleli, può essere favorevolmente impiegata per il dimensionamento delle ruote dentate a denti dritti, caratterizzati cioè da asse rettilineo parallelo all'asse della ruota e, quindi, da superfici coniugate cilindriche.

Il contatto fra cilindri di lunghezza infinita, di raggi R_1 ed R_2 , si sviluppa su una retta, nell'ipotesi di materiali infinitamente rigidi. Nell'ipotesi più realistica di materiali elastici, il contatto si estende su di una superficie, con una distribuzione non uniforme della pressione di contatto. Il massimo di tale distribuzione di pressione è fornito dalla formula:

$$\sigma_H^2 = \frac{q}{\pi} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{E'_1 \cdot E'_2}{E'_1 + E'_2}$$

dove q è la forza per unità di lunghezza che sollecita i due cilindri, premendoli l'uno contro l'altro, ed $E' = E/(1 - \nu^2)$ è il modulo di elasticità a contrazione laterale impedita, caratteristico del materiale impiegato per il singolo cilindro.

I fianchi dei denti, limitatamente all'intorno della zona di contatto, possono essere assimilati a superfici cilindriche a sezione circolare retta di raggio, rispettivamente,

$$R_1 = \overline{AP} \quad \text{e} \quad R_2 = \overline{BP}$$

dove i punti A e B sono quelli di tangenza della retta m con le circonferenze base (figura 1.17).

Indicando con x la distanza di P da A e con a il segmento \overline{AB} , si può scrivere, tenuto conto che la forza premente F può essere espressa in funzione della sua componente periferica F_c , la seguente espressione:

$$\sigma_H^2 = K_E \cdot \frac{F_c}{l \cdot \cos \theta} \cdot \frac{a}{x \cdot (a - x)}$$

dove con $K_E = E'_1 E'_2 / [\pi \cdot (E'_1 + E'_2)]$ intendiamo una costante dipendente dalle caratteristiche del materiale, mentre l rappresenta la lunghezza della fascia dentata nella direzione dell'asse della ruota. La pressione di contatto è dunque funzione della posizione del punto P sul segmento di ingranamento: tale funzione presenta un minimo sulla mezzieria del segmento AB , come mostrato nella figura 1.18.

Il diagramma rappresentato in questa figura è ottenuto nell'ipotesi che sia sempre in presa una sola coppia di denti ($\Gamma = 1$).

Nell'ipotesi più appropriata di $\Gamma > 1$, il diagramma si modifica come mostrato nella figura 1.19, nell'ulteriore ipotesi, fortemente approssimata, che il carico si equiripartisca fra le due coppie di denti in presa.

Si noti in questa figura che i segmenti \overline{MR} e \overline{NQ} sono uguali al passo base.

La zona maggiormente sollecitata appare dunque quella circostante il punto di rotolamento C. In tale punto risulta $x = \overline{AC} = r_1 \cdot \sin \theta$ e

$$(a - x) = \overline{BC} = r_2 \cdot \sin \theta, \text{ quindi}$$

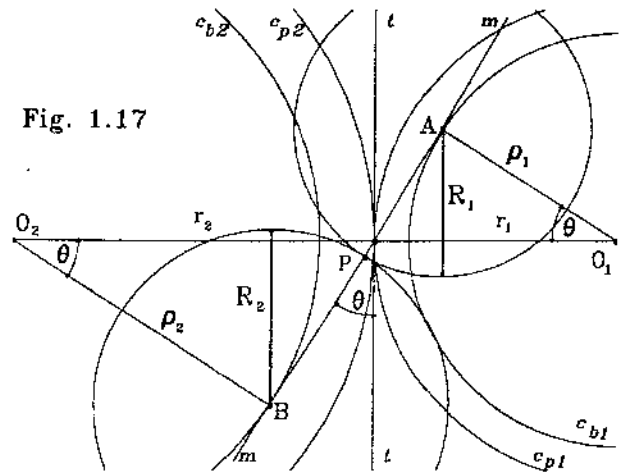


Fig. 1.17

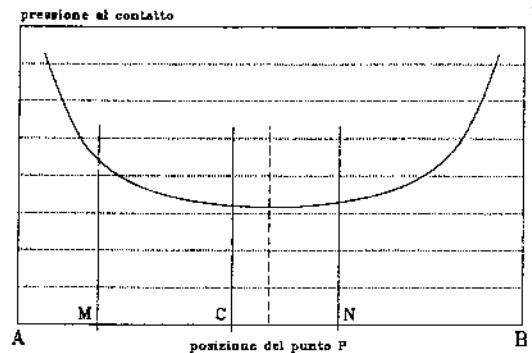


Fig. 1.18

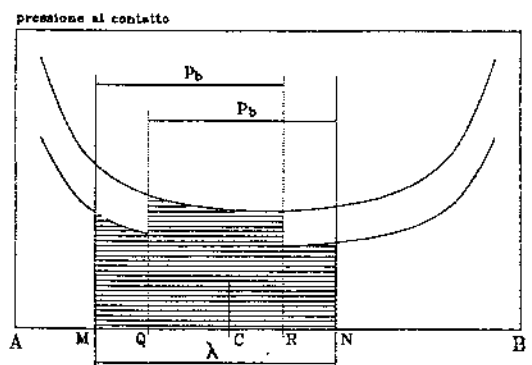


Fig. 1.19

$$a = \overline{AB} = (r_1 + r_2) \cdot \sin \theta.$$

Il valore della pressione di contatto diventa:

$$\sigma_H^2 = K_E \cdot \frac{F_c}{l \cdot \cos \theta} \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot \sin \theta}$$

che, con semplici passaggi, si trasforma nella

$$\sigma_H^2 = \frac{4 \cdot K_E}{\sin(2\theta)} \cdot \frac{F_c}{l \cdot d_1} \cdot (1 + \tau)$$

Tenuto conto che, indicata con W la potenza da trasmettere e con n_1 la velocità in giri al minuto della ruota motrice, la forza periferica può essere espressa da $F_c = 60 \cdot W / (\pi \cdot n_1 \cdot d_1)$, esprimendo la lunghezza del dente in termini di diametro d_1 con la $l = \varphi \cdot d_1$, l'espressione precedente diventa:

$$\sigma_H^2 = \frac{4K_E}{\sin(2\theta)} \cdot \frac{60W}{\pi \cdot \varphi \cdot n_1} \cdot \frac{1 + \tau}{d_1^3}$$

Se poi introduciamo il modulo di dentatura $m = d_1/z_1$, espresso in [mm], esprimendo la potenza in [kW] ed introducendo la massima tensione ammissibile σ_o espressa in [MPa], si ottiene la relazione di progetto:

$$m = \left(\frac{4 \cdot K_E}{\sin(2\theta)} \cdot \frac{6 \cdot 10^7 \cdot W}{\pi \cdot \varphi \cdot n_1} \cdot \frac{1 + \tau}{z_1^3 \cdot \sigma_o^2} \right)^{1/5}$$

Il valore di z_1 da impiegare è quello minimo compatibile col problema dell'*interferenza* costruttiva fra dentiera utensile e ruota in costruzione. Si ricorda che tale valore minimo è dato dalla seguente formula:

$$z_{\min} = \frac{2(1-x)}{\sin^2 \theta}$$

E' chiaro che tale valore debba essere approssimato all'intero superiore.

Si tenga poi conto che la sollecitazione di contatto fra i denti ha le caratteristiche di una sollecitazione di fatica: il valore ammissibile σ_o dipende quindi dalla vita prevista per il meccanismo. In particolare, indicata con σ_{FL} la tensione limite di fatica, convenzionalmente corrispondente ad una vita di 10^7 cicli, è stato verificato che essa generalmente, per gli acciai di uso corrente, assume un valore circa (3 + 4) volte più piccolo della durezza Brinell **HB** del materiale, grandezza questa facilmente valutabile ed in genere disponibile in qualsiasi tabella illustrativa delle caratteristiche meccaniche del materiale. Ciò permette di ottenere con grande semplicità un valore, seppure approssimato, della tensione ammissibile corrispondente ad una vita di h ore, cioè $N_c = 60 \cdot n_1 \cdot h$ cicli, secondo l'espressione:

$$\sigma_o = \frac{HB}{(3 + 4)} \left(\frac{10^7}{60 \cdot n_1 \cdot h} \right)^{3/10}$$

Il valore del modulo così calcolato deve essere arrotondato al valore unificato immediatamente superiore. Ne conseguono i diametri primitivi $d_1 = m \cdot z_1$ e $d_2 = d_1/\tau$, nonché l'interasse

$$i = (d_1 + d_2)/2 \quad \text{e la larghezza della ruota} \quad l = \varphi \cdot d_1.$$

1.5.1.2.2 - Dimensionamento a massima sollecitazione di flessione.

Per evitare avarie di tipo b), occorre limitare la tensione alla radice del dente, assegnando allo stesso adeguate dimensioni. La figura 1.20 rappresenta la sezione trasversale di un dente dritto, sottoposto alla forza di interazione fra le ruote dentate quando il contatto è localizzato sulla sommità del dente stesso. Ad esempio, tale condizione di carico si verifica per il dente della ruota più piccola, in genere la motrice, in corrispondenza del punto terminale del segmento di imbocco \overline{MN} . Nell'ipotesi di un'unica coppia di denti in presa, l'entità della forza F è fornita dalla relazione $F = M_1/\rho_1$.

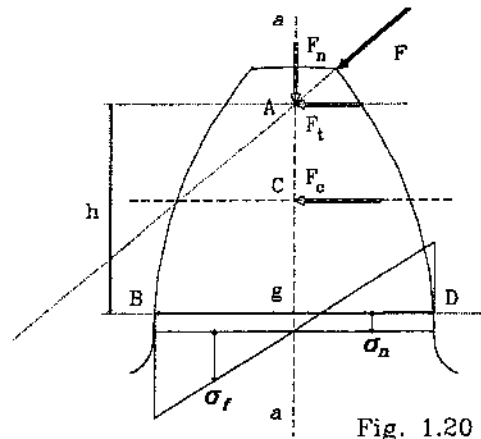


Fig. 1.20

M_1 è il momento applicato alla ruota, legato alla potenza trasmessa W dalla relazione $M_1 = W/\omega_1$.

La grandezza ρ_1 è il raggio della circonferenza base.

La retta d'azione della forza F interseca nel punto A l'asse di simmetria della sezione trasversale del dente (asse $a-a$ della figura 1.20). Su questo punto si può pensare di trasportare la forza stessa, per poi considerarne le componenti F_t ed F_n .

Sulla generica sezione del dente, ottenuta con un piano ortogonale al citato asse di simmetria, agisce lo sforzo normale $N=F_n$ ed il momento flettente $M_f=F_t h$, ove " h " è la distanza del punto A dalla sezione in esame. Se " g " è lo spessore del dente in questa sezione ed " l " è la lunghezza assiale del dente, la tensione corrispondente ad N è uniformemente distribuita sulla sezione e vale $\sigma_n = F_n/(g \cdot l)$.

Il momento flettente desta nella sezione una tensione a distribuzione lineare, i cui valori massimo

e minimo sono dati dalla:
$$\sigma_f = \pm \frac{M_f}{W_f} = \pm \frac{F_t \cdot h}{\frac{1}{8} g^2 l}$$

Nel punto B (fig. 1.20) si otterrà una tensione di compressione, il cui valore assoluto è dato dalla somma $\sigma_n + \sigma_f$, mentre nel punto D la tensione di trazione vale $\sigma_f - \sigma_n$.

Si noti che, per la natura stessa della sollecitazione in esame (che per la variabilità nel tempo assume le caratteristiche di sollecitazione di fatica), il punto più pericoloso agli effetti della resistenza del materiale è proprio rappresentato dal punto D . In questo punto il trascurare la componente σ_n agisce a vantaggio della sicurezza del calcolo, quindi il valore della sola componente di flessione della tensione può essere assunto come quello più pericoloso agli effetti dell'integrità del materiale.

Si va ancora a vantaggio della sicurezza del calcolo se, in luogo della componente F_n , introduciamo il valore, senza dubbio più elevato, della componente periferica dell'interazione fra denti F_c , valutata in corrispondenza della circonferenza primitiva della ruota (si noti, infatti, che il punto A è più esterno a tale circonferenza).

Al variare della distanza " h ", e quindi al variare dello spessore del dente " g ", si otterranno differenti valori della massima tensione di flessione agente nella sezione. In particolare, sarà possibile individuare una sezione caratterizzata dalla distanza h_0 e dallo spessore g_0 , sulla quale assume un valore massimo tale tensione e questo valore potrà divenire il valore di riferimento per la verifica di resistenza a flessione dell'intero dente:

$$\sigma = \frac{6 \cdot F_c \cdot h_0}{l \cdot g_0^2}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per il modulo m del dente, si ottiene:

$$\sigma = \frac{6 \cdot F_c \cdot h_o \cdot m}{l \cdot m \cdot g_o^2} = \frac{F_c}{l \cdot m} \cdot \frac{6 \cdot m \cdot h_o}{g_o^2} = \frac{F_c}{l \cdot m \cdot Y}$$

ove la quantità $Y = g_o^2 / (6 \cdot m \cdot h_o)$ è adimensionale ed indipendente dal modulo. Infatti sia h_o che g_o sono proporzionali al modulo m . Il parametro Y non dipende dunque dalle dimensioni del dente ma solo dalla sua forma; ad esso si assegna appunto la denominazione di **fattore di forma**. Esso viene fornito in appositi diagrammi, relativi ad un assegnato angolo di pressione θ , in funzione del numero dei denti z e dello spostamento relativo x col quale si pensa di effettuare, se necessario, il taglio della ruota dentata (figura 1.21).

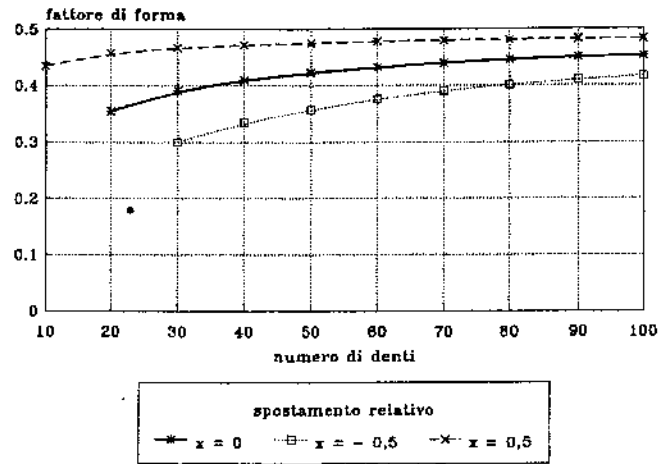


Fig. 1.21

La verifica di resistenza a flessione del dente viene dunque eseguita confrontando la tensione calcolata con quella ammissibile per il materiale σ_a . Questo valore dipende dal numero di cicli di sollecitazione previsti, per il singolo dente, nell'intera vita h (espressa in ore) dell'ingranaggio, $N = 60hn_1$. Se σ_{FL} è la tensione di fatica limite del materiale, quella cioè corrispondente al "ginocchio" della curva sperimentale del Woehler e quindi al numero di cicli critico $N_{cL} = 10^7$, in un progetto *a tempo* la tensione ammissibile può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\sigma_a = \sigma_{FL} \cdot \left(\frac{N_{cL}}{N} \right)^{1/e} \cdot \frac{1}{S \cdot S_v}$$

Il coefficiente S è un coefficiente di sicurezza, mentre il coefficiente S_v è un **fattore di velocità** che vuol tenere conto, seppure in forma empirica, delle sovrassollecitazioni subite dal dente per effetti dinamici. Tale coefficiente può essere espresso nella seguente forma:

$$S_v = \frac{A + \sqrt{V}}{A}$$

dove V è la velocità periferica della ruota, valutata in corrispondenza del raggio primitivo ed espressa in [m/s], ed A è un parametro che dipende dalla finitura superficiale del fianco del dente e che in *normali* lavorazioni assume un valore pari a $6 \text{ (m/s)}^{1/2}$.

1.5.1.2.3 - Scelta del lubrificante.

L'avaria di tipo c), comunemente detta **grippamento**, può essere evitata mediante scelta di un adeguato lubrificante. L'azione lubrificante può essere comunque migliorata adottando opportuni accorgimenti nella costruzione dei denti. Potranno essere adottati accorgimenti di tipo *geometrico*, come nella **sbarbatura**, o accorgimenti nella scelta dei materiali e dei trattamenti termici che questi stessi possono preventivamente subire.

La sbarbatura consiste in una lieve asportazione di materiale lungo il profilo, corrispondentemente allo spigolo esterno del dente (figura 1.22a).

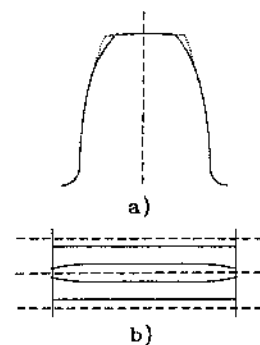


Fig. 1.22

Già attenua l'entità della forza di contatto in una zona dove elevata è la velocità di strisciamento dei profili e crea una geometria più favorevole alla conservazione del meato di lubrificante, laddove al contrario la presenza di uno spigolo vivo potrebbe interrompere detto meato, con ripercussioni deleterie sull'effetto portante dello stesso e conseguente possibilità di contatto diretto metallo-metallo. La sbarbatura longitudinale, schematizzata in figura 1.22 b, migliora la penetrazione del lubrificante nelle zone interne della dentatura. Nella figura citata si mostra schematicamente una vista dall'alto del dente ed è disegnato in tratteggio, con dimensioni esaltate, l'effetto della sbarbatura longitudinale.

I trattamenti termici superficiali mirano a migliorare la geometria del meato, irrigidendo il materiale tramite indurimento superficiale che impedisce grosse deformazioni locali. Infine creano affinità chimica fra superficie metallica e lubrificante, migliorando l'effetto protettivo della lubrificazione. Sono, a tal fine, consigliati una nitrurazione morbida, nota sotto il nome commerciale di "Tenifer", che consente la diffusione di azoto e carbonio sulla superficie dell'acciaio, ed il trattamento noto sotto la denominazione di "Sulfinuz" che induce diffusione di zolfo nella matrice metallica.

La scelta del lubrificante più adeguato può essere operata mediante criteri, i più noti dei quali sono:

1.5.1.2.3.1 - Criterio di Almen.

Con questo criterio si confronta il valore massimo del prodotto ($\sigma_H \cdot w$) con un valore ammissibile caratteristico del lubrificante impiegato. Il prodotto in esame ha le dimensioni di una potenza specifica, essendo σ_H la pressione di contatto fra i profili e w la velocità di strisciamento degli stessi. A meno del coefficiente di attrito, tale potenza è quella perduta per attrito e quindi convertita localmente in calore; è quindi ragionevole pensare che tanto più elevato è il prodotto ($\sigma_H \cdot w$) tanto più elevato è l'incremento di temperatura subito dal lubrificante nel meato compreso fra profili coniugati.

Limitare il prodotto ($\sigma_H \cdot w$) equivale dunque a porre un limite alla temperatura massima del lubrificante, operazione questa necessaria, tenuto conto che l'effetto portante del lubrificante decade vistosamente quando, per effetto di una temperatura troppo elevata, la sua viscosità diminuisce fortemente.

La velocità di strisciamento, in una coppia di ruote esterne, è data da $w = (\omega_1 + \omega_2) \cdot x$, ove con x indichiamo la generica distanza dal punto di rotolamento C, lungo la retta di ingranamento (figura 1.23). In genere il massimo valore di ($\sigma_H \cdot w$) cade negli estremi del segmento di imbocco \overline{MN} .

Esempi di valori ammissibili sono i seguenti:

- $(\sigma_H \cdot w)_a = (2200 \ ; \ 2600) \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$, per olii da SAE 90 a SAE 250;
- $(\sigma_H \cdot w)_a = (2800 \ ; \ 11000) \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$, per olii addittivati;
- $(\sigma_H \cdot w)_a = 13000 \text{ MPa} \cdot \text{m/s}$, per gli olii EP.

1.5.1.2.3.2 - Criterio di Almen - Straub.

E' una variante del precedente: come parametro di scelta si assume ($\sigma_H \cdot w \cdot \lambda_{\max}$), ove λ_{\max} è la massima distanza dal punto di rotolamento C.

I valori ammissibili, corrispondenti ai precedenti, sono rispettivamente:

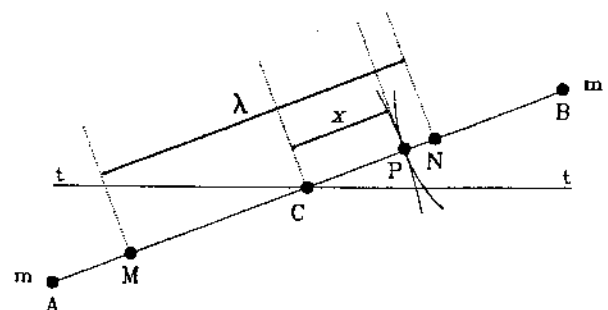


Fig. 1.23

$$a) (55000 ; 88500) \frac{N \cdot m}{mm \cdot s}$$

$$b) (110000 ; 165000) \frac{N \cdot m}{mm \cdot s}$$

$$c) 220000 \frac{N \cdot m}{mm \cdot s}$$

1.5.1.2.3.3 - Criterio di Block.

La grandezza fisica discriminante è costituita dalla temperatura: ogni lubrificante ha infatti una sua temperatura massima di funzionamento che non può essere superata nell'esercizio dell'ingranaggio. La massima temperatura raggiunta in una coppia di ruote dentate può essere prevista in sede di calcolo, in via approssimata, mediante la formula suggerita da Block che fornisce il valore dell'incremento di temperatura subito dal lubrificante nell'attraversamento della dentatura:

$$T_f = 1,17 \cdot f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot q \cdot \frac{\sqrt{V_{r1}} - \sqrt{V_{r2}}}{\sqrt{b}}$$

ove per il coefficiente di attrito si suggerisce di assumere il valore $f = (0,04 + 0,06)$; V_{r1} è dato dal prodotto $\omega_1 \cdot x$ e V_{r2} dal prodotto $\omega_2 \cdot (a - x)$ (entrambi espressi in mm/s), mentre la larghezza della superficie di contatto fra i profili è data da:

$$b = 4 \cdot \left(\frac{q}{\pi} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{E_1 + E_2}{2 \cdot E_1 \cdot E_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

col significato già noto per tutte le altre grandezze.

La temperatura del lubrificante è data da $T = T_a + T_f$, con T_a da intendersi come temperatura dell'olio nel serbatoio.

1.5.1.2.3.4 - Criterio di Niemann (Metodo FZG).

Una coppia di ruote uguali, di assegnato modulo e lubrificata per immersione con un quantitativo standard di olio termostato, viene sottoposta ad un carico via via crescente, per diversi valori della velocità periferica V , valutata corrispondentemente al raggio primitivo.

Mediante accurate misurazioni di peso, si valuta la velocità di usura ai diversi carichi, determinando il *momento di grippamento* corrispondente ad un brusco incremento di detta velocità di usura. Si ottiene il diagramma rappresentato in figura 1.24, nel quale ogni curva corrisponde ad un diverso lubrificante. Per una migliore utilizzazione del diagramma, con semplice cambiamento di scala giacché proporzionale al momento M , si riporta in ordinate la *pressione di Stribeck*

$$k = q \cdot \frac{R_1 + R_2}{2 \cdot R_1 \cdot R_2}$$

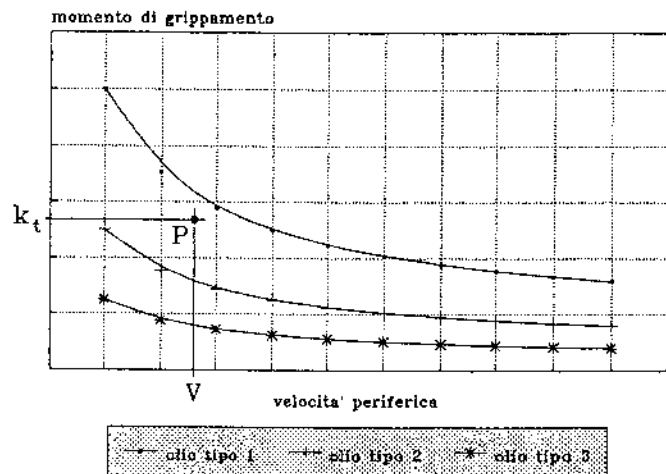


Fig. 1.24

Per operare la scelta del lubrificante, utilizzando il citato diagramma, occorre dapprima calcolare la pressione k che si verifica nella coppia per la quale si sta operando la scelta del lubrificante. Tenuto conto che, in generale, forma e dimensioni di detta coppia, nonché le condizioni operative, saranno differenti da quelle della coppia utilizzata per la qualificazione del lubrificante e per la

quale è stato tracciato il diagramma della fig. 1.24, occorre, con opportuno criterio, stabilire un'equivalenza fra la pressione k calcolata e quella k_{test} sviluppata localmente nella prova, tenendo conto preventivamente di un coefficiente di sicurezza $S = (1,2; 1,5)$.

Il Niemann stesso suggerisce la relazione: $k = k_{\text{test}} \cdot \frac{\cos^4 \alpha_o}{Y_f}$

con $Y_f = \left(12,7 \cdot \frac{1+\tau}{d_1}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\lambda_{1,2(\max)}}{10}\right)^4\right] \cdot \sqrt{m_n}$

valide per il caso generale di ruote dentate a denti elicoidali, ove α_o è l'angolo di inclinazione dell'elica dente sul cilindro base ed m_n è il modulo normale della dentatura, mentre $\lambda_{1,2(\max)}$ è la massima distanza delle estremità del segmento di imbocco rispetto al punto di rotolamento C.

La coppia (V, k_{test}) individua il punto P del diagramma (figura 1.24), consentendo la scelta del lubrificante.

1.5.1.3 - Progetto della ruota dentata a denti elicoidali.

Come noto, ruote di questo tipo sono caratterizzate da funzionamento più dolce, prestandosi particolarmente bene alla trasmissione di potenza ad elevata velocità.

Il contatto fra i denti non s'instaura istantaneamente per tutta la lunghezza del dente, come nel caso dei denti dritti, ma si sviluppa gradualmente nel tempo a partire da un contatto puntiforme.

Si ricorda che il fianco del dente viene generato da un segmento di retta, giacente nel piano tangente ai cilindri base e formante l'angolo caratteristico α_o con la direzione assiale della ruota. La superficie descritta da questo segmento nel rotolamento puro del suddetto piano sul cilindro base, costituisce appunto il fianco del dente.

Per costruzione della superficie coniugata, l'angolo α_o è anche l'angolo di inclinazione dell'elica-base, cioè dell'elica intersezione della superficie coniugata col cilindro base. Con α si indica l'inclinazione dell'elica primitiva, cioè dell'elica intersezione della superficie coniugata con il cilindro primitivo.

La risultante delle azioni di contatto fra denti in presa, pensata concentrata su un punto del cilindro primitivo, è normale al fianco dei denti, nell'ipotesi di assenza di attrito. Tale risultante forma dunque l'angolo θ_n , da dirsi **angolo di pressione normale**, col piano π tangente ai cilindri primitivi e si scompone nella forza $F_\pi = F \cdot \cos \theta_n$, giacente nello stesso piano π , e nella forza $F_r = F \cdot \sin \theta_n$, nella direzione radiale della ruota (figura 1.25). La forza F_π può essere ulteriormente scomposta nella direzione circonferenziale della ruota ed in quella assiale, fornendo le componenti:

$$F_c = F_\pi \cdot \cos \alpha = F \cdot \cos \theta_n \cdot \cos \alpha$$

$$F_a = F_\pi \cdot \sin \alpha = F \cdot \cos \theta_n \cdot \sin \alpha$$

La componente circonferenziale F_c è quella *utile* agli effetti della trasmissione di potenza, potendosi scrivere $F_c = 2 \cdot W / (\omega \cdot d)$. Le altre forze possono essere espresse in funzione della precedente:

$$F_a = F_c \cdot \tan \alpha$$

$$F_r = F_c \cdot \frac{\tan \theta_n}{\cos \alpha}$$

$$F = \frac{F_c}{\cos \alpha \cdot \cos \theta_n}$$

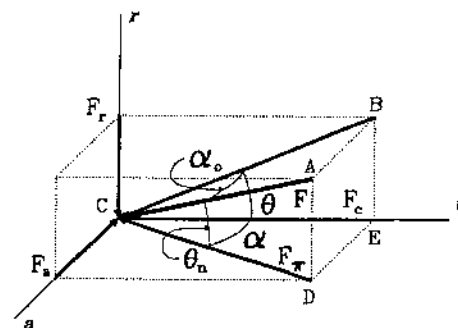


Fig. 1.25

Sempre con riferimento alla figura 1.25, è possibile ricavare alcune utili relazioni fra gli angoli, tenuto conto che è $AB=DE$ e $AD=BE$. Si deve anche tener conto che il triangolo CBA è rettangolo in B, il triangolo CED è rettangolo in E, il triangolo CDA è rettangolo in D ed il triangolo CEB è rettangolo in E. Ciò premesso, si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\tan \theta = \frac{BE}{CE} \qquad \tan \theta_n = \frac{AD}{CD} \qquad \frac{\tan \theta}{\tan \theta_n} = \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{1}{CE/CD} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Analogamente scriviamo:

$$\sin \alpha_o = \frac{AB}{CA} \qquad \sin \alpha = \frac{DE}{CD} \qquad \frac{\sin \alpha_o}{\sin \alpha} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{CD}{DE} = \frac{CD}{CA} = \cos \theta_n$$

e, quindi, $\sin \alpha_o = \sin \alpha \cdot \cos \theta_n$ $\cos \alpha_o = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_n}$

1.5.1.3.1 - Dimensionamento a massima sollecitazione di contatto.

Con tali premesse è possibile applicare la formula di Hertz alle ruote dentate a denti elicoidali, per ottenere un valore di riferimento della pressione di contatto sui fianchi dei denti, utile agli effetti del dimensionamento della dentatura.

Ci si riferisca, come già visto per le ruote a denti dritti, al punto di rotolamento C. La figura 1.26 rappresenta il piano di ingranamento (tangente ai cilindri base). Su di esso giace il segmento di contatto fra i fianchi dei denti in presa, inclinato dell'angolo α_o rispetto alla direzione assiale (a-a). Nelle ruote a denti dritti le superfici coniugate, nell'intorno del segmento di contatto, possono essere approssimate da cilindri a sezione circolare retta i cui assi si trovano a coincidere con le rette di tangenza del piano di ingranamento con i cilindri base.

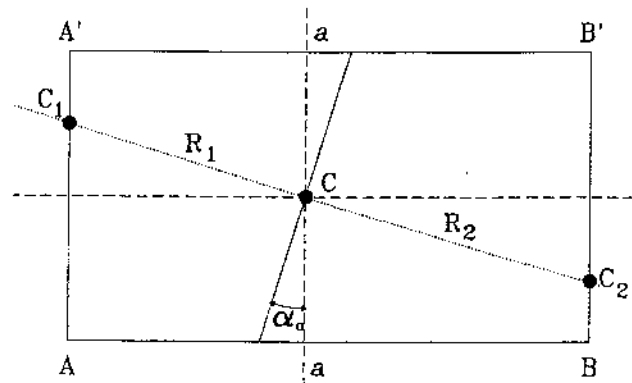


Fig. 1.26

Nelle ruote a denti elicoidali tali superfici sono approssimate da coni a sezione circolare retta, e a conicità contrapposta, i cui assi ancora coincidono con le rette di tangenza dianzi dette, rappresentate in figura dalle (A-A') e (B-B').

Se dunque consideriamo la retta normale al segmento di contatto nel punto C, possiamo identificare i raggi di curvatura R_1 ed R_2 delle superfici coniche, nell'intorno del punto di rotolamento: essi sono dati, rispettivamente, dai segmenti

$$R_1 = \overline{C_1C} \quad \text{e} \quad R_2 = \overline{C_2C} \quad \text{i quali,}$$

ricordando i dati geometrici fondamentali della sezione trasversale della ruota, riportati in figura 1.27 (la retta m è la traccia del piano di ingranamento sul piano trasversale), possono essere espressi dalle formule:

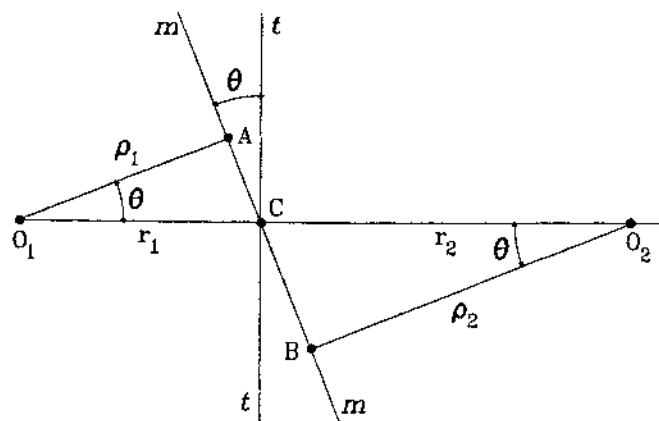


Fig. 1.27

$$R_1 = r_1 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \alpha_o} \qquad R_2 = r_2 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \alpha_o}$$

Il termine $(1/R_1) + (1/R_2)$ della formula di Hertz può essere dunque espresso come:

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot \frac{\cos \alpha_o}{\sin \theta} = \frac{1 + \tau}{r_1} \cdot \frac{\cos \alpha_o}{\sin \theta}$$

Con riferimento ai punti M ed N che sul piano trasversale individuano gli estremi del segmento di ingranamento (figura 1.28), l'insieme dei segmenti di contatto fra coppie di denti simultaneamente in presa può essere rappresentato nel rettangolo MNN'M', giacente sul piano di ingranamento. Nella figura tale rettangolo è stato rappresentato mediante un ribaltamento di 90° sul piano trasversale. La distanza fra i segmenti di contatto nella direzione della retta di ingranamento è detta, come noto, *passo base* p_b mentre quella in direzione normale ai segmenti stessi è detta *passo base normale* p_{bn} , valendo la relazione:

$$p_{bn} = p_b \cdot \cos \alpha_o$$

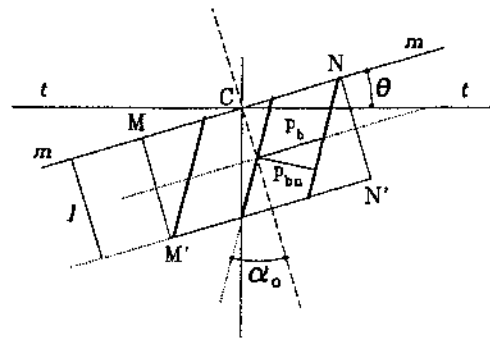


Fig. 1.28

Il valore medio della lunghezza totale di contatto l_c può essere ottenuto dall'uguaglianza $l_c \cdot p_{bn} = \lambda \cdot l$. Infatti l'area del rettangolo di ingranamento, data dal prodotto della lunghezza λ del segmento di ingranamento MN per la larghezza l della dentatura, può anche essere vista, seppure in via approssimata, come l'area della striscia di lunghezza l_c e larghezza p_{bn} .

Tenuto conto, infine, che la forza premente totale, agente su tutte le coppie in presa, è data, come visto, da $F = F_c / (\cos \alpha \cdot \cos \theta_n)$, la grandezza $q = F/l_c$, che figura nella formula di Hertz, è in definitiva data dalla:

$$q = \frac{F_c \cdot \cos \alpha_o}{\Gamma_t \cdot l \cdot \cos \theta_n \cdot \cos \alpha}$$

ove si è indicato con $\Gamma_t = \lambda/p_b$ il *grado di ricoprimento trasversale* che, nelle ruote a denti elicoidali, si somma al *grado di ricoprimento assiale* $\Gamma_a = l/p_a$ (con $p_a = p_b / \tan \alpha_o = p / \tan \alpha$) per dare il grado di ricoprimento totale. Si ricorda che, nelle ruote a denti elicoidali, la continuità del moto è assicurata se Γ (grado di ricoprimento totale) è maggiore dell'unità, il che può essere ottenuto anche con $\Gamma_t < 1$, grazie alla presenza dell'addendo Γ_a .

Ricordando il significato della costante K_E , già impiegata per le ruote a denti dritti, la formula di Hertz, applicata alle ruote a denti elicoidali, diventa:

$$\sigma_H^2 = \frac{K_E \cdot F_c \cdot (1 + \tau) \cdot \cos^2 \alpha_o}{\Gamma_t \cdot l \cdot \cos \theta_n \cdot \cos \alpha \cdot r_1 \cdot \sin \theta}$$

Essendo $\sin \theta = \sin \theta_n / \cos \alpha_o$, si ottiene in definitiva:

$$\sigma_H^2 = \frac{4 \cdot K_E}{\sin 2\theta_n} \cdot \frac{F_c}{l \cdot d_1} \cdot \Phi \cdot \frac{1 + \tau}{\Gamma_t}$$

avendo indicato con Φ la funzione di α e θ_n data da $\Phi = \cos^3 \alpha / \cos \alpha$, esprimibile anche come: $\Phi(\alpha, \theta_n) = (1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_n) \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \theta_n \cdot \tan^2 \alpha}$, essendo $\sin \alpha_n = \sin \alpha \cdot \cos \theta_n$.

Come già visto nel caso delle ruote a denti dritti, assumendo un valore ammissibile per la pressione di contatto σ_H , in funzione della durata prevista per l'ingranaggio, la formula precedente costituisce relazione di progetto, una volta assunto il valore del rapporto l/d_1 , del numero minimo di denti z_1 e degli angoli α e θ_n .

Giova a questo punto ricordare che la costruzione di una ruota dentata a denti elicoidali si esegue con la stessa dentiera-utensile impiegata per la costruzione della ruota a denti dritti, semplicemente inclinando l'utensile stesso dell'angolo α rispetto al piano della ruota.

Da ciò si deduce che le dimensioni del dente della dentiera-utensile si riproducono sul piano *normale* della ruota. Ne scaturisce che, nelle dentature elicoidali, deve rientrare fra quelli unificati il *modulo normale* $m_n = m \cdot \cos \alpha$ (m è il modulo valutato sul piano trasversale della ruota, cioè il piano ortogonale all'asse della ruota). E' anche in base a tale modulo normale che viene definito l'*addendum* della dentatura ($a = m_n$) ed il suo *dedendum* ($d = 1,25 m_n$). Per lo stesso motivo si può affermare che, nelle ruote a denti elicoidali, l'angolo di pressione prescritto dall'unificazione è quello *normale* θ_n .

In merito al minimo numero di denti, è bene osservare che la nuova espressione da impiegare si ottiene con le considerazioni che seguono. Nel proporzionamento modulare delle ruote a denti elicoidali, la relazione più restrittiva si ottiene, nell'ipotesi di taglio con spostamento, scrivendo

$$(m_n - x m_n) \leq r_1 (1 - \cos^2 \theta) = \frac{m \cdot z_1}{2} \sin^2 \theta = \frac{m_n \cdot z_1}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \theta_n}{\cos^2 \alpha}$$

e quindi, eliminando m_n , $z_1 \geq \frac{2 \cdot (1-x)}{\sin^2 \theta_n} \cdot \cos \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_n)$.

Si ricorda infine che il grado di ricoprimento trasversale dipende dalla forma dell'accoppiamento e non dalle sue dimensioni. Esso dunque dipende, nel proporzionamento modulare già citato, solo dagli angoli α e θ_n e dal numero di denti z_1 e z_2 delle ruote. Può essere dunque valutato a monte della formula di progetto, una volta assunti i valori delle grandezze citate. La formula da impiegare è la seguente:

$$\Gamma_t = \frac{\sqrt{(z_1 + 2 \cdot \cos \alpha)^2 - z_1^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{(z_2 + 2 \cdot \cos \alpha)^2 - z_2^2 \cos^2 \theta} - (z_1 + z_2) \sin \theta}{2 \cdot \pi \cdot \cos \theta}$$

$$\text{con} \quad \sin \theta = \frac{\sin \theta_n}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_n}} \quad \cos \theta = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \theta_n}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_n}}$$

1.5.1.3.2 - Dimensionamento a massima sollecitazione di flessione.

La tensione di flessione nei denti elicoidali può essere calcolata modificando la formula del Lewis già discussa per i denti dritti.

In primo luogo deve essere tenuto presente che la forza sollecitante agisce perpendicolarmente alla superficie coniugata costituita dal fianco del dente: essa dunque giace nel piano *normale* all'asse del dente. Tale piano diventa quindi piano di sollecitazione e di inflessione della mensola che schematizza il comportamento statico del dente della ruota. La componente attiva agli effetti della sollecitazione di flessione del dente non è più dunque la F_c , come visto nel caso del dente dritto, ma la componente $F_n = F_c / \cos \alpha$.

Nella formula del Lewis per denti dritti la dimensione del dente è rappresentata dal modulo m : nel caso dei denti elicoidali, sempre per il motivo precedentemente detto, occorre riferirsi al modulo normale $m_n = m \cdot \cos \alpha$.

Se nei denti dritti la larghezza della mensola che schematizza il comportamento del dente è uguale alla larghezza della fascia dentata della ruota, giacchè si ha contatto simultaneo fra le superfici coniugate lungo tutto lo sviluppo del dente, nel dente elicoidale occorre preventivamente valutare la lunghezza del segmento cumulativo di contatto fra le superfici coniugate e quindi dedurre da essa la larghezza della mensola-dente, interessata direttamente alla flessione.

Lo schema, invero, è assai grossolano giacchè il carico su tale mensola di riferimento si suppone distribuito sulla estremità libera, come nel caso dei denti dritti. In realtà, nel dente elicoidale, il segmento di contatto, luogo dei punti di applicazione della forza sollecitante, ha un andamento obliquo sul fianco del dente e dunque il carico distribuito non è equidistante dalla base del dente.

Per tener conto delle precedenti considerazioni, nella formula del Lewis, in luogo di l , deve comparire la lunghezza $l_c \cdot \cos \varepsilon$, dove l_c è la lunghezza totale media del contatto fra denti della coppia di ruote ed ε è

l'angolo che detto segmento forma con la tangente all'elica del cilindro primitivo, ottenuta dall'intersezione con il fianco del dente.

Nella figura 1.29 sono schematicamente rappresentati, in assonometria, il segmento di contatto BC , la tangente all'elica primitiva CD e la direzione assiale della ruota. Sono anche rappresentati gli angoli α , α_0 , ε , θ_n . Essendo i triangoli CAB e CAD rettangoli in A ed il triangolo CBD rettangolo in B , vale la relazione $\cos \varepsilon = \cos \alpha / \cos \alpha_0$.

Essendo già stata, a suo tempo, determinata la lunghezza $l_c = \Gamma_t \cdot l / \cos \alpha_0$, la formula del Lewis può essere trasformata, in definitiva, nella forma:

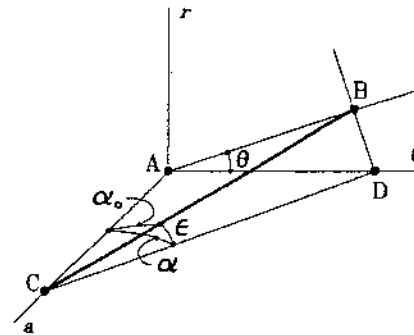


Fig. 1.29

$$\sigma = \frac{F_c}{l \cdot \Gamma_t \cdot m_n \cdot Y} \cdot \frac{\cos^2 \alpha_0}{\cos^2 \alpha}$$

dove Y è il *fattore di forma* della sezione normale del dente, ricavabile dai diagrammi già tracciati per le ruote dentate a denti dritti, corrispondentemente ad un numero di denti z' calcolabile sulla base dei seguenti ragionamenti. Il piano normale all'asse del dente interseca il cilindro primitivo secondo un'ellisse il cui raggio di curvatura massimo, laddove si pensa posizionato il dente, è dato da $r / \cos^2 \alpha$. I denti dritti della particolare ruota che ha un raggio primitivo uguale a tale valore, hanno una sezione trasversale che, con ottima approssimazione, si può confondere con quella normale del dente elicoidale. In particolare, il modulo dei denti dritti di questa ruota è uguale al modulo normale della ruota a denti elicoidali, $m' = m_n$. Si può così anche affermare che, su tale ruota a denti dritti, il numero di denti è dato da

$$z' = \frac{d'}{m'} = \frac{d}{m_n \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{d}{m \cdot \cos^3 \alpha} = \frac{z}{\cos^3 \alpha}$$

La quantità $\Psi = \cos^2 \alpha_0 / \cos^2 \alpha$ è una funzione di α e θ_n , essendo $\cos^2 \alpha_0 = 1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \theta_n$.

L'espressione finale della formula di Lewis per ruote dentate a denti elicoidali diventa dunque:

$$\sigma = \frac{F_c}{l \cdot \Gamma_t \cdot m_n \cdot Y} \cdot \Psi(\alpha, \theta_n)$$

1.5.2 - Ingranaggi per assi concorrenti.

Siano a_1 ed a_2 (figura 1.30) assi concorrenti nel punto O, attorno ai quali ruotano due corpi rigidi con velocità angolari $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$.

Il moto relativo del corpo (2) rispetto al corpo (1) si può visualizzare imprimendo a tutto il sistema meccanico una velocità angolare $-\vec{\omega}_1$ che blocca il corpo (1). La velocità $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$ rappresenta la velocità angolare del moto relativo di (2) rispetto a (1), ed $a-a$ è l'asse di istantanea rotazione di tale moto.

Applicando il noto teorema dei seni, gli angoli γ_1 e γ_2 , la somma dei quali è uguale all'angolo δ formato dagli assi dei moti assoluti, sono dati da:

$$\tan \gamma_1 = \frac{\sin \delta}{\cos \delta + (1/\tau)} ; \quad \tan \gamma_2 = \frac{\sin \delta}{\cos \delta + \tau} , \quad \text{con } \tau = \omega_2/\omega_1$$

Durante il moto, l'asse a descrive dunque due superfici coniche attorno agli assi a_1 e a_2 : esse costituiscono le superfici primitive del moto in esame. Di tali superfici viene presa in considerazione solo una porzione tronco-conica la cui lunghezza l , misurata lungo la generatrice, è in genere nel rapporto di (1/3 ; 1/4) rispetto alla massima distanza L di detta superficie dal vertice O, sempre misurata lungo la generatrice.

A cavallo di queste superfici tronco-coniche, di angoli di semiapertura γ_1 e γ_2 , vengono realizzate le dentature di accoppiamento, le sezioni trasversali delle quali possono essere visualizzate sviluppando sul piano i **coni complementari**. Questi coni sono caratterizzati da angoli di semiapertura complementari a quelli dei coni primitivi (figura 1.31) e l'accoppiamento fra i profili coniugati della dentatura conica si può simulare con l'accoppiamento fra i profili tracciati, secondo le modalità già discusse nei paragrafi precedenti, sui settori circolari derivanti dall'operazione di sviluppo piano dei coni complementari.

E' questa, in realtà, un' approssimazione dei profili ad evolvente sferica. In realtà, sia i moti assoluti che quello relativo sono moti sferici, con centro nel punto di intersezione degli assi O. Una costruzione rigorosa dei profili coniugati deve essere eseguita sulla sfera del moto. Su tale sfera si individuano l'equatore e le circonferenze ad esso tangenti nel punto C, date dall'intersezione della sfera con i coni primitivi e quindi ancora definite *primitive* (figura 1.31 bis). Il piano d'azione passa per la retta OC ed è inclinato dell'angolo θ rispetto al piano equatoriale. Esso è tangente ai coni base, coassiali con i coni primitivi. Tale piano interseca la sfera in un cerchio massimo, che potremo definire *cerchio di ingranamento* e che risulterà tangente alle circonferenze *base*, appunto ottenute dall'intersezione della sfera con i coni base. I profili coniugati possono essere tracciati sulla sfera del moto come traiettorie di un punto generico del cerchio di ingranamento quando questo, muovendosi sulla sfera e conservando fisso il suo centro, rotola senza strisciare sulle circonferenze base. Questa procedura può essere vista

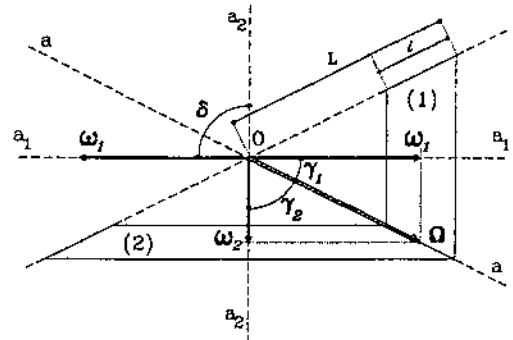


Fig. 1.30

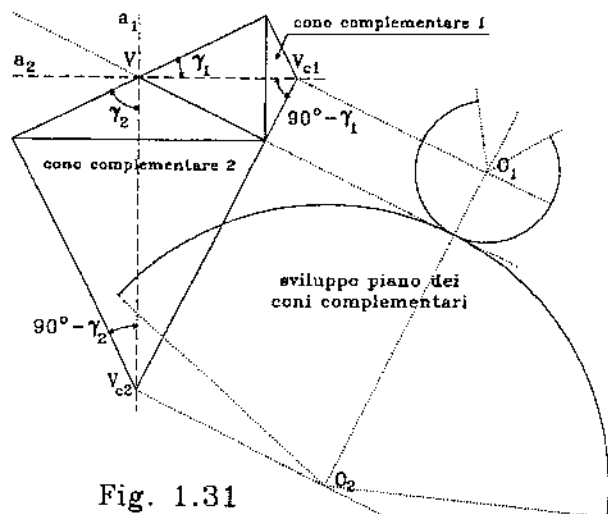


Fig. 1.31

come procedura del tutto generale che comprende, come caso particolare, quella già ricordata nei paragrafi precedenti per il moto piano, caratteristico delle ruote cilindriche che trasmettono il moto fra assi paralleli.

Se infatti portiamo all'infinito la lunghezza del segmento CO, gli assi delle rotazioni assolute diventano paralleli, la sfera degenera in un piano, il cerchio d'ingranamento degenera nella retta di ingranamento ed i profili coniugati ad evolvente sferica degenerano in profili ad evolvente di cerchio. In particolare, così come nel caso piano era stato possibile definire la dentiera, nel caso sferico è possibile definire la ruota piano-conica, caratterizzata da un cono primitivo con angolo di semiapertura di 90° . Tale cono degenera quindi in un piano: il piano equatoriale. La circonferenza base della ruota piano-conica giace su un piano parallelo a

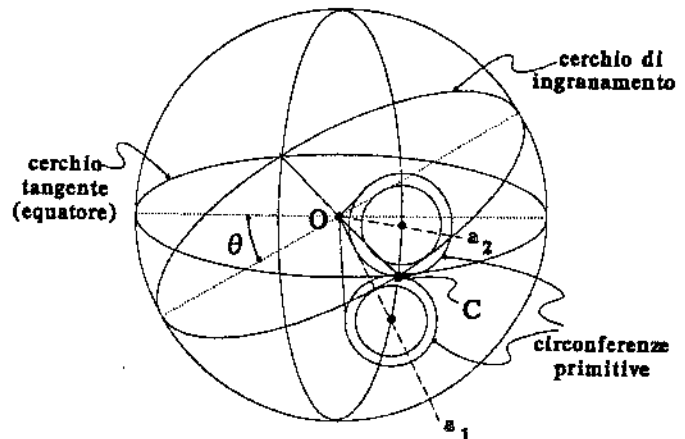


Fig. 1.31 bis

quello equatoriale ed il profilo coniugato che si ottiene presenta un flesso in corrispondenza del punto C.

1.5.2.1 - Il taglio delle ruote coniche.

Così come nelle ruote per assi paralleli si opera il taglio della dentatura per involuppo utilizzando la dentiera-utensile, si può pensare, nel caso delle ruote coniche, di utilizzare la ruota piano-conica. Purtroppo, in questo caso, la ruota piano-conica non può essere direttamente impiegata come utensile. Il problema del taglio della ruota conica è reso infatti notevolmente più complesso, sostanzialmente a causa della variabilità del passo di dentatura lungo la generatrice del cono primitivo. Ciò, naturalmente, comporta anche la variabilità delle dimensioni trasversali del dente e, quindi, delle dimensioni del vano tra denti, cioè del volume da asportare nell'operazione di taglio.

In questo caso dunque il fianco del dente della ruota piano-conica viene idealmente ricostruito, durante le operazioni di taglio, dalle traiettorie del tagliente di un utensile. Nel caso più semplice di dente dritto con asse coincidente con la generatrice del cono primitivo, il moto di taglio dell'utensile si sviluppa, quindi, secondo segmenti di rette appartenenti alla superficie coniugata della ruota piano-conica, che è una superficie conica che ha per centro il vertice del cono primitivo e per direttrice il profilo ad evolvente sferica. A questo moto si deve naturalmente aggiungere un moto di alimentazione uguale a quello di accoppiamento fra la ruota conica in costruzione e la ruota piano-conica ad essa relativa.

Nell'approssimazione di Tredgold precedentemente richiamata, il cono complementare della ruota piano-conica degenera in un cilindro e, al fine di semplificare la costruzione del dente, la proiezione conica su tale cilindro del profilo ad evolvente sferica viene ulteriormente approssimata, una volta sviluppato il cilindro sul piano, con un segmento di retta. Ciò equivale, nella ruota piano-conica con denti ad asse radiale, a sostituire la superficie coniugata ad evolvente sferica, superficie a semplice curvatura, con una superficie piana. Ne consegue che anche i fianchi dei denti della generica ruota conica, costruiti mediante involuppo utilizzando la ruota piano-conica modificata, non seguono più rigorosamente lo schema dell'evolvente sferica.

Il taglio della ruota conica può diventare più complicato se si vogliono ottenere denti che permettano l'accoppiamento con una ruota piano-conica caratterizzata da denti ancora rettilinei ma non più radiali, o addirittura da denti ad asse non più rettilineo ma ad arco di cerchio o ad arco di spirale.

1.5.2.2 - Interazione fra ruote coniche.

Con riferimento alla figura 1.32, la risultante F della forza distribuita, che si scambiano le due ruote coniche lungo il contatto complessivo fra denti, si può pensare applicata in P , punto mediano della fascia dentata ed appartenente alla generatrice di contatto delle superfici primitive. La risultante F è normale alla superficie coniugata (fianco del dente), essa dunque appartiene al piano *normale*, ortogonale sia al piano π che all'asse del dente. Tale asse formerà, nel punto P , l'angolo α con la generatrice g , come visibile nella figura una volta ribaltato il piano π sul piano del disegno. Sul piano π giace la componente $F_\pi = F \cdot \cos \theta_n$,

dove θ_n è l'angolo di pressione *normale*. Questa componente F_π si scompone nella componente *utile* $F_c = F_\pi \cos \alpha$, direttamente connessa alla potenza trasmessa W tramite la relazione $W = F_c \cdot \omega_1 \cdot d_{1m}/2$, e nella $F_g = F_\pi \cdot \sin \alpha = F_c \cdot \tan \alpha$. La componente normale al piano π è data dalla relazione: $F_n = F \cdot \sin \theta_n = F_\pi \cdot \tan \theta_n = F_c \cdot \tan \theta_n / \cos \alpha$.

Infine, le componenti F_n ed F_g possono essere proiettate nella direzione assiale e radiale della ruota (1), ottenendosi: $F_a = F_n \cdot \sin \gamma_1 + F_g \cdot \cos \gamma_1$ $F_r = F_n \cdot \cos \gamma_1 - F_g \cdot \sin \gamma_1$

1.5.2.3 - Ruote cilindriche equivalenti.

Come discusso in precedenza, in corrispondenza del punto mediano P possono essere idealmente posizionati i coni complementari a quelli primitivi. Secondo l'approssimazione del Tredgold, su questi coni possono essere disegnati i profili coniugati della dentatura conica. Una volta sviluppati i coni complementari sul comune piano tangente Φ , piano ortogonale in P alla generatrice g , si ottengono profili assimilabili a quelli ad evolvente di cerchio. In questa operazione, i coni complementari si trasformano in settori circolari che, idealmente completati sull'intero angolo giro, generano la sezione trasversale di una coppia di ruote cilindriche con denti a profilatura ad evolvente. Tali ruote sono definite *equivalenti*, nel senso che i denti su di esse disegnati hanno dimensioni e forma trasversali identiche a quelle medie del dente della ruota conica e, come tali, sono equivalenti a questi agli effetti della loro capacità di resistere alle sollecitazioni.

Tanto più se, come attuato a completamento dell'equivalenza, ad un dente *obliquo* della ruota conica si fa corrispondere un dente elicoidale della ruota cilindrica con angolo di inclinazione dell'elica primitiva α_e uguale alla inclinazione media α del dente della ruota conica, rispetto alla generatrice g . Così facendo, infatti, si vengono a far coincidere le dimensioni e la forma dei denti sul piano *normale*.

Con riferimento alla figura 1.33, le ruote cilindriche equivalenti sono completamente definite dalle seguenti relazioni.

Per quanto riguarda i diametri: $d_{(1,2)e} = d_{(1,2)m} / \cos \gamma_{(1,2)}$; per quanto riguarda il modulo e l'angolo di inclinazione della dentatura: $m_e = m_m$, $\alpha_e = \alpha$ e quindi $m_{ne} = m_{nm}$; per quanto riguarda la larghezza della fascia dentata: $l_e = l$; per quanto riguarda il numero di denti:

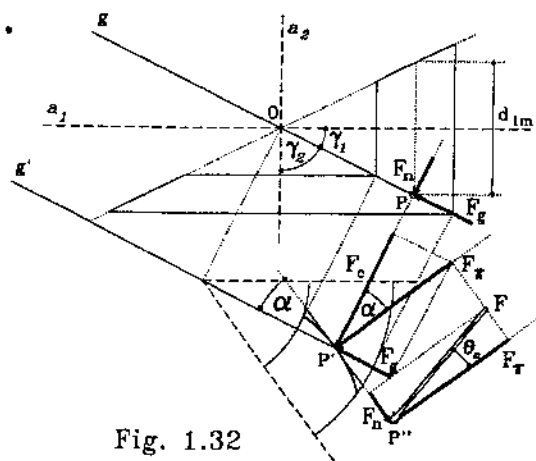


Fig. 1.32

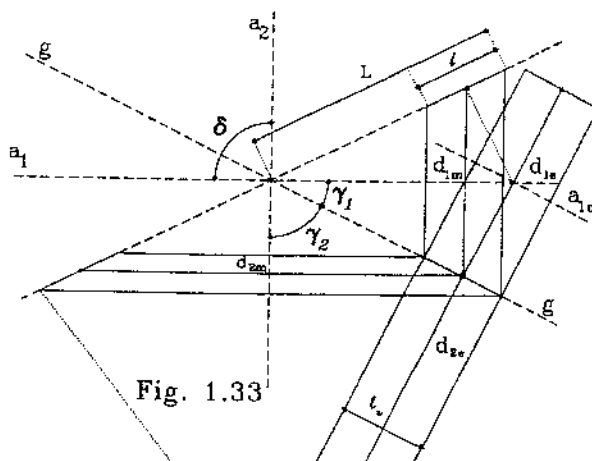


Fig. 1.33

$$z_{(1,2)e} = d_{(1,2)e}/m_e = d_{(1,2)m}/(m_m \cdot \cos \gamma_{(1,2)}) = z_{(1,2)}/\cos \gamma_{(1,2)}$$

Di conseguenza il rapporto di trasmissione della coppia equivalente è dato da: $\tau_e = \tau \cdot \cos \gamma_2 / \cos \gamma_1$.

1.5.2.4 - Il progetto della coppia conica.

Definita l'equivalenza tramite le relazioni scritte nel paragrafo precedente, il progetto della coppia conica si può spostare alla coppia cilindrica equivalente. Si può così applicare la formula di Hertz alla coppia cilindrica equivalente, ottenendo:

$$\frac{4 \cdot K_E}{\sin 2\theta_n} \cdot \frac{F_c}{l_e \cdot d_e} \cdot \frac{1 + \tau_e}{\Gamma_t} \cdot \Phi(\alpha_e, \theta_n) = \sigma_a^2$$

dove la forza che sollecita la ruota equivalente deve essere identica a quella che sollecita la ruota conica:

$$F_c = \frac{2 \cdot M_1}{d_{1m}} = \frac{2 \cdot W}{\omega_1 \cdot d_{1m}}$$

Quindi, esplicitando tutti i termini dell'equivalenza, si perviene alla seguente formula:

$$\frac{4 \cdot K_E}{\sin 2\theta_n} \cdot \frac{2 \cdot W \cdot \cos \gamma_1}{l \cdot \omega_1 \cdot d_{1m}^2} \cdot \frac{1 + (\tau \cdot \cos \gamma_2 / \cos \gamma_1)}{\Gamma_t} \cdot \Phi(\alpha, \theta_n) = \sigma_a^2$$

Il parametro Γ_t continua ad essere riferito alle ruote equivalenti.

La precedente relazione consente il calcolo del diametro del pignone conico d_{1m} , una volta che sia stata espressa la larghezza della fascia dentata l tramite la: $l = \frac{d_{1m}}{(2 \cdot \varphi_L - 1) \cdot \sin \gamma_1}$ come si può facilmente

ricostruire dalla figura 1.33, una volta ricordata la definizione di $\varphi_L = L/l$, il cui valore deve essere assunto, in genere, fra 3 e 4.

Si ottiene in definitiva l'espressione risolutiva in d_{1m} :

$$d_{1m} = \left(\frac{4 \cdot K_E}{\sin 2\theta_n} \cdot \frac{W \cdot (2\varphi_L - 1) \cdot \sin 2\gamma_1}{\omega_1 \cdot \sigma_a^2} \cdot \frac{1 + (\tau \cdot \cos \gamma_2 / \cos \gamma_1)}{\Gamma_t} \cdot \Phi(\alpha, \theta_n) \right)^{1/3}$$

Il modulo medio di dentatura si ottiene dalla relazione $m_m = d_{1m}/z_1$, dove z_1 è preliminarmente calcolato arrotondando all'intero superiore la $z'_1 = z_{1e} \cdot \cos \gamma_1$, avendo assunto z_{1e} pari al numero minimo di denti. Il valore del modulo medio così ottenuto, fornisce il valore del modulo massimo di dentatura $m_{max} = m_m \cdot \frac{2\varphi_L}{2\varphi_L - 1}$. Questo valore deve essere corretto al valore unificato immediatamente superiore, per poi ottenere le dimensioni definitive delle ruote tramite le relazioni inverse.