

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA "LA SAPIENZA"

FACOLTA' DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA DI II LIVELLO

IN

INGEGNERIA MECCANICA

Prof. Ing. Giovanni Santucci

GUIDA ALLE LEZIONI

DEL CORSO DI

COSTRUZIONE DI MACCHINE II

- PARTE PRIMA -

2 - CALCOLO DI MASSIMA DI PALETTE DI TURBINA

2.1 - Introduzione.

Il calcolo strutturale di una paletta di turbina è sostanzialmente un calcolo di verifica, giacchè forma e dimensioni sono generalmente imposte da considerazioni di natura fluidodinamica.

Caratteristiche salienti della geometria di una paletta di turbina sono un elevato rapporto *spessore max./corda* ed una sensibile torsione fra la sezione di radice e quella di sommità (*svergolamento*).

Nel progetto di una turbina, più che il profilo delle palette, viene dimensionato il canale compreso fra di esse, imponendo adeguate distribuzioni della velocità del fluido per evitare elevati gradienti negativi e, se possibile, passaggi divergenti-convergenti.

Sono così, come già affermato, i requisiti fluidodinamici a governare la geometria della sezione trasversale della palettatura e, in particolare, il rapporto fra l'area della sezione di radice e quella di sommità.

Altra caratteristica saliente di una palettatura di turbina è un elevato rapporto *corda/passaggio di palettatura*, la qual cosa rende la schiera piuttosto fitta.

I problemi strutturali connessi al progetto della palettatura sono, fondamentalmente, connessi alla valutazione delle tensioni dovute alla forza centrifuga ed alle azioni di flessione esercitate dal fluido, con riferimento alla velocità di deformazione ed alla resistenza a rottura nel tempo sotto l'azione simultanea di carichi elevati ed alta temperatura (*scorrimento viscoso*).

Lo stato di tensione della paletta può essere notevolmente accentuato dalla presenza di gradienti termici, particolarmente nelle palettature raffreddate. Tutto ciò senza dimenticare la natura fondamentalmente vibratoria di molte delle sollecitazioni agenti sulla paletta.

2.2 - Sollecitazione da forza centrifuga.

Con riferimento alla figura 2.1, nell'ipotesi semplificativa di paletta a sezione uniforme ($A = \text{cost.}$), la forza centrifuga, agendo sulla porzione di pala esterna alla generica sezione trasversale corrispondente al raggio r , è data dalla:

$$F_c(r) = \delta \cdot A \cdot (R_e - r) \cdot \omega^2 \cdot \frac{(R_e + r)}{2} = \delta \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \frac{(R_e^2 - r^2)}{2}$$

dove δ è la *massa volumica* del materiale. La corrispondente tensione, uniformemente distribuita sulla sezione, è chiaramente data da:

$$\sigma = \frac{F_c}{A} = \delta \cdot \omega^2 \cdot \frac{R_e^2 - r^2}{2}$$

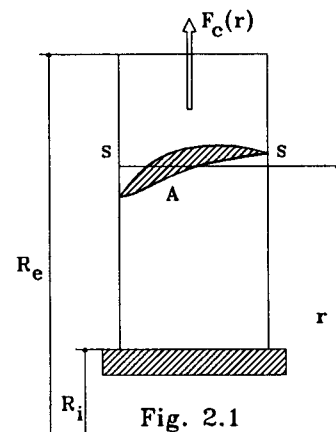
Essa è dunque indipendente dall'area della sezione trasversale di paletta. In particolare, sulla radice della paletta si ottiene il valore massimo della tensione:

$$\sigma_i = \delta \cdot \omega^2 \cdot \frac{R_e^2 - R_i^2}{2}$$

Qualora tale valore superasse quello ammissibile proprio del materiale, non si potrebbe pensare di eliminare l'inconveniente aumentando l'area della sezione trasversale, ma occorrerebbe passare al modello a sezione variabile, se non altro per $r < R_o$, con R_o dato dalla relazione

$$\sigma_{amm} = \delta \cdot \omega^2 \cdot \frac{R_e^2 - R_o^2}{2} \quad \text{e, quindi,} \quad R_o = \sqrt{R_e^2 - \frac{2 \cdot \sigma_{amm}}{\delta \cdot \omega^2}}$$

Imponendo, per $r < R_o$, un valore uniforme di tensione, pari a σ_{amm} , uno strato di paletta di spessore infinitesimo dr (figura 2.2) è assoggettato alla forza di continuità $\sigma_{amm} \cdot (A + dA)$ sulla faccia esterna, alla forza di continuità $\sigma_{amm} \cdot A$ su quella interna ed alla forza centrifuga $dF_c = \delta \cdot \omega^2 \cdot A \cdot r \cdot dr$.



L'equilibrio di queste forze elementari, nella direzione radiale, conduce alla equazione differenziale:

$\sigma_{amm} \cdot dA + \delta \cdot \omega^2 \cdot A \cdot r \cdot dr = 0$ che, risolta per separazione di variabili, conduce alla

$$A(r) = A_{R_0} \cdot e^{\frac{\delta \cdot \omega^2}{2 \cdot \sigma_{amm}} \cdot (R_0^2 - r^2)}$$

che, in particolare, fornisce sulla sezione di radice:

$$A_i = A_{R_0} \cdot e^{\frac{\delta \cdot \omega^2}{2 \cdot \sigma_{amm}} \cdot (R_0^2 - R_i^2)}$$

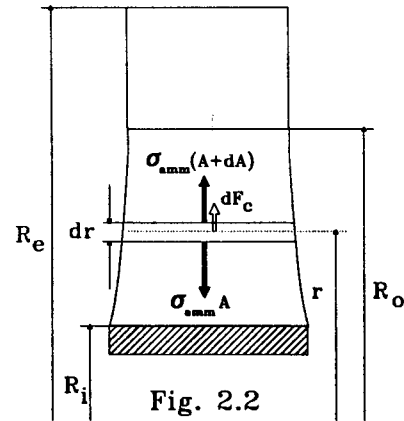


Fig. 2.2

Qualora, per motivi fluidodinamici, non fosse possibile attuare tutto ciò e si disponesse quindi di una funzione $A(r)$ di forma diversa, la tensione dovrebbe essere valutata mediante espressioni del tipo

$$\sigma(r) = \frac{\delta \cdot \omega^2}{A(r)} \cdot \int_r^{R_0} A(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho$$

ove l'integrazione, in genere, può essere ottenuta per via numerica su calcolatori digitali.

2.3 - Sollecitazione di flessione.

Il fluido che scorre attraverso la palettatura esercita forze circonferenziali, che forniscono il momento motore della turbina, e forze assiali, risultato del salto di pressione nello stadio e della usuale riduzione di velocità assiale del fluido.

Queste forze in genere non hanno distribuzioni radiali uniformi, come schematicamente mostrato nella figura 2.3, ove sono rappresentate come forze per unità di lunghezza.

Tali forze possono essere ricavate considerando una falda cilindrica di fluido, di spessore unitario, che transita nella palettatura (figura 2.4).

Se $t(r)$ è il passo di palettatura sul cilindro di raggio r e ρ la massa volumica del fluido, si ottiene:

$$f_a(r) = \rho_1 \cdot c_{1a}(r) \cdot t(r) \cdot [c_{1a}(r) - c_{2a}(r)] + t(r) \cdot [p_1(r) - p_2(r)]$$

$$f_t(r) = \rho_1 \cdot c_{1a}(r) \cdot t(r) \cdot [c_{1t}(r) - c_{2t}(r)]$$

Queste distribuzioni di forza determinano, nella sezione di radice, i momenti flettenti attorno alle direzioni assiale e circonferenziale:

$$M_a = \int_{R_i}^{R_e} (r - R_i) \cdot f_t(r) \cdot dr$$

$$M_t = \int_{R_i}^{R_e} (r - R_i) \cdot f_a(r) \cdot dr$$

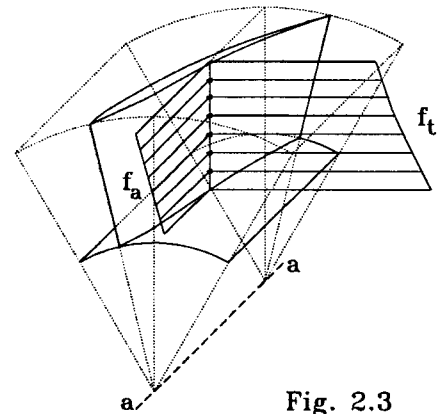


Fig. 2.3

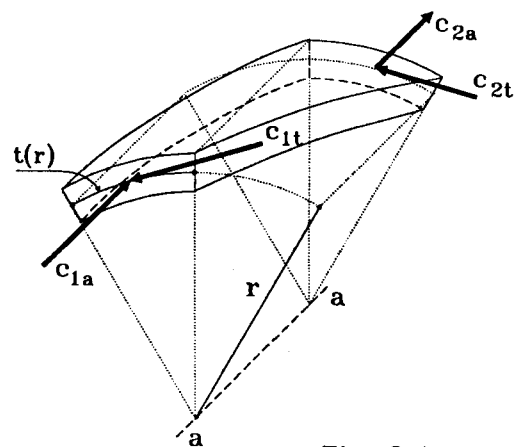


Fig. 2.4

Il momento risultante $\overline{M}_r = \overline{M}_a + \overline{M}_t$ può essere nuovamente scomposto rispetto agli assi principali di inerzia x, y della sezione di radice, per poter nuovamente considerare due flessioni rette (figura 2.5).

Il momento M_x comporta dunque una flessione attorno all'asse x ed implica una corrispondente tensione fornita dalla $\sigma^{(x)} = M_x \cdot y / J_x$.

Il momento attorno all'asse y , M_y , comporta la tensione $\sigma^{(y)} = M_y \cdot x / J_y$.

Queste tensioni si sommano direttamente alla tensione dovuta alla forza centrifuga, calcolata nel par. 2.2.

Esse sono infatti parallele alla direzione radiale della macchina (si ricorda che si stanno trattando turbomacchine a flusso assiale, nelle quali l'asse della paletta corrisponde approssimativamente alla direzione radiale della macchina).

2.4 - Sistemi di fissaggio della pala al rotore.

Le palette di turbina sono relativamente spesse, sia perchè debbono individualmente resistere ad elevate sollecitazioni del gas, sia per la geometria del cammino desiderato nell'efflusso del fluido.

Anche se forature interne di forma adeguata, realizzate principalmente per motivi di raffreddamento, riducono la massa della paletta e quindi la forza centrifuga globalmente su di essa agente, in ogni caso il carico centrifugo rimane elevato, imponendo severi requisiti di resistenza al sistema di attacco della pala al disco sottostante che provvede al giusto posizionamento della pala nella corrente fluida ed alla trasmissione del momento motore all'albero della macchina.

Molteplici tipi di sistemi d'attacco sono stati realizzati, dalla semplice saldatura all'*abete* a lobi multipli. Le saldature sono raramente usate, a causa della difficoltà di assicurare adeguate caratteristiche di resistenza del cordone di saldatura su tutta la palettatura, specie impiegando materiali di scarsa saldabilità. Comunque va detto che, più recentemente, sono stati ripresi in considerazione su taluni materiali le saldature all'arco elettrico ed i collegamenti per diffusione, giacchè ora presentano una maggiore affidabilità. Una notevole difficoltà di questo tipo di collegamento è la non smontabilità dello stesso: così il danneggiamento di una sola paletta richiede la sostituzione dell'intero disco palettato.

Gli attacchi attualmente maggiormente impiegati sono l'*abete* a tre o quattro lobi ed il doppio incastro a *coda di rondine*.

Nel progetto di massima di tali attacchi esiste un'incognita fondamentale: la distribuzione del carico centrifugo fra i lobi, e, in particolare, la quota parte di tale carico sopportata dal lobo di sommità. Pur essendosi sviluppata nel tempo una gran mole di lavoro sia sperimentale che di calcolo su questo problema, particolarmente con l'introduzione del metodo agli elementi finiti e con i rilievi fotoelastici, si preferisce, nel calcolo di massima, ritenere ancora il carico uniformemente distribuito fra i lobi dell'*abete*.

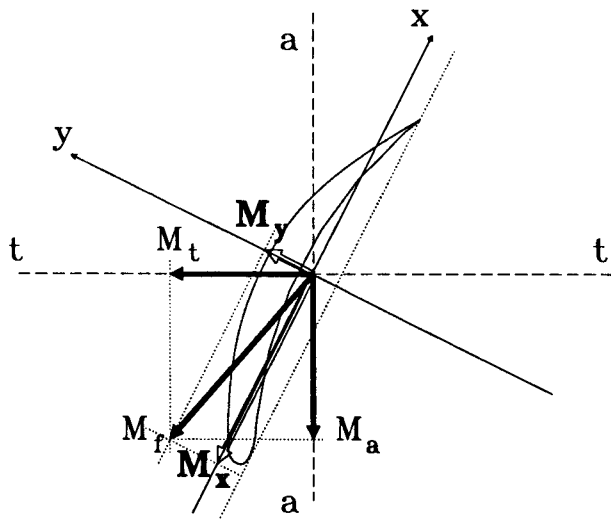


Fig. 2.5

Con riferimento alla figura 2.6, l'equilibrio nella direzione radiale consente di scrivere:

$$\sum F_{cj} = 2 \cdot \cos(\nu + \mu) \cdot \sum R_i = 2 \cdot z \cdot R \cdot \cos(\nu + \mu)$$

Nella relazione precedente, z è il numero di coppie di lobi che costituiscono l'attacco ad abete ed R è il carico agente sul singolo dente.

Le varie forze centrifughe possono essere calcolate dalla $F_{cj} = \rho \cdot \omega^2 \cdot V_j \cdot r_{Gj}$, essendo V_j il volume della porzione in esame (ad esempio: paletta, piattaforma, porzione di abete compresa fra due sezioni di gola consecutive) e r_{Gj} la distanza dall'asse di rotazione del suo baricentro.

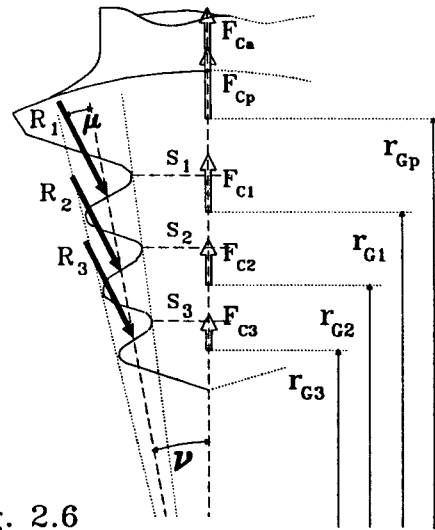


Fig. 2.6

Il momento flettente che agisce alla radice del lobo è dato da eR (figura 2.7). La massima tensione di flessione sulla sezione (A-A) è dunque data da $\sigma_f = 6 \cdot e \cdot R / (l \cdot h_f^2)$, mentre sulla sezione (B-B) agisce una tensione di taglio il cui valore medio può essere calcolato con $\tau = R / (l h_t)$.

La superficie di contatto fra lobo di paletta e lobo di disco è data da $(l b)$ per cui su di essa si sviluppa una pressione di contatto $p = R / (l b)$.

Infine andranno valutate le tensioni in corrispondenza delle sezioni di gola fra lobo e lobo.

Ad esempio, sulla gola esterna agiscono le forze centrifughe di paletta e di piattaforma, per cui, se $(l s_1)$ è l'area della sezione resistente, la tensione è data da $\sigma_{n1} = (F_{ca} + F_{cp}) / (l \cdot s_1)$. Analogamente sulla sezione di gola inferiore si ottiene

$$\sigma_{n2} = \frac{F_{ca} + F_{cp} + F_{c1} - 2 \cdot R \cdot \cos(\nu + \mu)}{l \cdot s_2}$$

Tutti questi valori di tensione, eventualmente amplificati con opportuni fattori di intensificazione degli sforzi per tener conto di effetti di forma, vanno confrontati con valori ammissibili propri del materiale impiegato.

Analoga procedura si può adottare per la porzione dell'attacco appartenente al disco.

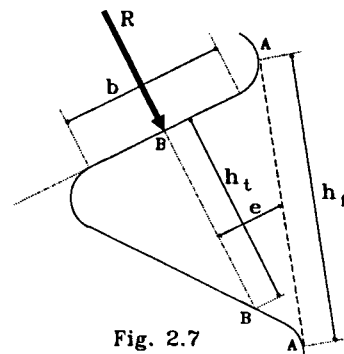


Fig. 2.7

3 - VERIFICA STRUTTURALE DI COMPRESSORI ASSIALI

3.1 - Introduzione.

Il progetto di un compressore assiale è, per molti versi, simile al progetto della turbina. Esistono comunque differenze importanti che richiedono soluzioni costruttive diverse e rendono il calcolo di verifica più o meno complesso.

Il fatto fondamentale da tener presente è che il lavoro compiuto sul fluido nel singolo stadio è notevolmente inferiore a quello ottenuto dal gas nello stadio di turbina. Ciò è imposto dalla necessità di ottenere accettabili valori del rendimento.

Dal punto di vista strutturale ciò comporta un carico minore sulle palette, le quali si presenteranno dunque più sottili e leggere, con dimensioni minime limitate più dalla resistenza all'erosione ed al danneggiamento di corpi estranei che da preoccupanti valori delle tensioni interne di esercizio. Purtroppo si possono destare timori, dal punto di vista della resistenza strutturale, a causa di fenomeni dinamici connessi a vibrazioni flessionali e torsionali eccitate dalla corrente fluida. La stessa vibrazione delle pale, peraltro, comportando variazioni di assetto nella corrente fluida, comporta oscillazioni di pressione che sostengono, a volte addirittura esaltandola, la vibrazione (flutter).

Le pale, in genere, sono caratterizzate da sezioni trasversali rispondenti ai profili della serie NACA-655 standardizzati, oppure rispondenti a profili ad arco circolare, con spessore massimo sulla mezzzeria della linea di Camber ed ancora standardizzati. Per i più elevati regimi di rotazione, sono impiegate pale supersoniche, con spessore massimo oltre la mezzzeria della linea di Camber e non standardizzate.

3.2 - Collegamento pala-rotore.

In un compressore assiale, proprio per l'esilità delle pale, il carico centrifugo totale sull'intera schiera è relativamente modesto. Ciò permette, particolarmente nel settore aeronautico, l'uso di *rotori a tamburo*, in luogo dei dischi caratteristici della turbina.

Il rotore a tamburo, pregevole per la sua leggerezza, è costituito da un guscio conico o cilindrico, munito di anelli di non accentuato spessore radiale, provvisti di scanalature a *coda di rondine*, in genere circonferenziali, per il collegamento degli attacchi delle singole pale (figure 3.1 e 3.2).

Gli attacchi della pala sono a *coda di rondine semplice*, salvo nel caso delle palette di ventilatori *turbofan* per impiego aeronautico dove, per l'elevato sviluppo radiale delle pale ed i conseguenti più elevati carichi centrifughi, sono impiegati attacchi a *coda di rondine doppia*.

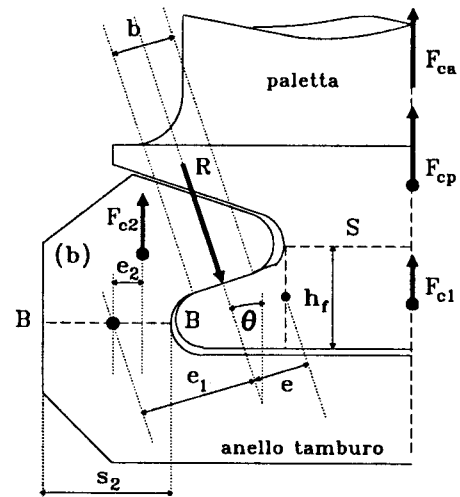


Fig. 3.1

Nella figura 3.1 è rappresentato uno schema raffigurante la coda di rondine semplice, inserita nella scanalatura realizzata sull'anello del tamburo.

Le verifiche strutturali da condurre sono analoghe a quelle già discusse nel capitolo precedente per l'attacco ad abete della palette di turbina. In particolare deve essere: $2 \cdot R \cdot \cos \theta = F_{ca} + F_{cp} + F_{c1}$.

Sulla sezione di gola S, di spessore s e profondità l, agisce la tensione media: $\sigma_1 = \frac{F_{ca} + F_{cp}}{l \cdot s}$.

La tensione massima di flessione sul dente dell'attacco della palette vale $\sigma_f = \frac{6 \cdot e \cdot R}{l \cdot h_f^2}$, mentre la pressione media di contatto fra dente e sede sull'anello è data da $R/(l \cdot b)$.

I blocchi di ancoraggio sull'anello del tamburo, indicati con la lettera (b) nella fig. 3.1, non hanno continuità circonferenziale: la sollecitazione sulla sezione (B-B) può essere valutata come somma dello sforzo normale $N_B = F_{c2} + 0,5 \cdot (F_{ca} + F_{cp} + F_{c1})$ e del momento flettente $M_B = e_1 \cdot R + e_2 \cdot F_{c2}$.

Si ottiene così una tensione massima di trazione data, a meno di effetti di concentrazione degli sforzi, da

$$\sigma_B = \frac{N_B}{l \cdot s_2} + \frac{6 \cdot M_B}{l \cdot s_2^2}$$

3.3 - Verifica di resistenza del mantello del tamburo.

La figura 3.2 mostra una schematica sezione meridiana di un tratto del rotore a tamburo di un compressore a flusso assiale. Si notano gli anelli di ancoraggio delle palette, collegati l'un l'altro con distanziali di spessore h_c , raggio medio r_c e lunghezza l_c . Corrispondentemente indichiamo con r_a il raggio baricentrico dell'anello.

Supponendo idealmente scollegato l'anello dai distanziali, lo spostamento radiale di tale corpo può essere ottenuto, seppure in via approssimata, con i calcoli qui appresso riportati.

L'equilibrio nella direzione radiale di un elemento infinitesimo di anello, ottenuto dalla sezione dello stesso con due piani meridiani mutuamente angolati di $d\theta$ (figura 3.3), conduce all'equazione:

$$2 \cdot \sigma_c \cdot A \cdot \sin(d\theta/2) = f_c \cdot r_a \cdot d\theta + \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot r_a^2 \cdot d\theta$$

ove σ_c è la tensione circonferenziale, ammessa uniforme su tutta la sezione meridiana di area A , $f_c = (n_p \cdot F_c) / (2 \cdot \pi \cdot r_a)$ è la forza per unità di lunghezza dovuta alle n_p palette della schiera, ciascuna sottoposta alla forza centrifuga F_c e $dF_c = \rho \cdot A \cdot \omega^2 \cdot r_a^2 \cdot d\theta$ è la forza centrifuga propria dell'anello.

L'allungamento circonferenziale unitario che accompagna la sollecitazione dell'anello è così dato da

$$\varepsilon_{ca} = \frac{\sigma_c}{E} = \frac{f_c \cdot r_a}{E \cdot A} + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r_a^2}{E}$$

Ad esso corrisponde lo spostamento radiale libero:

$$w_{al} = \varepsilon_{ca} \cdot r_a = \frac{f_c \cdot r_a^2}{E \cdot A} + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r_a^3}{E}$$

Lo spostamento radiale libero del distanziale sarebbe corrispondentemente dato da:

$$w_{cl} = \varepsilon_{cc} \cdot r_c = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r_c^3}{E}$$

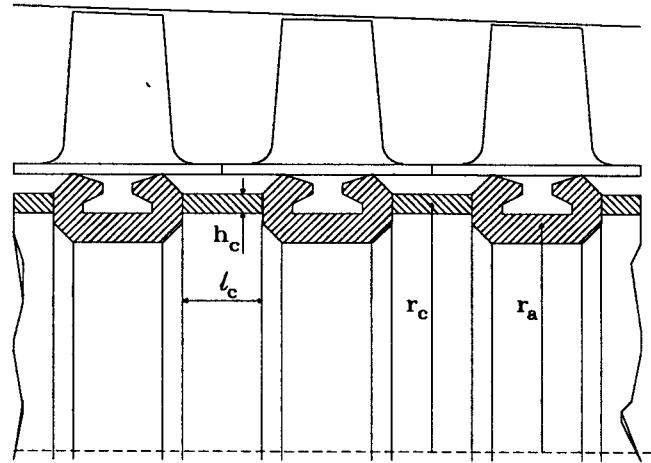


Fig. 3.2

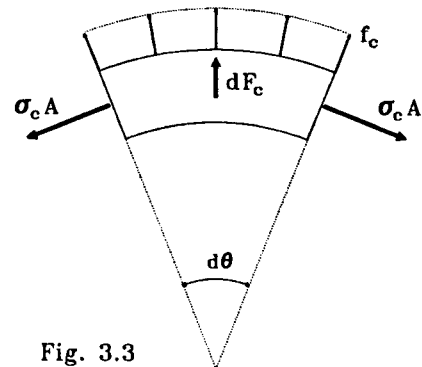


Fig. 3.3

Dalle formule scritte è facile convincersi che, in condizioni di corpi separati, risulterebbe $w_{al} \neq w_{cl}$. Il collegamento fra anelli e distanziali implica l'insorgere di forze di continuità, la presenza delle quali ripristina la condizione di congruenza $w_{al} = w_{cl}$.

Tali forze sono costituite da forze radiali uniformemente distribuite, il valore delle quali, riferito all'unità di lunghezza, si indica con Q_0 e momenti meridiani uniformemente distribuiti, per i quali M_0 indica ancora il valore riferito all'unità di lunghezza.

Tenendo conto della presenza di tali forze di continuità, l'anello subisce nel complesso lo spostamento radiale

$$w_a = \frac{(f_c - 2 \cdot Q_0) \cdot r_a^2}{E \cdot A} + \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r_a^3}{E}$$

L'effetto, sulla deformazione del distanziale, delle azioni di bordo Q_0 e M_0 può essere individuato con riferimento alla teoria dell'elasticità applicata alle lastre a semplice curvatura, della quale si forniscono i richiami nel paragrafo che segue.

3.3.1 - Deformazione elastica delle lastre a semplice curvatura.

La lastra a semplice curvatura è un solido di rivoluzione ottenuto considerando generatrici rettilinee parallele all'asse di rivoluzione ed una direttrice circolare (figura 3.4). Tale solido ha spessore h_c modesto rispetto al raggio medio r_c ed è costituito di materiale omogeneo ed isotropo. Esso è caricato in modo assialsimmetrico da distribuzioni di pressione sul mantello esterno o interno e da forze e momenti uniformemente distribuiti su direttrici. Da tali premesse si deduce immediatamente che anche il corpo deformato è un solido di rivoluzione. La deformata può, dunque, essere compiutamente rappresentata su un piano meridiano, tramite la funzione $w(x)$.

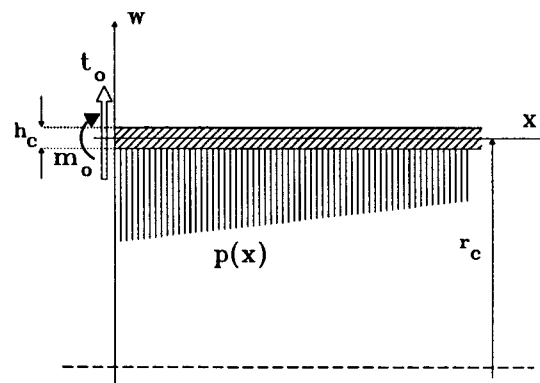


Fig. 3.4

La variabile w è lo spostamento radiale ed x è la coordinata assiale.

Il corpo cilindrico in esame può essere schematizzato come un insieme di travi di larghezza unitaria disposte secondo le generatrici ed affiancate l'una all'altra lungo la direttrice a cerchio che caratterizza il solido.

In analogia con la teoria elastica delle travi inflesse, il momento ed il taglio, riferiti all'unità di lunghezza, possono essere espressi dalle formule

$$m_a = D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \quad e \quad t_a = D \cdot \frac{d^3 w}{dx^3}$$

La costante D deve, in questo caso, tener conto delle modalità di deformazione della singola trave componente il solido: infatti, a causa dell'assialsimmetria del sistema, le facce laterali della trave, inizialmente giacenti su piani meridiani, durante la deformazione scorrono su questi stessi piani, implicando una flessione della trave con contrazione laterale impedita. Si ottiene così:

$$D = E' \cdot J = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{h_c^3}{12}$$

Le grandezze m_a e t_a si riferiscono all'unità di lunghezza e sono applicate al piano trasversale (figura 3.5). La contrazione laterale impedita impone l'insorgere, sul piano meridiano, del momento $m_c = \nu \cdot m_a$, sempre riferito all'unità di lunghezza.

Su questo stesso piano agisce lo sforzo normale n_c , legato alla dilatazione circonferenziale del corpo cilindrico.

Al momento m_a corrisponde, lungo lo spessore h_c , un diagramma incrociato di tensione i cui valori massimo e minimo, corrispondentemente alle superfici esterna ed interna della lastra, sono dati dalla

$$\sigma_a = \pm \frac{6 \cdot m_a}{h_c^2}$$

Alla forza n_c corrisponde la tensione circonferenziale a distribuzione uniforme $\sigma_{cm} = n_c/h_c = (E \cdot w)/r_c$, alla quale si somma il diagramma incrociato dovuto al momento m_c , ottenendo sulle superfici del mantello

$$\text{il valore totale } \sigma_c = \frac{E \cdot w}{r_c} \pm \frac{6 \cdot m_c}{h_c^2}.$$

Il taglio t_a fornisce la tensione tangenziale media, agente sul piano trasversale, $\tau_m = t_a/h_c$.

L'equilibrio radiale dell'elemento infinitesimo, rappresentato nella figura 3.6, conduce all'equazione:

$$D \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + \beta \cdot w(x) = p(x)$$

ove risulta $\beta = (E \cdot h_c)/r_c^2$ e la grandezza $p(x)$ è l'eventuale pressione agente sul corpo cilindrico.

L'equazione differenziale omogenea associata, ottenuta per $p(x)=0$, può essere posta nella forma

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \cdot \lambda^4 \cdot w = 0 \quad \text{con } \lambda^4 = \beta/(4 \cdot D) = [3 \cdot (1 - \nu^2)]/(r_c^2 \cdot h_c^2)$$

Nel caso di mantello cilindrico indefinito ad una delle estremità, l'integrale dell'equazione è del tipo:

$$w(x) = C \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \sin(\lambda \cdot x + \psi)$$

La derivata di questa funzione è data dalla:

$$\frac{dw}{dx} = -\lambda \cdot C \cdot e^{-\lambda x} \cdot \sin(\lambda x + \psi) + \lambda \cdot C \cdot e^{-\lambda x} \cdot \cos(\lambda x + \psi) =$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \lambda \cdot C \cdot e^{-\lambda x} [\sin(\lambda x + \psi) \cdot \cos(\pi/4) - \cos(\lambda x + \psi) \cdot \sin(\pi/4)] = -\sqrt{2} \cdot \lambda \cdot C \cdot e^{-\lambda x} \cdot \sin[\lambda x + \psi - (\pi/4)]$$

Le derivate seconda e terza sono così date dalle:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2 \cdot \lambda^2 \cdot C \cdot e^{-\lambda x} \cdot \sin[\lambda x + \psi - (\pi/2)]$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = -2\sqrt{2} \cdot \lambda^3 \cdot C \cdot e^{-\lambda x} \cdot \sin[\lambda x + \psi - (3\pi/4)]$$

Indicando con Q_0 e M_0 le sollecitazioni di bordo, sempre riferite all'unità di lunghezza, le condizioni al contorno che individuano le costanti di integrazione C e ψ sono:

$$Q_0 = D \cdot \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_0 = -2\sqrt{2} \cdot D \cdot \lambda^3 \cdot C \cdot \sin\left[\psi - \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$M_0 = D \cdot \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_0 = 2 \cdot D \cdot \lambda^2 \cdot C \cdot \sin\left[\psi - \frac{\pi}{2}\right]$$

Ponendo $M_0=0$, si ottiene $\psi = \pi/2$ e, di conseguenza, $C = Q_0/(2 \cdot \lambda^3 \cdot D)$.

I corrispondenti valori di spostamento e rotazione di bordo sono dati da:

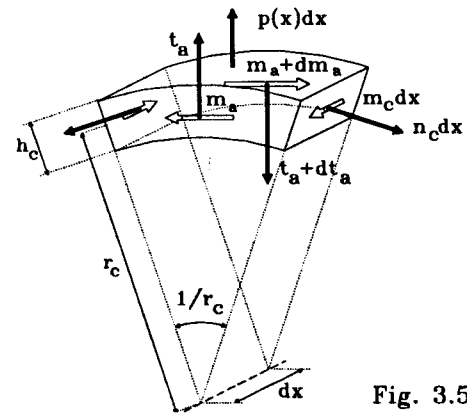


Fig. 3.5

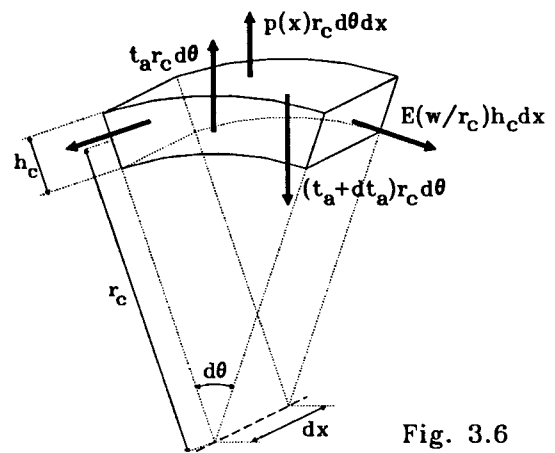


Fig. 3.6

$$w_{oQ} = C \cdot \sin(\pi/2) = \frac{Q_o}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D} \quad \varphi_{oQ} = -\sqrt{2} \cdot \lambda \cdot C \cdot \sin(\pi/4) = -\frac{Q_o}{2 \cdot \lambda^2 \cdot D}$$

Ponendo invece $Q_o=0$, si ottiene $\psi = 3\pi/4$ e, di conseguenza, $C = \sqrt{2} \cdot M_o / (2 \cdot \lambda^2 \cdot D)$.

I corrispondenti valori di spostamento radiale e rotazione di bordo sono dati da:

$$w_{oM} = C \cdot \sin(3\pi/4) = \frac{M_o}{2 \cdot \lambda^2 \cdot D} \quad \varphi_{oM} = -\sqrt{2} \cdot \lambda \cdot C \cdot \sin(\pi/2) = -\frac{M_o}{\lambda \cdot D}$$

Complessivamente, per effetto di entrambe le componenti di sollecitazione di bordo, si avranno i seguenti valori di spostamento radiale e rotazione di bordo:

$$w_o = \frac{Q_o}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D} + \frac{M_o}{2 \cdot \lambda^2 \cdot D} \quad \varphi_o = -\frac{Q_o}{2 \cdot \lambda^2 \cdot D} - \frac{M_o}{\lambda \cdot D}$$

3.3.2 - Calcolo dell'interazione anello-distanziale.

Applicando questi risultati al distanziale in esame, si nota innanzitutto che, a causa della grande rigidezza dell'anello nei confronti di flessioni agenti sul piano meridiano, si può porre $\varphi_o = 0$ e quindi

$M_o = -Q_o / (2 \cdot \lambda)$. Corrispondentemente risulta:

$$w_o = \frac{Q_o}{2 \cdot \lambda^3 \cdot D} - \frac{Q_o}{4 \cdot \lambda^3 \cdot D} = \frac{Q_o}{4 \cdot \lambda^3 \cdot D}$$

Tenendo anche conto dell'effetto della forza centrifuga propria, lo spostamento radiale del bordo del distanziale è dato dalla:

$$w_c = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot r_c^3}{E} + \frac{Q_o}{4 \cdot \lambda^3 \cdot D}$$

La congruenza degli spostamenti radiali dell'anello e del bordo del distanziale permette di determinare l'incognita Q_o :

$$\rho \cdot \omega^2 \cdot r_a^3 + \frac{(f_c - 2 \cdot Q_o) \cdot r_a^2}{A} = \rho \cdot \omega^2 \cdot r_c^3 + \frac{E \cdot Q_o}{4 \cdot \lambda^3 \cdot D}$$

ricavando, in definitiva,

$$Q_o = \frac{A \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot (r_a^3 - r_c^3) + f_c \cdot r_a^2}{[E \cdot A / (4 \cdot \lambda^3 \cdot D)] + 2 \cdot r_a^2}$$

Dalla conoscenza di Q_o si può risalire allo spostamento w_c ed al momento M_o . In tal modo è possibile calcolare lo stato di tensione nel collegamento distanziale-anello. La componente circonferenziale di tale stato di tensione è data dalla:

$$\sigma_c = E \cdot \frac{w_c}{r_c} \pm \frac{6 \cdot \nu \cdot M_o}{h_c^2}$$

La componente assiale di tensione è data dalla:

$$\sigma_a = \pm \frac{6 \cdot M_o}{h_c^2}$$

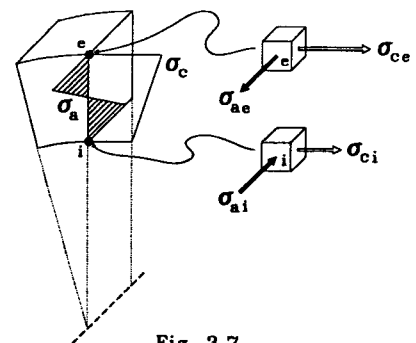


Fig. 3.7

Tali valori si localizzano sulla superficie interna ed esterna del distanziale. Nella figura 3.7 è rappresentata schematicamente la distribuzione delle componenti assiale e circonferenziale di tensione lungo lo spessore del mantello del distanziale.

4 - SOLIDI DI RIVOLUZIONE

4.1 - Introduzione.

4.1.1 - Generalità.

Gli organi rotanti sono generalmente assai importanti nelle macchine. Il progetto di questi componenti assume dunque notevole rilevanza nel dimensionamento dell'intero sistema meccanico.

I carichi che agiscono su di un elemento rotante appartengono sostanzialmente a tre differenti categorie:

- a) carichi indipendenti dalla rotazione, quali il momento torcente negli organi di trasmissione o la spinta assiale sui rotori di turbomacchine (motrici o operatrici);
- b) carichi dipendenti dalla velocità angolare o dall'accelerazione angolare, legati alle forze d'inerzia di tipo centrifugo o torsionale ed ai momenti giroscopici;
- c) carichi legati alla presenza di gradienti di temperatura, dovuti a fenomeni di riscaldamento o raffreddamento, come sui dischi di turbina o nei freni meccanici.

Il progresso tecnico e quello tecnologico impongono (e permettono) il raggiungimento di velocità di rotazione assai elevate, consentendo così la costruzione di macchine più compatte e meno pesanti ed un considerevole aumento della produttività.

Nel caso delle turbomacchine motrici, al fine di migliorare i rendimenti termodinamici, alle elevate velocità di rotazione si accompagnano temperature assai alte del fluido elaborato, e quindi degli organi palettati in contatto con esso. Ciò comporta l'esistenza di sempre più pericolosi gradienti di temperatura sui dischi, ancora più esasperati dalle dimensioni sempre più contenute assunte da tali macchine per soddisfare le già citate esigenze di ingombro e leggerezza.

Tutto questo impone, nel progetto di tali organi, procedimenti di calcolo sempre più raffinati, particolarmente laddove i margini di sicurezza si fanno più stretti, come in campo aeronautico od in taluni settori industriali.

Occorre infatti tener presente che il collasso di organi rotanti ad elevata velocità comporta una vera e propria esplosione del pezzo, con proiezione di frammenti di notevole dimensione e peso nell'ambiente circostante ed evidenti rischi per l'incolumità degli operatori circostanti.

Nella trattazione che segue verranno esposte con sufficiente approfondimento le sole tecniche di calcolo che permettono di tener conto degli effetti delle forze centrifughe e dei gradienti di temperatura.

4.1.2 - Ipotesi di base.

La forma del solido, oggetto della trattazione che segue, è quella di un corpo assialsimmetrico. L'asse di simmetria funge da asse di rotazione del solido, la cui geometria è caratterizzata dall'esistenza di un'ulteriore simmetria rispetto ad un piano ortogonale all'asse.

Se il solido in questione mostra anche uno spessore *sottile*, cioè piccolo rispetto al diametro massimo, e con modesta variabilità dello stesso lungo il raggio, possiamo ritenere nulle tutte le componenti di tensione parallele all'asse e quindi riconoscere nel piano di simmetria il piano caratteristico dello stato di tensione. Tutto ciò sarà vero solo in forma approssimata e l'oggetto viene definito *disco sottile*.

Nella trattazione che segue supporremo il materiale omogeneo ed isotropo, a comportamento elastico lineare.

I carichi applicati siano a distribuzione assialsimmetrica ed uniforme, così come assialsimmetrico sarà il campo di temperatura del disco. In particolare saranno assialsimmetriche anche le condizioni al contorno, ad esempio le pressioni sulle superfici cilindriche interna ed esterna del disco.

In simili condizioni sarà assialsimmetrico il campo delle tensioni che agisce nel disco, così come assialsimmetrico sarà il campo delle deformazioni e degli spostamenti dei punti materiali che compongono il corpo in esame.

4.2 - Equazioni di governo.

4.2.1 - Equazioni di equilibrio.

Con riferimento alla figura 4.1, le forze che agiscono, in direzione radiale, sull'elemento infinitesimo di materiale individuato dall'angolo diedro $2d\theta$ e dallo spessore radiale $2dr$ sono le seguenti:

a) la forza centrifuga elementare $dF_c = 4 \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2 \cdot h \cdot dr \cdot d\theta$

b) la componente normale della forza di continuità sul raggio esterno

$$dF_{re} = (\sigma_r + d\sigma_r) \cdot (h + dh) \cdot (r + dr) \cdot 2d\theta$$

c) la componente normale della forza di continuità sul raggio interno

$$dF_{ri} = (\sigma_r - d\sigma_r) \cdot (h - dh) \cdot (r - dr) \cdot 2d\theta$$

d) le proiezioni sulla direzione radiale delle componenti normali delle forze di continuità laterali

$$dF_{cs,r} = dF_{cd,r} = \sigma_c \cdot h \cdot 2dr \cdot \sin(d\theta)$$

L'equilibrio delle forze elencate, nella direzione radiale, con le dovute semplificazioni e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, conduce all'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r r h) - \sigma_c h + \rho \omega^2 r^2 h = 0$$

Sempre con riferimento alla figura 4.1, le forze che agiscono in direzione circonferenziale sono:

a) la forza d'inerzia associata all'accelerazione angolare $dF_a = 4r^2 \rho \dot{\omega} h dr d\theta$

b) le componenti tangenziali della forza di continuità ai raggi esterno ed interno

$$dF_{ce} = (\tau_{rc} + d\tau_{rc})(h + dh)(r + dr)2d\theta \quad \text{e} \quad dF_{ci} = (\tau_{rc} - d\tau_{rc})(h - dh)(r - dr)2d\theta$$

c) le proiezioni circonferenziali delle componenti tangenziali delle forze di continuità laterali

$$dF_{ts,c} = dF_{td,c} = \tau_{rc} h 2dr \cdot \sin(d\theta)$$

L'equilibrio delle forze in direzione circonferenziale, con le dovute semplificazioni e trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore, conduce alla seguente equazione:

$$\frac{d}{dr}(\tau_{rc} r h) + \tau_{rc} h + \rho \dot{\omega} r^2 h = 0$$

Le due equazioni di equilibrio discusse sono indipendenti, le soluzioni possono dunque essere studiate separatamente. In particolare, in assenza di accelerazione angolare ed in presenza di carichi al contorno esclusivamente radiali, la seconda equazione fornisce la soluzione banale: $\tau_{rc} = 0$.

Nella successiva trattazione faremo riferimento all'ipotesi semplificativa appena enunciata, in base alla quale è possibile peraltro indicare le tensioni radiale e circonferenziale come "principali" dello stato di tensione piano.

4.2.2 - Equazione di congruenza.

Nel caso dunque di carichi esclusivamente radiali, lo spostamento di un generico punto del disco ha la sola componente radiale. Sotto tale ipotesi, la deformazione è descritta dalla sola funzione $u=u(r)$.

Il gradiente di tale funzione rappresenta l'allungamento unitario radiale: $\epsilon_r = \frac{du}{dr}$.

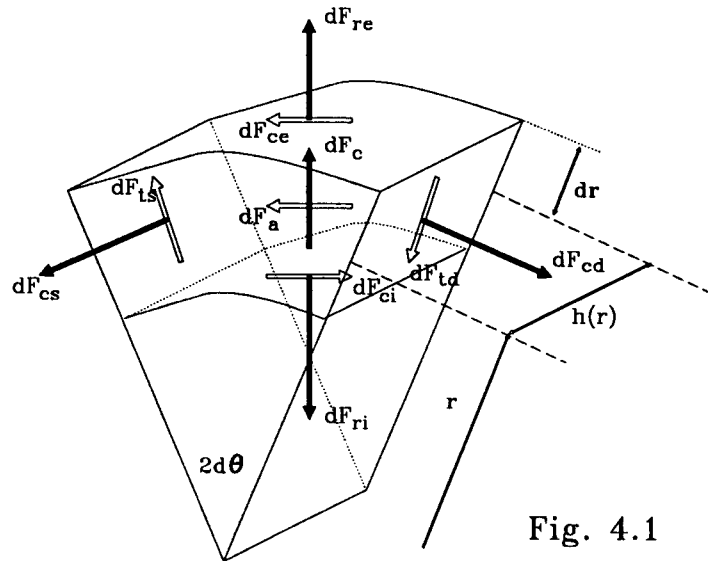


Fig. 4.1

L'allungamento unitaria circonferenziale è dato dalla relazione: $\varepsilon_c = \frac{2\pi(r+u)-2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$.

Dalle precedenti, si ottiene l'equazione di congruenza: $\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_c)$.

L'equazione precedente, tenendo in debito conto le equazioni costitutive del materiale (legge di Hooke), assume la forma seguente:

$$(1+\nu)\frac{\sigma_c - \sigma_r}{E} + r \frac{d}{dr}\left(\frac{\sigma_c - \nu\sigma_r}{E}\right) + r \frac{d}{dr}(\alpha\theta) = 0$$

Infatti, introdotti il modulo di Young, il coefficiente di Poisson ed il coefficiente di dilatazione termica lineare, indicato con α il salto di temperatura dal valore di riferimento che caratterizza uno stato di tensione nulla, le equazioni costitutive del materiale, in campo di elasticità lineare, si traducono nelle seguenti espressioni:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_c) + \alpha\theta \quad \text{e} \quad \varepsilon_c = \frac{1}{E}(\sigma_c - \nu\sigma_r) + \alpha\theta.$$

Esse, inserite nell'equazione di congruenza, permettono dunque di esprimere questa in termini di tensione e di gradiente termico, come precedentemente mostrato.

Si noti infine come, in tale espressione, la variabilità delle caratteristiche elastiche e dilatometriche del materiale con la temperatura renda tali grandezze anche funzioni del raggio. Ciò impone naturalmente che esse vengano inglobate nell'operazione di derivazione.

4.2.3 - Equazione di resistenza.

Con riferimento all'ipotesi di resistenza della massima energia di distorsione (ipotesi di von Mises), la tensione ideale che indica il livello di pericolosità dello stato di tensione piano di un punto generico del disco può essere facilmente espressa in termini delle tensioni radiale e circonferenziale, già definite come principali. Lo stato di tensione ammissibile è dunque individuato dalla nota equazione:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_c^2 - \sigma_r\sigma_c} = \sigma_o.$$

4.3 - Procedure generali di calcolo.

In generale è nota la velocità angolare del disco, assieme alle caratteristiche meccaniche e termodilatometriche del materiale ed alla loro dipendenza dalla temperatura. Sono quindi note le leggi che esprimono la variabilità di queste grandezze lungo il raggio.

L'integrazione delle equazioni differenziali di governo, laddove possibile, definisce due costanti di integrazione, la cui determinazione potrà essere operata tramite la conoscenza di opportune condizioni al contorno.

4.3.1 - Procedura di progetto tramite calcolo diretto.

Tale procedura prevede di ricavare preliminarmente lo stato di tensione, cioè le tensioni incognite radiale e circonferenziale, dal sistema ottenuto dall'equazione di congruenza integrata e dall'equazione di resistenza.

Tali componenti di tensione, ormai note, inserite nell'equazione di equilibrio, debitamente integrata, consentiranno la determinazione della terza incognita: la funzione $h(r)$.

4.3.2 - Calcolo di verifica di resistenza.

In questo caso è già nota la geometria del disco, quindi la funzione $h(r)$.

Il sistema costituito dalle equazioni di equilibrio e congruenza, integrate, consente la determinazione dello stato di tensione, le cui componenti, inserite nell'equazione di resistenza, permetteranno la voluta verifica.

4.4 - Disco ad uniforme sollecitazione.

E' questo un esempio della procedura di progetto con calcolo diretto, applicata ad un disco pieno (senza foro centrale).

Il calcolo diretto è reso possibile mediante introduzione di un'ulteriore ipotesi semplificativa: quella di campo di temperatura uniforme e, quindi, di invariabilità delle caratteristiche del materiale lungo il raggio.

La richiesta condizione di uniforme sollecitazione presuppone l'invariabilità lungo il raggio delle due componenti, radiale e circonferenziale, di tensione.

Ciò comporta, nell'equazione di congruenza, di dover considerare nulle le derivate rispetto al raggio, il che implica che debbano essere uguali nell'intero disco le componenti di tensione. L'intervento dell'equazione di resistenza permette poi che entrambe le componenti possano essere uguagliate alla tensione ammissibile del materiale: $\sigma_r = \sigma_c = \sigma_o$

In tali condizioni l'equazione di equilibrio diventa: $\frac{d}{dr}(hr) - h + \frac{\rho\omega^2 r^2}{\sigma_o} h = 0$.

Essa può essere facilmente trasformata nella forma: $\frac{dh}{h} = -\frac{\rho\omega^2}{\sigma_o} r dr$.

Integrando con riferimento al raggio esterno, al quale corrisponde la larghezza nota h_e del disco, otteniamo la funzione:

$$h(r) = h_e e^{\frac{\rho\omega^2}{2\sigma_o}(R_e^2 - r^2)}$$

La forma delle derivate prima e seconda è: $\frac{dh}{dr} = -h \frac{\rho\omega^2}{\sigma_o} r$ e $\frac{d^2h}{dr^2} = -\rho \frac{\omega^2}{\sigma_o} h \left(1 - \rho\omega^2 \frac{r^2}{\sigma_o}\right)$.

In corrispondenza del raggio $r=0$, si ottiene la derivata prima nulla e la seconda minore di zero. Lo spessore massimo si ottiene dunque sull'asse del disco, assumendo il valore $h_o = h_e \cdot e^{\frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot R_e^2}{2 \cdot \sigma_o}}$

La derivata seconda si annulla per $r = r_f = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_o}{\rho}}$.

In corrispondenza di questo raggio il profilo del disco mostra dunque un flesso e lo spessore è ivi dato da: $h_f = \frac{h_o}{\sqrt{e}} = 0,606 \cdot h_o$.

4.5 - Disco a spessore costante.

4.5.1 - Ipotesi semplificative.

Si ammette ancora una variabilità della temperatura lungo il raggio, ma si afferma che essa è abbastanza contenuta, in modo da poter ammettere costanti le caratteristiche termo-elastiche del materiale. Tale ipotesi, in anelli di piccola dimensione radiale, appare di soddisfacente approssimazione.

4.5.2 - Equazione risolutiva.

L'equazione di equilibrio, essendo h costante, assume la forma: $\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_c + \rho\omega^2 r^2 = 0$.

L'equazione di congruenza diventa: $(1 + \nu)(\sigma_c - \sigma_r) - r\nu \frac{d\sigma_r}{dr} + r \frac{d\sigma_c}{dr} + rE\alpha \frac{d\theta}{dr} = 0$.

Ricaviamo dalla prima di tali equazioni le due relazioni:

$$\sigma_c = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \rho\omega^2 r^2 \quad \text{e} \quad \frac{d\sigma_c}{dr} = r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_r}{dr} + 2\rho\omega^2 r.$$

Esse, introdotte nell'equazione di congruenza, conducono alla seguente equazione differenziale del second'ordine, non omogenea:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + (3 + \nu) \rho \omega^2 r^2 + E \alpha r \frac{d\theta}{dr} = 0.$$

L'integrale generale di tale equazione può essere ottenuto dall'*integrale generale* dell'omogenea associata $r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0$.

A quest'ultimo si dovrà sommare un *integrale particolare* dell'equazione che tiene conto dell'effetto della forza centrifuga: $r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + (3 + \nu) \rho \omega^2 r^2 = 0$.

Un ulteriore addendo sarà costituito da un *integrale particolare* dell'equazione che tiene conto dell'effetto del gradiente termico: $r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + E \alpha r \frac{d\theta}{dr} = 0$.

4.5.2.1 - Integrale generale dell'omogenea associata.

La funzione rappresentata con le sue derivate prima e seconda nelle espressioni che seguono, soddisfa l'equazione differenziale omogenea precedentemente scritta

$$\sigma_r = B r^n \quad ; \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = n B r^{(n-1)} \quad ; \quad \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} = n(n-1) B r^{(n-2)}$$

Infatti, inserendo le precedenti espressioni nell'omogenea associata, si ottiene l'equazione algebrica $n(n+2)=0$ che ammette le due soluzioni $n=0$ ed $n=-2$.

L'integrale generale dell'omogenea associata è dunque $\sigma_{rl} = B_1 + \frac{B_2}{r^2}$.

Le costanti B_1 e B_2 possono essere determinate tramite le condizioni al contorno.

4.5.2.2 - Integrale particolare della seconda equazione (effetto della forza centrifuga).

La funzione, qui di seguito scritta assieme alle sue derivate prima e seconda,

$$\sigma_r = B r^2 \quad ; \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = 2B r \quad ; \quad \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} = 2B$$

introdotta nella seconda equazione, porta alla determinazione del valore della costante $B = -\frac{(3+\nu)}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2$.

Tale valore della costante, infatti, porta la funzione scelta a soddisfare l'equazione differenziale cui si riferisce, rendendola appunto integrale particolare.

Tale integrale particolare è dunque dato da: $\sigma_{rl} = -\frac{(3+\nu)}{8} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot r^2$

4.5.2.3 - Integrale particolare della terza equazione (effetto del gradiente termico).

La determinazione di tale integrale particolare presuppone la conoscenza dell'andamento del gradiente termico. Qualora l'andamento della temperatura lungo il raggio non fosse analiticamente noto, o la sua forma analitica non consentisse l'integrazione dell'equazione differenziale cui si riferisce, potrebbe essere vantaggiosamente approssimato tramite uno sviluppo di potenze o tramite un'espressione logaritmica, una volta nota la temperatura per alcuni valori del raggio.

4.5.2.3.1 - Distribuzione della temperatura a legge polinomiale.

E' possibile ipotizzare un andamento approssimato della temperatura, e quindi del suo gradiente, del tipo seguente: $\theta(r) = k_0 + \sum_{n=1}^m k_n r^n$; $\frac{d\theta}{dr} = \sum_{n=1}^m n k_n r^{(n-1)}$, con $n = 1, 2, 3, \dots, m$ e con le costanti k_n da determinare, assieme a k_0 , sulla base della conoscenza di $m+1$ punti del diagramma della funzione di temperatura.

L'equazione differenziale che così si ottiene, $r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + E\alpha \sum_{n=1}^m n k_n r^n = 0$, ammette come

integrale particolare la funzione $\sigma_{rIII} = \sum_{n=1}^m B_n r^n$, quando le costanti B_n soddisfano l'equazione

$$\text{algebraica } \sum_{n=1}^m [B_n(n+2) + E\alpha k_n] \cdot n r^n = 0 .$$

La sommatoria precedentemente scritta si annulla certamente all'annullarsi dei moltiplicatori della funzione $n r^n$. Le costanti B_n sono dunque date dalle relazioni: $B_n = -\frac{\alpha \cdot E}{n+2} \cdot k_n$.

Si ottiene in tal modo l'integrale particolare cercato: $\sigma_{rIII} = -\alpha \cdot E \cdot \sum_{n=1}^m \frac{k_n}{n+2} \cdot r^n$.

4.5.2.3.2 - Distribuzione della temperatura a legge logaritmica.

Se è possibile approssimare la variazione della temperatura lungo il raggio con una legge logaritmica, si ottengono le espressioni $\theta(r) = k_0 + k \ln r$; $\frac{d\theta}{dr} = \frac{k}{r}$, dove le costanti k_0 e k sono determinate dalla conoscenza della temperatura del disco in corrispondenza di due valori del raggio.

L'equazione differenziale della quale occorre determinare un integrale particolare assume dunque la forma: $r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + E\alpha k = 0$.

La funzione, qui di seguito trascritta assieme alle sue derivate prima e seconda,

$$\sigma_{rIII} = B \cdot \ln r \quad ; \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{B}{r} \quad ; \quad \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} = -\frac{B}{r^2}$$

è un integrale particolare quando risulta $B = -\frac{E\alpha k}{2}$.

L'espressione finale di tale integrale, dunque, diventa: $\sigma_{rIII} = -\frac{E\alpha k}{2} \cdot \ln r$

4.5.3 Formule risolutive.

Lo stato di tensione di un disco a spessore costante, con caratteristiche del materiale uniformi pur in presenza di gradiente termico, viene dunque descritto dalle seguenti formule:

$$\sigma_r(r) = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 + \sigma_{rIII} \quad \text{e} \quad \sigma_c(r) = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 + \sigma_{cIII}$$

ove la parte dipendente dal gradiente termico assume le forme già discusse ed è $\sigma_{cIII} = \frac{d}{dr}(r \cdot \sigma_{rIII})$.

Le costanti B_1 e B_2 , come già accennato in precedenza, sono determinate da due condizioni al contorno che, a seconda dei casi, potranno essere:

- assegnato valore della componente radiale di tensione sui raggi esterno ed interno del disco;
- assegnato valore delle componenti radiale e circonferenziale della tensione in corrispondenza di un qualsiasi raggio del disco, ad esempio quello esterno;

- c) l'uguaglianza delle componenti radiale e circonferenziale della tensione in corrispondenza del raggio nullo quando il disco è pieno (privo di un foro centrale per il calettamento sull'albero).

4.6 - Metodi numerici per il calcolo del disco a spessore variabile.

4.6.1 - Metodo alle differenze finite.

Le componenti di tensione, funzioni incognite del problema, possono essere determinate in un numero finito di punti, tramite il procedimento numerico che, nelle equazioni differenziali di governo, trasforma le derivate in rapporti di incrementi finiti.

Il procedimento consiste dunque nel fissare m punti lungo la direzione radiale, potendosi indicare con l'indice i i valori delle grandezze variabili nel generico i -esimo punto. I punti individuano $(m-1)$ intervalli, in ciascuno dei quali le equazioni di governo vedono gli incrementi infinitesimi di una grandezza variabile sostituiti dalla differenza dei valori che tale grandezza assume agli estremi i e $i+1$ dell'intervallo stesso. Se in tali equazioni compare il valore di una variabile, esso viene sostituito dalla media aritmetica dei valori che la variabile assume alle estremità dell'intervallo.

Con tali presupposti, l'equazione di equilibrio diventa:

$$\frac{\sigma_{r(i+1)}r_{(i+1)}h_{(i+1)} - \sigma_{ri}r_ih_i}{r_{(i+1)} - r_i} - \frac{\sigma_{c(i+1)}h_{(i+1)} + \sigma_{ci}h_i}{2} + \rho\omega^2 \frac{r_{(i+1)}^2h_{(i+1)} + r_i^2h_i}{2} = 0$$

Analogamente l'equazione di congruenza diventa:

$$(1 + \nu_{(i+1)}) \frac{(\sigma_{c(i+1)} - \sigma_{r(i+1)})}{2E_{(i+1)}} + (1 + \nu_i) \frac{(\sigma_{ci} - \sigma_{ri})}{2E_i} + \frac{r_{(i+1)} + r_i}{2(r_{(i+1)} - r_i)} \cdot \left(\frac{\sigma_{c(i+1)} - \nu_{(i+1)}\sigma_{r(i+1)}}{E_{(i+1)}} - \frac{\sigma_{ci} - \nu_i\sigma_{ri}}{E_i} + \alpha_{(i+1)}\theta_{(i+1)} - \alpha_i\theta_i \right) = 0$$

Isolando le incognite, entrambe le relazioni precedenti possono essere scritte nella forma seguente

$$A_i\sigma_{r(i+1)} + B_i\sigma_{c(i+1)} + C_i\sigma_{ri} + D_i\sigma_{ci} = H_i$$

$$A_i^*\sigma_{r(i+1)} + B_i^*\sigma_{c(i+1)} + C_i^*\sigma_{ri} + D_i^*\sigma_{ci} = H_i^* \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, (m-1)$$

Si perviene così ad un sistema di $2(m-1)$ equazioni algebriche lineari in $2m$ incognite: esso potrà essere risolto solo se accompagnato da altre due equazioni. Tali equazioni saranno quelle che descrivono le condizioni al contorno, come già descritte nella sezione 4.5.3.

Completato in tal modo il sistema delle $2m$ equazioni nelle $2m$ incognite e provveduto alla sua risoluzione, sarà così possibile conoscere per punti il campo delle tensioni, anche in presenza di una conosciuta variabilità dello spessore $h(r)$.

4.6.2 - Metodo del Grammel.

Questo metodo, nato parecchi decenni fa per il calcolo manuale dei dischi, risolve il disco di spessore variabile, anche eventualmente sottoposto ad apprezzabili gradienti termici, tramite una schematizzazione geometrica che sostituisce al disco una successione radiale di elementi coassiali ad anello, ognuno dei quali ha uno spessore costante ed una variabilità della temperatura così contenuta da consentire di ritenere costanti, nel suo interno, le caratteristiche del materiale.

Su ciascuno di questi elementi componenti possiamo così applicare le formule risolutive già descritte al punto 4.5.3, a completamento della trattazione del disco a spessore uniforme. Per la determinazione delle costanti B_1 e B_2 che figurano in tali formule, è conveniente imporre le condizioni al contorno che vedono note le tensioni radiale e circonferenziale in corrispondenza del raggio esterno del singolo elemento.

La scelta del numero e della dimensione degli elementi componenti dipende dalla forma geometrica dell'intero disco in esame e dall'entità dei gradienti di temperatura.

Da tali gradienti dipende infatti la variabilità delle caratteristiche meccaniche del materiale. Sarà quindi opportuno aumentare il numero degli anelli componenti, diminuendone le dimensioni radiali, laddove più elevate sono la variabilità dello spessore del disco e/o le variabilità delle caratteristiche meccaniche conseguenti alle variazioni di temperatura.

Si perviene così alla schematizzazione rappresentata nella figura 4.2

Il metodo di calcolo, di tipo tabellare, prevede due fasi successive.

4.6.2.1 Prima fase di calcolo.

Nel calcolo di resistenza di un disco di turbina, è in genere nota la tensione radiale che agisce in corrispondenza al raggio esterno R_e : tale tensione è infatti facilmente correlabile alla forza centrifuga della singola paletta F_{cp} , tramite la seguente relazione (n_p è il numero delle palette montate sul disco).

$$\sigma_{Re} = \frac{n_p F_{cp}}{2\pi r_e h(r_e)}$$

La prima fase di calcolo ha dunque inizio risolvendo lo stato di tensione nell'anello più esterno, determinando le costanti B_1 e B_2 con le seguenti condizioni al contorno: $\sigma'_{re} = \sigma_{Re}$; $\sigma'_{ce} = 0$

La seconda delle due condizioni è una posizione arbitraria.

Le formule in 4.5.3 consentono il calcolo delle tensioni radiale e circonferenziale in corrispondenza del raggio interno del primo anello esaminato.

Le equazioni di equilibrio e di congruenza, scritte in corrispondenza del collegamento fra elementi anulari successivi, consentiranno poi di determinare le corrispondenti componenti di tensione sul raggio esterno del secondo anello, interno al precedente. Tali equazioni si mostrano nella forma seguente:

$$2\pi r_{i1} h_1 \sigma'_{ri1} = 2\pi r_{e2} h_2 \sigma'_{re2} \quad ; \quad \epsilon'_{ci1} = \epsilon'_{ce2}$$

Dalla prima di esse, essendo $r_{i1} = r_{e2}$, ricaviamo $\sigma'_{re2} = (h_1/h_2) \cdot \sigma'_{ri1}$

mentre l'equazione di congruenza può essere espressa in termini di componenti di tensione, tramite la legge costitutiva del materiale. Essa si presenterà dunque nella forma seguente, permettendo la determinazione della tensione circonferenziale del secondo anello

$$\frac{\sigma'_{ci1} - \nu_1 \sigma'_{ri1}}{E_1} + \alpha_1 \theta_{i1} = \frac{\sigma'_{ce2} - \nu_2 \sigma'_{re2}}{E_2} + \alpha_2 \theta_{e2}$$

A questo punto la procedura si ripete: vengono infatti calcolate le componenti di tensione all'interno del secondo anello e successivamente valutate le tensioni sull'esterno del terzo anello con le già viste relazioni di equilibrio e congruenza, e così via.

Si perviene in tal modo al calcolo delle tensioni radiale e circonferenziale in corrispondenza del raggio interno dell'ultimo anello (n -esimo anello):

$$\sigma'_{ri_n} \quad ; \quad \sigma'_{ci_n}$$

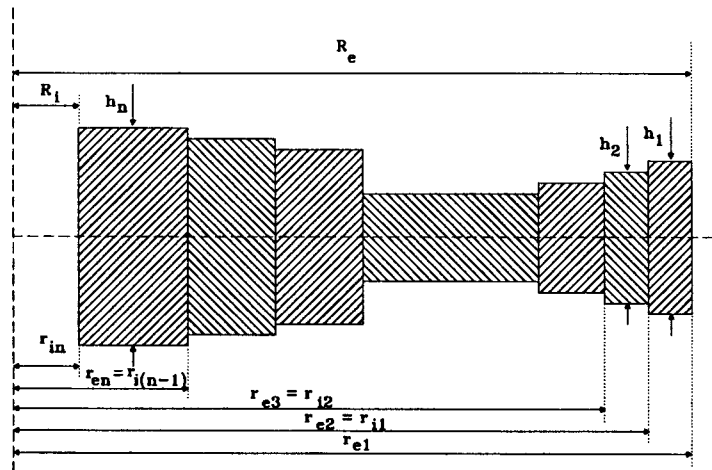


Fig. 4.2

Tali tensioni non permetteranno, in genere, di soddisfare la seconda condizione al contorno dell'intero disco, in genere da imporre all'interno del disco stesso.

La prima fase di calcolo non può dunque ancora pervenire alla soluzione vera del problema, giacché non soddisfa una delle condizioni al contorno, traendo peraltro origine da un presupposto generalmente non vero: che sia nulla la tensione circonferenziale esterna del disco.

4.6.2.2 Seconda fase di calcolo.

Nella seconda fase del calcolo si parte ancora dal primo anello esterno, imponendo una tensione radiale esterna nulla ed un valore unitario per la corrispondente tensione circonferenziale.

In tale fase è peraltro possibile impiegare le formule 8.5.3 in forma semplificata, eliminando in esse gli addendi che si riferiscono ai contributi della forza centrifuga e del gradiente termico. Purtuttavia si continuano a considerare gli effetti delle variazioni di temperatura sul materiale, ancora attribuendo differenti caratteristiche del materiale nei vari anelli che compongono idealmente il disco.

In questa fase il calcolo procede con le stesse modalità già discusse per la fase precedente, pervenendo alle componenti di tensione all'interno del disco: $\sigma_{ri_n}^{II}$; $\sigma_{ci_n}^{II}$.

La sovrapposibilità degli effetti permette di assumere, come soluzione del problema, la combinazione lineare dei risultati ottenuti nelle due fasi di calcolo descritte.

In corrispondenza del raggio interno del disco si può allora imporre la seguente condizione al contorno:

$\sigma_{ri_n}^I + k\sigma_{ri_n}^{II} = -p_i$, valida nel caso in cui il disco si presenti forato e venga calettato sull'albero con un'assegnata pressione di calettamento p_i .

Oppure, nel caso di disco pieno, la condizione da imporre è del tipo: $\sigma_{ri_n}^I + k\sigma_{ri_n}^{II} = \sigma_{ci_n}^I + k\sigma_{ci_n}^{II}$.

Nel caso, infine, di disco pieno realizzato "di pezzo" con l'albero, la condizione da imporre appare leggermente più complessa.

La considerazione che l'albero possa essere radialmente assai più rigido del disco permette infatti di affermare che lo spostamento radiale del disco, in corrispondenza di un raggio pari a quello dell'albero, è uguale allo spostamento radiale della superficie esterna dell'albero stesso, a distanza sufficientemente grande dal disco.

Per definizione stessa di allungamento relativo circonferenziale, questa uguaglianza può essere ricondotta all'uguaglianza di tali componenti di deformazione unitaria. Si deve dunque scrivere una relazione che affermi che l'allungamento relativo circonferenziale interno dell'(n-esimo) anello, il cui raggio interno uguaglia il raggio esterno dell'albero, sia uguale all'allungamento relativo circonferenziale esterno dell'albero:

$$\frac{1}{E_n} \left[\sigma_{ci_n}^I + k\sigma_{ci_n}^{II} - \nu_n (\sigma_{ri_n}^I + k\sigma_{ri_n}^{II}) \right] + \alpha_n \theta_{i_n} = \varepsilon_{ae}$$

Quale che sia la condizione al contorno prescelta, tutte le relazioni dianzi scritte permettono di determinare la costante k , cioè il coefficiente della combinazione lineare delle soluzioni che si riferiscono alle due fasi di tentativo nelle quali si articola il metodo di Grammel.

Determinata tale costante, sarà possibile in generale conoscere il corretto valore di tensione in qualsiasi punto interno agli anelli che compongono idealmente il disco in esame.