

Conviene quindi prendere in esame la possibilità di scrivere direttamente le funzioni di forma, tenendo conto di alcune proprietà generali delle stesse che devono essere soddisfatte.

Innanzitutto si osservi che, potendo essere scritta la relazione  $\Phi = \sum_i N_i \Phi_i$ , in corrispondenza del

generico nodo  $i$  deve essere  $N_i = 1$  ed  $N_j = 0$  per  $j \neq i$ .

Inoltre devono essere rispettate le considerazioni già svolte sugli andamenti della funzione di forma sui bordi dell'elemento, per garantire ancora la continuità con gli elementi adiacenti.

Si forniscono nella figura 5.8, a lato riportata, due esempi delle funzioni di forma per un elemento rettangolare ad otto nodi: esse si riferiscono al nodo 1 e a quello 3. Tali funzioni, nell'esempio specifico riportato, si possono pensare ottenute dal prodotto di una funzione lineare in  $x$  per una cubica in  $y$ .

Nella successiva indagine si mostra conveniente usare coordinate normalizzate. Esse sono mostrate nella figura 5.9 e vengono scelte in maniera che sugli spigoli del rettangolo, il loro valore sia  $\pm 1$ . Indicato dunque con  $C$  il centroide del rettangolo di lati  $2a$  e  $2b$ , tali coordinate normalizzate sono definite dalle relazioni seguenti:

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}$$

$$d\xi = \frac{dx}{a} \quad ; \quad d\eta = \frac{dy}{b}$$

Conosciute che siano le funzioni di forma in coordinate normalizzate, è semplice traslarle in coordinate globali o trasformare le varie espressioni che intervengono, ad esempio, nel calcolo della rigidezza.

Si considerino elementi rettangolari a quattro, otto, dodici nodi rispettivamente. Essi presenteranno rispettivamente due, tre, quattro nodi per lato. La variazione della funzione potrà essere, rispettivamente in ciascuno di essi, lineare, parabolica cubica.

Con riferimento al primo di tali elementi, la funzione di forma relativa al nodo superiore destro, di coordinate normalizzate  $(1, 1)$ , può essere espressa dal prodotto  $(\xi + 1) \cdot (\eta + 1)/4$ . Esso assume infatti il valore unitario in corrispondenza del nodo al quale si riferisce e valore nullo su tutti gli altri tre nodi dell'elemento, per i quali una almeno delle coordinate è uguale a  $-1$ . Inoltre la variazione lineare su ogni bordo assicura la continuità con gli elementi adiacenti.

E' possibile ottenere un'espressione del tutto generale per le quattro funzioni di forma che devono essere definite per l'elemento rettangolare a quattro nodi in esame, introducendo le variabili ausiliarie

$$\xi_o = \xi \cdot \xi_i \quad \text{e} \quad \eta_o = \eta \cdot \eta_i$$

Infatti il prodotto  $N_i = (1 + \xi_o) \cdot (1 + \eta_o)/4$  permette di esprimere la generica funzione di forma relativa al nodo  $i$ -esimo.

Dal momento che una qualsivoglia combinazione lineare di queste funzioni di forma produce un'espressione lineare, viene soddisfatto il secondo criterio di convergenza.

Per gli elementi ad otto e dodici nodi possono essere utilizzate espressioni quali quelle successivamente elencate:

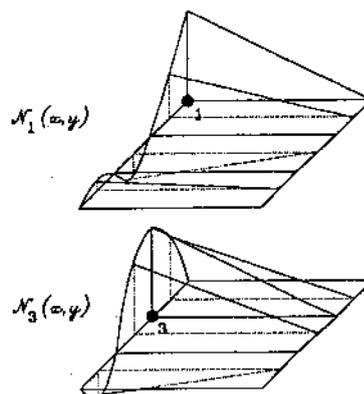


Fig. 5.8

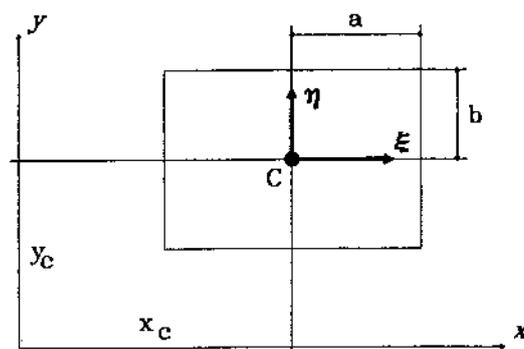


Fig. 5.9

| Elemento a funzione quadratica |  |
|--------------------------------|--|
| nodi d'angolo:                 | $N_i = (1 + \xi_0) \cdot (1 + \eta_0) \cdot (\xi_0 + \eta_0 - 1)/4$                              |
| nodi di mezzeria:              | $N_i = (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta_0)/2$ per $\xi_i = 0$   |
| e                              | $N_i = (1 - \eta^2) \cdot (1 + \xi_0)/2$ per $\eta_i = 0$  |
| Elemento a funzione cubica     |  |
| nodi d'angolo:                 | $N_i = (1 + \xi_0) \cdot (1 + \eta_0) \cdot [-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)]/32$                        |
| nodi intermedi:                | $N_i = 9(1 - \eta^2) \cdot (1 + \xi_0)(1 + 9\eta_0)/32$ per $\xi_i = \pm 1$ e $\eta_i = \pm 1/3$ |

con le rimanenti espressioni ottenute scambiando le variabili.

Per molteplici scopi pratici potrebbe essere necessario ideare elementi con differenti gradi di libertà nelle direzioni degli assi coordinati. Ciò può essere applicato, per esempio, dove la variazione di tensione in una direzione particolare è vincolata, essendo invece arbitraria nell'altra direzione, come tipicamente nelle travi.

### 5.2.9.3 Elementi rettangolari: famiglia di Lagrange.

Un metodo semplice e sistematico per generare funzioni di forma di ogni ordine può essere raggiunto col semplice prodotto di appropriate espressioni polinomiali nelle due coordinate.

Si consideri l'elemento rappresentato nella figura 5.10.

In esso una serie di nodi esterni ed interni viene collocata su di una griglia regolare  $(n+1) \times (m+1)$ .

Si voglia determinare una funzione di forma relativa al nodo annerito, corrispondente alla colonna  $i$  ed alla riga  $j$ .

Chiaramente soddisfa le condizioni di congruenza lungo i bordi dell'elemento la funzione che sia espressa dal prodotto di un polinomio di ordine  $n$  in  $\xi$ , che abbia un valore unitario nel punto annerito ed un valore nullo nei rimanenti nodi disposti sulla linea orizzontale, con un polinomio di ordine  $m$  in  $\eta$ , che abbia valore unitario ancora nel punto cerchiato e sia nullo sugli altri punti lungo la verticale.

Polinomi che godono della proprietà descritta sono noti come *polinomi di Lagrange* e possono essere scritti nella forma seguente:

$$P_i^n(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1) \cdot (\xi - \xi_2) \cdot \dots \cdot (\xi - \xi_{i-1}) \cdot (\xi - \xi_{i+1}) \cdot \dots \cdot (\xi - \xi_{n+1})}{(\xi_i - \xi_1) \cdot (\xi_i - \xi_2) \cdot \dots \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}) \cdot (\xi_i - \xi_{i+1}) \cdot \dots \cdot (\xi_i - \xi_{n+1})}$$

Così, se nell'elemento viene tracciata una maglia di nodi costituita da  $(n+1)$  colonne e  $(m+1)$  righe, la funzione di forma relativa al nodo posizionato nella  $i$ -esima colonna e  $j$ -esima riga risulta espressa dalla:

$$N_{ij}(\xi, \eta) = P_i^n(\xi) \cdot P_j^m(\eta)$$

Sebbene sia di facile generazione, questa famiglia di funzioni di forma mostra modesta utilità, non solo a causa del gran numero di nodi interni presenti, ma anche per le scarse capacità di interpolazione mostrate dai polinomi di ordine più elevato.

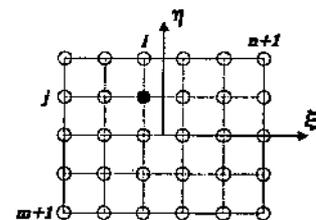


Fig. 5.10

### 5.2.9.4 Elementi tridimensionali parallelepipedi.

Con modalità analoghe a quanto discusso nel paragrafo 5.2.9.2, possono essere descritti elementi tridimensionali. In questo caso, comunque, devono essere modificate le regole che sono state date per garantire la congruenza fra elementi limitrofi. Ora è necessario che lungo un'intera faccia di un elemento i valori nodali siano sufficienti a definire in modo univoco una sola distribuzione della grandezza incognita. Ciò può essere assicurato solo con un controllo diretto operato sulla funzione di forma.

In questo caso sarà necessario riferirsi a tre coordinate normalizzate,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , e introducendo le variabili ausiliarie  $\xi_o = \xi \cdot \xi_i$ ,  $\eta_o = \eta \cdot \eta_i$ ,  $\zeta_o = \zeta \cdot \zeta_i$ , si ottengono le funzioni di forma seguenti:

| Elemento a funzione lineare ( 8 nodi )     |   |
|--|---|
|  | $N_i = (1 + \xi_o) \cdot (1 + \eta_o) \cdot (1 + \zeta_o) / 8$  |
| Elemento a funzione quadratica ( 20 nodi ) |   |
| nodi di vertice:                           | $N_i = (1 + \xi_o) \cdot (1 + \eta_o) \cdot (1 + \zeta_o) \cdot (\xi_o + \eta_o + \zeta_o - 2) / 8$   |
| nodi intermedi di spigolo:                 | $N_i = (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta_o) \cdot (1 + \zeta_o) / 4$<br>per $\xi_i = 0$ $\eta_i = \pm 1$ $\zeta_i = \pm 1$                            |
| Elemento a funzione cubica ( 32 nodi )     |   |
| nodi di vertice:                           | $N_i = (1 + \xi_o) \cdot (1 + \eta_o) \cdot (1 + \zeta_o) \cdot [-19 + 9(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)] / 64$                                       |
| nodi intermedi di spigolo:                 | $N_i = 9(1 - \xi^2) \cdot (1 + 9\xi_o) \cdot (1 + \eta_o) \cdot (1 + \zeta_o) / 64$<br>per $\xi_i = \pm 1/3$ $\eta_i = \pm 1$ $\zeta_i = \pm 1$ |

e analoghe relazioni, ottenute con semplice rotazione degli indici.

### 5.2.9.5 Elementi parallelepipedi: famiglia di Lagrange.

L'elemento tridimensionale può anche essere pensato ottenuto da una griglia nello spazio a tre dimensioni: una funzione di forma potrebbe essere ottenuta come prodotto di tre polinomi di Lagrange, ottenendo l'espressione seguente:

$$N_{ijl}(\xi, \eta, \zeta) = p_i^n(\xi) \cdot p_j^m(\eta) \cdot p_l^k(\zeta)$$

La precedente si riferisce ad un generico nodo della maglia che ha coordinate  $(\xi_i, \eta_j, \zeta_l)$ , essendo presenti  $(n+1)$  nodi nella direzione  $\xi$ ,  $(m+1)$  nodi nella direzione  $\eta$  e  $(k+1)$  nodi in quella  $\zeta$

### 5.2.9.6 Elementi isoparametrici curvi.

#### 5.2.9.6.1 Considerazioni generali

Nei precedenti paragrafi è stato discusso come ottenere alcune famiglie generali di elementi finiti. In esse ciascun membro è caratterizzato da un numero crescente di nodi e quindi da funzioni di forma di ordine via via superiore, consentendo maggiore precisione nella rappresentazione delle variazioni delle funzioni incognite e quindi permettendo, verosimilmente, l'uso di un numero decrescente di elementi, richiesto per ottenere un'adeguata soluzione del problema.

Purtuttavia si deve rilevare che, per assicurare che un modesto numero di elementi possa ben rappresentare una forma relativamente complessa quale può presentarsi in problemi reali, non sono più

sufficienti forme d'elemento geometricamente semplici quali quelle rettangolari o triangolari finora descritte, ad esempio, per il problema piano. Viene quindi brevemente trattato il tema su come distorcere tali semplici forme in altre di aspetto più complicato.

Elementi dei tipi di base mono, bi- e tridimensionali possono essere *mappati* in forme distorte, come indicato nella figura 5.11. In tale figura è mostrato che le coordinate normalizzate locali possono essere distorte in un nuovo riferimento curvilineo quando disegnate in uno spazio cartesiano.

Così operando, non solo elementi bidimensionali, definiti cioè in un sistema locale bidimensionale, possono essere distorti in altri a due dimensioni, ma la mappatura di questi può essere eseguita nelle tre dimensioni, ottenendo la trasformazione di elementi a piastra piana in elementi distorti in uno spazio tridimensionale.

Questi effetti possono essere ottenuti fornendo una qualche corrispondenza analitica fra le coordinate normalizzate e quelle cartesiane globali, con relazioni del tipo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \left( \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \right)$$

La funzione  $f$  definisce il processo analitico di *trasformazione di coordinate*.

Tale processo può essere eseguito con uso di *funzioni di forma*, di tipo analogo a quelle finora discusse per la rappresentazione della funzione incognita del problema, ad esempio il campo degli spostamenti. In un elemento ad  $n$  nodi si può infatti scrivere:

$$x = N_1^* \cdot x_1 + N_2^* \cdot x_2 + \dots + N_n^* \cdot x_n = [N^*] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

$$y = N_1^* \cdot y_1 + N_2^* \cdot y_2 + \dots + N_n^* \cdot y_n = [N^*] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}$$

$$z = N_1^* \cdot z_1 + N_2^* \cdot z_2 + \dots + N_n^* \cdot z_n = [N^*] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{Bmatrix}$$

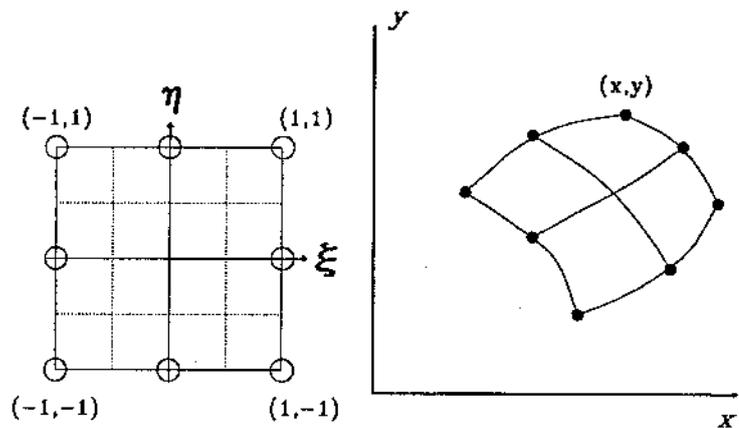


Fig. 5.11

Le funzioni di forma che costituiscono i termini della matrice  $[N^*]$  sono espresse in termini di coordinate locali normalizzate. I valori  $x_i, y_i, z_i$ , per  $i=1, 2, \dots, n$ , sono le coordinate cartesiane globali dei nodi collocati sul contorno dell'elemento.

Spesso ci si riferisce all'elemento base indistorto, definito nel sistema di riferimento delle coordinate locali normalizzate, come ad un elemento *genitore*.

Appurato che, con l'uso di una trasformazione basata su funzioni di forma, ogni elemento genitore *mappa* univocamente una parte dell'oggetto in studio, è importante verificare che la suddivisione di questo nei nuovi elementi a bordi curvi non lasci lacune o crei sovrapposizioni di materia. Ma, ricordando quanto già discusso nei paragrafi precedenti, ci si convince assai presto della validità del seguente teorema:

**Teorema 1** Se due elementi adiacenti sono generati da genitori per i quali le funzioni di forma soddisfano i requisiti di continuità, allora gli elementi distorti saranno collegati l'uno all'altro senza soluzione di continuità e senza sovrapposizioni.

Definita la forma geometrica dell'elemento tramite le funzioni di forma  $[N^*]$ , prima di poter stabilire le proprietà elastiche dell'elemento occorre specificare le variazioni della funzione incognita generica  $\Phi$ . Ciò può essere convenientemente espresso in termini di coordinate curvilinee normalizzate con la seguente espressione:  $\Phi = [N]\{\Phi\}^e$ , dove il vettore  $\{\Phi\}^e$  elenca i valori nodali della funzione incognita. E' valido, a tale proposito, il

**Teorema 2** Se le funzioni di forma  $[N]$ , relative alla generica funzione incognita, sono tali che è verificata la continuità nelle coordinate curvilinee normalizzate degli elementi genitori, allora i requisiti di continuità saranno soddisfatti anche negli elementi distorti generati mediante trasformazione di coordinate.

I valori nodali usati nella definizione delle variazioni della funzione incognita  $\Phi$  potranno essere o non essere riferiti agli stessi nodi usati per specificare la geometria dell'elemento distorto. Se vengono usati gli stessi nodi sia per la definizione della geometria che per la rappresentazione della funzione  $\Phi$ , l'elemento viene definito *isoparametrico* e si ottiene una coincidenza della forma analitica con la quale vengono rappresentate le funzioni di forma:  $[N^*]=[N]$ .

#### 5.2.9.6.2 Valutazione delle matrici d'elemento.

Per sviluppare l'analisi agli elementi finiti devono essere calcolate le matrici che definiscono le proprietà dell'elemento, ad esempio, la matrice di rigidezza ed i vettori delle forze nodali d'elemento, equivalenti al carico distribuito ed alle deformazioni e tensioni iniziali.

In generale avremo espressioni matriciali del tipo:  $\int_V [G] dV$ .

Nel precedente integrale, la matrice  $[G]$  dipende dalla matrice delle funzioni di forma o dalla matrice di deformazione, i cui termini, come già visto, dipendono dalle derivate delle funzioni di forma, rispetto alle coordinate cartesiane globali. Infatti, come esempio, ricordiamo le due espressioni della matrice di rigidezza e del vettore forze nodali equivalenti al carico distribuito:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \text{e} \quad \{F_p\} = \int_V [N]^T \{p\} dV$$

Ricordiamo ancora che la matrice di deformazione  $[B]$  può essere espressa in termini di sottomatrici, e la singola sottomatrice assume l'aspetto seguente, riferendosi per semplicità al problema piano:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

In un calcolo sistematico, da sviluppare elemento per elemento, la valutazione delle matrici d'elemento può essere semplificata, se sviluppata nel riferimento delle coordinate locali normalizzate. E ciò viene ottenuto mediante due trasformazioni.

La prima di esse è relativa al calcolo delle derivate parziali che compaiono in [B], essa infatti si rende necessaria giacché le derivate sono calcolate rispetto alle coordinate cartesiane globali, come ricordato in precedenza, mentre le funzioni di forma  $N_i$  sono assai comodamente espresse in termini di coordinate locali curvilinee normalizzate.

La seconda trasformazione riguarda le variabili di integrazione: il volume elementare  $dV$  deve infatti essere espresso in termini di coordinate normalizzate e l'integrazione dovrà essere eseguita nello spazio di quest'ultime con un appropriato cambiamento degli estremi di integrazione.

E' noto che si può scrivere

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

Sviluppando le analoghe derivate rispetto a  $\eta$  e  $\zeta$  e scrivendo in forma matriciale, si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

Nella precedente relazione, disponendo delle espressioni analitiche delle funzioni di forma  $N_i$  nelle coordinate locali normalizzate  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , è possibile calcolare i termini del vettore a sinistra. Inoltre, essendo le  $x$ ,  $y$  e  $z$  espresse in funzione delle coordinate normalizzate tramite le funzioni  $N_i^*$ , anche la matrice [J] può essere espressa in termini delle coordinate normalizzate.

Questa matrice è conosciuta come matrice **Jacobiana**: i suoi termini sono dati dalle derivate rispetto alle coordinate normalizzate delle funzioni di forma  $N_i^*$ , che definiscono la geometria dell'elemento. Invertendo la matrice Jacobiana, si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

Per trasformare infine le variabili e la regione rispetto alle quali viene eseguita l'integrazione viene adottato un procedimento generale che si avvale del determinante della matrice Jacobiana. Così il volume elementare viene espresso come  $dx \cdot dy \cdot dz = \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$ .

Con tali trasformazioni, la matrice di elemento può essere calcolata tramite integrali del tipo:

$$\int_V [G] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [G^*(\xi, \eta, \zeta)] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$$

Analogamente per problemi mono e bidimensionali.

Con eccezione per gli elementi più semplici, l'integrazione analitica è a volte assai complessa, a volte impossibile. Generalmente dunque si ricorre ad una integrazione numerica, approntando programmi di calcolo del tutto generali.

### 5.2.9.6.3 Integrazione numerica.

Già nei precedenti paragrafi, trattando del pur semplice problema degli elementi triangolari assialsimmetrici con funzioni di forma lineari, fu notato che l'integrazione analitica delle espressioni per le matrici di elemento poteva dare dei problemi di calcolo numerico e che dunque poteva mostrarsi più conveniente l'uso di integrazioni di tipo numerico, in genere d'obbligo per i più complicati elementi *distorti* appena discussi.

Riassumendo brevemente l'argomento, possono individuarsi due diversi tipo di integrazione numerica di una funzione, ad esempio di una variabile,  $f(\xi)$ .

#### 5.2.9.6.3.1 Quadratura di Newton-Cotes.

Il procedimento consiste nel fissare *a priori* gli  $n$  punti in corrispondenza dei quali deve essere valutata la funzione  $f(\xi)$ : essi vengono usualmente scelti uniformemente intervallati. Viene successivamente determinato il polinomio di ordine  $n-1$  che passa per i punti prescelti della funzione e quindi viene integrato analiticamente: tale integrale approssima l'integrale della funzione  $f(\xi)$ . Si ottengono così le note formule di *quadratura* di Newton-Cotes, nelle quali l'integrale viene sostituito dalla sommatoria seguente:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i)$$

Ad esempio, otteniamo:

$$n = 2 \quad I = f(-1) + f(1)$$

$$n = 3 \quad I = \frac{f(-1) + 4f(0) + f(1)}{3}$$

$$n = 4 \quad I = \frac{f(-1) + 3f(-\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)}{4}$$

#### 5.2.9.6.3.2 Quadratura di Gauss.

Se invece di specificare *a priori* la posizione dei punti di campionamento, permettiamo a questi di collocarsi nelle posizioni che opportuni calcoli mostrano essere le più efficaci agli effetti della precisione del calcolo dell'integrale, otterremo la precisione più elevata, assegnato che sia un certo numero di punti di campionamento.

Questo procedimento di ricerca di *ottimo* conduce ad espressioni numeriche ancora del tipo:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j)$$

ove gli  $H_j$  vengono definiti *coefficienti di peso*.

Le formule di quadratura di Gauss forniscono:

$$\text{per } n = 2 \quad I = f(-0.577) + f(0.577)$$

$$\text{per } n = 3 \quad I = 0.56 \cdot f(-0.775) + 0.89 \cdot f(0) + 0.56 \cdot f(0.775)$$

$$\text{per } n = 4 \quad I = 0.35 \cdot f(-0.86) + 0.65 \cdot f(-0.34) + 0.65 \cdot f(0.34) + 0.53 \cdot f(0.86)$$

#### 5.2.9.6.3.3 Integrazioni numeriche su regioni rettangolari o a prisma retto.

La maniera più ovvia di ottenere l'integrale doppio  $I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \cdot dx \cdot dy$ , relativo ad una regione rettangolare, è quella di valutare dapprima l'integrale interno conservando costante la variabile  $\eta$ , cioè:

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_{j=1}^n H_j \cdot f(\xi_j, \eta) = \Omega(\eta)$$

Quindi si valuta l'integrale esterno come integrale della funzione  $\Omega(\eta)$ :

$$I = \int_{-1}^1 \Omega(\eta) \cdot d\eta = \sum_{i=1}^n H_i \cdot \Omega(\eta_i) = \sum_{i=1}^n H_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n H_j \cdot f(\xi_j, \eta_i) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i \cdot H_j \cdot f(\xi_j, \eta_i)$$

Analogamente per una regione prismatica retta otteniamo:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n H_m \cdot H_j \cdot H_i \cdot f(\xi_m, \eta_j, \zeta_i)$$

E' interessante notare che di fatto la doppia sommatoria può essere facilmente interpretata come una singola sommatoria su (n x n) punti della regione rettangolare o su (n x n x n) punti del prisma retto.

Chiaramente non è necessario l'uso dello stesso numero n di punti di integrazione nelle direzioni delle coordinate normalizzate: all'occorrenza può essere vantaggioso l'uso di numeri differenti.

### 5.3 Inversione della matrice di rigidezza.

#### 5.3.1 Triangolarizzazione di Gauss.

Il sistema finale delle n equazioni in n incognite, ottenuto a seguito dell'assemblaggio della matrice di rigidezza globale e dei vettori dei carichi nodali equivalenti, ha un aspetto quale quello di seguito mostrato:

$$\begin{aligned} k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + \dots + k_{1,n-1}x_{n-1} + k_{1,n}x_n &= r_1 \\ k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + \dots + k_{2,n-1}x_{n-1} + k_{2,n}x_n &= r_2 \\ k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3 + \dots + k_{3,n-1}x_{n-1} + k_{3,n}x_n &= r_3 \\ \dots & \\ k_{n-1,1}x_1 + k_{n-1,2}x_2 + k_{n-1,3}x_3 + \dots + k_{n-1,n-1}x_{n-1} + k_{n-1,n}x_n &= r_{n-1} \\ k_{n,1}x_1 + k_{n,2}x_2 + k_{n,3}x_3 + \dots + k_{n,n-1}x_{n-1} + k_{n,n}x_n &= r_n \end{aligned}$$

E' noto che una generica equazione del sistema può essere sostituita da una combinazione lineare delle altre. Il metodo risolutivo della triangolarizzazione della matrice di rigidezza, di largo impiego nel calcolo automatico, si avvale del principio precedentemente enunciato. Esso passa per n-1 fasi, in ciascuna delle quali vengono annullati i coefficienti al disotto della diagonale principale appartenenti ad una singola colonna, a partire dalla prima di esse.

Più in dettaglio, nella prima di queste fasi, vengono annullati dalla seconda riga in poi i coefficienti della prima variabile, sostituendo alla i-esima equazione (per i=2,3,...n) quella che si ottiene sottraendo alla medesima la prima equazione moltiplicata per il fattore  $q_i = \frac{k_{i,1}}{k_{11}}$ . Così, ad esempio, nella seconda equazione i coefficienti e relativo termine noto vengono alterati come segue:

$$k'_{21} = k_{21} - k_{11} \cdot \frac{k_{21}}{k_{11}} = 0 \quad k'_{22} = k_{22} - k_{12} \cdot \frac{k_{21}}{k_{11}} \neq 0 \quad \dots \quad k'_{2n} = k_{2n} - k_{1,n} \cdot \frac{k_{21}}{k_{11}} \neq 0 \quad r'_2 = r_2 - r_1 \cdot \frac{k_{21}}{k_{11}} \neq 0$$

E così via per le altre equazioni fino alla n-esima:

$$k'_{n,1} = k_{n,1} - k_{11} \cdot \frac{k_{n,1}}{k_{11}} = 0 \quad k'_{n,2} = k_{n,2} - k_{12} \cdot \frac{k_{n,1}}{k_{11}} \neq 0 \quad \dots \quad k'_{n,n} = k_{n,n} - k_{1,n} \cdot \frac{k_{n,1}}{k_{11}} \neq 0 \quad r'_n = r_n - r_1 \cdot \frac{k_{n,1}}{k_{11}} \neq 0$$

Al termine dunque di questa prima fase si ottiene, dalla seconda equazione in poi, un sistema di equazioni [(n-1)x(n-1)], come appresso rappresentato:

$$\begin{aligned}
 k'_{22}x_2 + k'_{23}x_3 + \dots + k'_{2,n-1}x_{n-1} + k'_{2,n}x_n &= r'_2 \\
 k'_{32}x_2 + k'_{33}x_3 + \dots + k'_{3,n-1}x_{n-1} + k'_{3,n}x_n &= r'_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 k'_{n-1,2}x_2 + k'_{n-1,3}x_3 + \dots + k'_{n-1,n-1}x_{n-1} + k'_{n-1,n}x_n &= r'_{n-1} \\
 k'_{n,2}x_2 + k'_{n,3}x_3 + \dots + k'_{n,n-1}x_{n-1} + k'_{n,n}x_n &= r'_n
 \end{aligned}$$

Esso può subire, nella seconda fase, lo stesso trattamento del precedente. E cioè si sostituisce ad ogni sua equazione, a partire dalla seconda, quella ottenuta sottraendo alla medesima la prima, moltiplicata per il fattore  $q'_1 = \frac{k'_{12}}{k'_{22}}$ . In tale fase si ottiene:

$$k''_{32} = k'_{32} - k'_{22} \cdot \frac{k'_{12}}{k'_{22}} = 0 \quad k''_{33} = k'_{33} - k'_{23} \cdot \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \neq 0 \quad \dots \quad k''_{3,n} = k'_{3,n} - k'_{2,n} \cdot \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \neq 0 \quad r''_3 = r'_3 - r'_2 \cdot \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \neq 0$$

E così via fino all'ultima equazione, per la quale si ha:

$$k''_{n,2} = k'_{n,2} - k'_{22} \cdot \frac{k'_{12}}{k'_{22}} = 0 \quad k''_{n,3} = k'_{n,3} - k'_{23} \cdot \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \neq 0 \quad \dots \quad k''_{n,n} = k'_{n,n} - k'_{2,n} \cdot \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \neq 0 \quad r''_n = r'_n - r'_2 \cdot \frac{k'_{12}}{k'_{22}} \neq 0$$

Al termine delle n-1 fasi si ottiene così il seguente sistema:

$$\begin{aligned}
 k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + \dots + k_{1,n-1}x_{n-1} + k_{1,n}x_n &= r_1 \\
 k'_{22}x_2 + k'_{23}x_3 + \dots + k'_{2,n-1}x_{n-1} + k'_{2,n}x_n &= r'_2 \\
 k''_{33}x_3 + \dots + k''_{3,n-1}x_{n-1} + k''_{3,n}x_n &= r''_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 k^{n-2}_{n-1,n-1}x_{n-1} + k^{n-2}_{n-1,n}x_n &= r^{n-2}_{n-1} \\
 k^{n-1}_{n,n}x_n &= r^{n-1}_n
 \end{aligned}$$

Il procedimento descritto richiede che il denominatore (detto *pivot*) del fattore  $q_i$  sia, per ogni fase, diverso da zero. Se ciò non accadesse si può tentare di scambiare l'ordine delle equazioni, alla ricerca di un pivot non nullo.

**5.3.2 Soluzione a ritroso.**

L'ultima equazione del sistema triangolarizzato può essere assai facilmente risolta, giacchè in essa è presente un'unica incognita. La soluzione fornisce la seguente relazione:

$$x_n = \frac{r^{n-1}_n}{k^{n-1}_{n,n}}$$

Questa soluzione, introdotta nella penultima equazione, consente di risolvere la penultima incognita:

$$x_{n-1} = \frac{r^{n-2}_{n-1} - k^{n-2}_{n-1,n}x_n}{k^{n-2}_{n-1,n-1}}$$

E così via fino alla  $x_1$ .