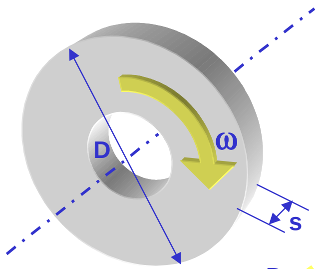
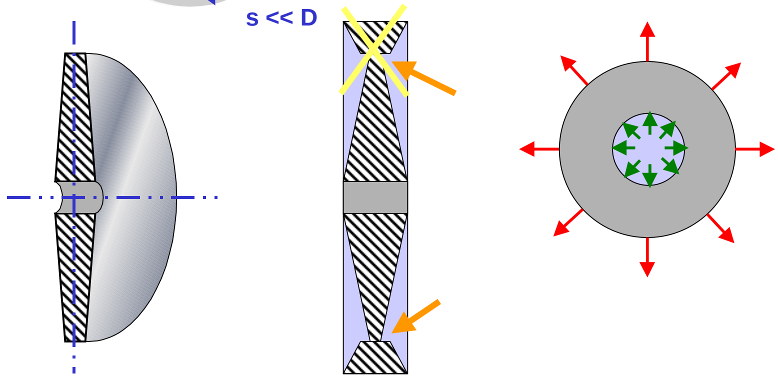
Solidi assialsimmetrici - Dischi

Solidi assialsimmetrici - Dischi

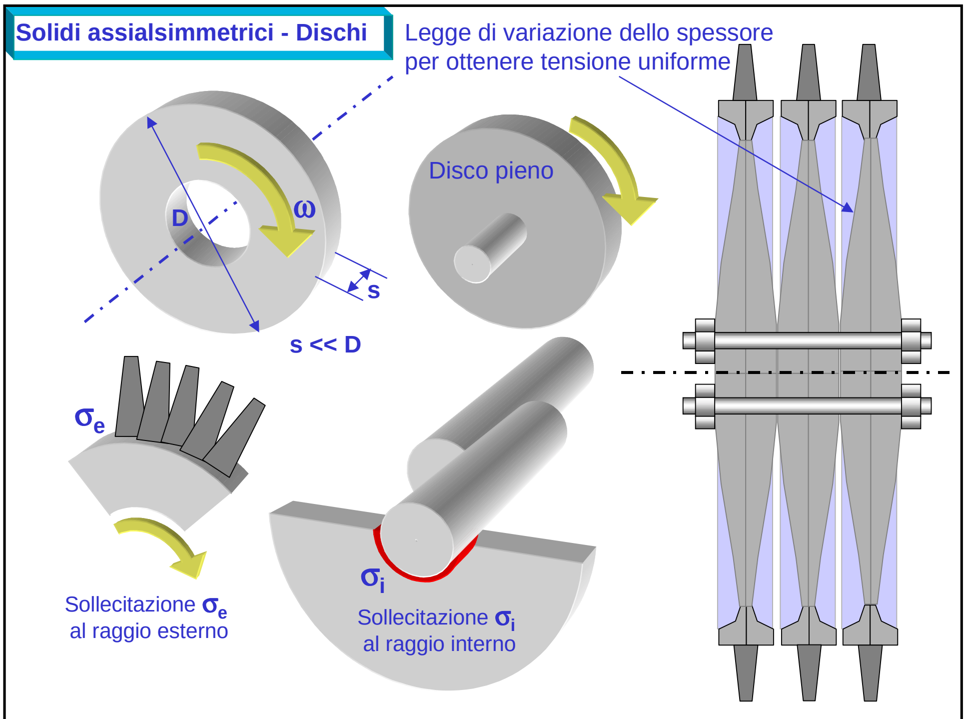


Caratteristiche dei dischi

- Simmetria assiale
- Piano diametrale di simmetria
- Basso rapporto spessore / diametro
- Assenza di brusche variazioni di spessore
- Carichi radiali e assialsimmetrici

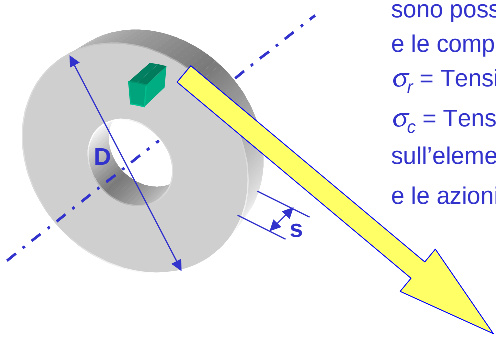


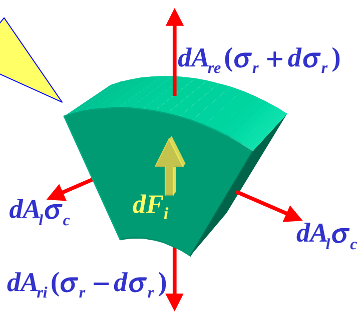
Solidi assialsimmetrici - Dischi



Solidi assialsimmetrici - Dischi

In base alle ipotesi fatte
sono possibili solo spostamenti radiali $\Rightarrow u$
e le componenti di tensione sono:
σ_r = Tensione radiale
σ_c = Tensione circonferenziale
sull'elementino agiranno le forze di continuità
e le azioni inerziali:



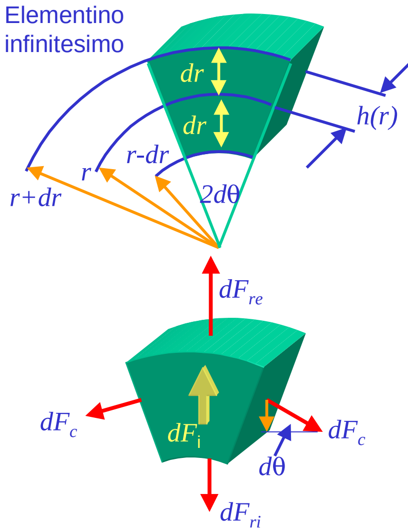


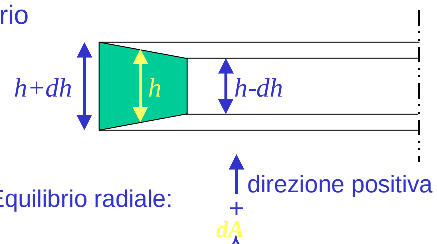
Consideriamo un
elementino infinitesimo dV

$$dF_i = ma \;\; = \rho \; dV \; \omega^2 r$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Equilibrio





Equilibrio radiale:

$$dF_{re} = (\sigma_r + d\sigma_r)\overbrace{(h+dh)(r+dr)2d\theta}^{dA}$$
$$dF_{ri} = (\sigma_r - d\sigma_r)(h-dh)(r-dr)2d\theta$$
$$dF_c = \sigma_c\, 2dr\, h \sin(d\theta) \quad \cong 2\sigma_c\, h\, dr\, d\theta$$
$$dF_i = \rho\, \underbrace{h\, 2dr\, 2d\theta}_{dV}\, \omega^2 r \quad = 4\rho\omega^2 r^2\, h\, dr\, d\theta$$

$$\sum dF = 0 \Rightarrow dF_{re} - dF_{ri} - 2dF_c + dF_i = 0$$

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(h+dh)(r+dr)2d\theta - (\sigma_r - d\sigma_r)(h-dh)(r-dr)2d\theta +$$
$$-4\sigma_c\, h\, dr\, d\theta + 4\rho\omega^2 r^2\, h\, dr\, d\theta = 0$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(h+dh)(r+dr)2\cancel{d\theta} - (\sigma_r - d\sigma_r)(h-dh)(r-dr)2\cancel{d\theta} +$$
$$-4\sigma_c\, h\, dr\, \cancel{d\theta} + 4\rho\omega^2 r^2\, h\, dr\, \cancel{d\theta} = 0$$

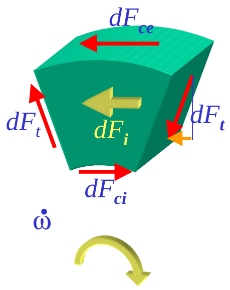
Come era prevedibile l'angolo θ è ininfluente

Sviluppando i prodotti e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene:

$$\frac{d}{dr}(r h \sigma_r) - \sigma_c h + \rho\omega^2 r^2 h = 0$$

Prendiamo ora in considerazione l'equilibrio circonferenziale del disco quando è sottoposto ad una accelerazione angolare.

Analogamente a quanto fatto nel caso precedente si può scrivere:



$$dF_{ce} = (\tau_{rc} + d\tau_{rc})(h+dh)(r+dr)2d\theta$$
$$dF_{ci} = (\tau_{rc} - d\tau_{rc})(h-dh)(r-dr)2d\theta$$
$$dF_c = \tau_{rc}\, h\, 2dr \sin(d\theta)$$
$$dF_i = 4r^2\rho\dot{\omega}\, dr\, d\theta$$

che conduce alla seguente equazione:

$$\frac{d}{dr}(r h \tau_{rc}) - h\tau_{rc} + \rho\dot{\omega} r^2 h = 0$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Riepilogando:

Dall'equilibrio radiale, con velocità angolare costante, si ottiene l'equazione:

$$\frac{d}{dr}(r\,h\sigma_r)-\sigma_c h+\rho\,\omega^2 r^2 h=0$$

Dall'equilibrio circonferenziale, con accelerazione angolare,
si ottiene l'equazione

$$\frac{d}{dr}(r\,h\tau_{rc})-h\tau_{rc}+\rho\,\dot{\omega}\,r^2 h=0$$

Le due equazioni di equilibrio sono completamente indipendenti,
le soluzioni, pertanto, possono essere studiate separatamente.

In particolare, in assenza di accelerazione angolare
ed in presenza di carichi puramente radiali,
la seconda equazione fornisce la soluzione banale:

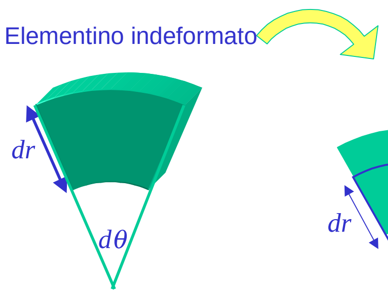
$$\tau_{rc}=0$$

In tale situazione, di conseguenza, le tensioni σ_r e σ_c sono principali.

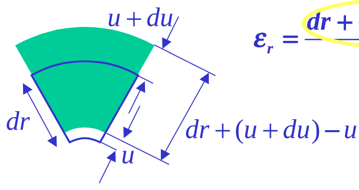
Solidi assialsimmetrici - Dischi

Congruenza

$$\boxed{\varepsilon=\frac{l_1-l_0}{l_0}}$$

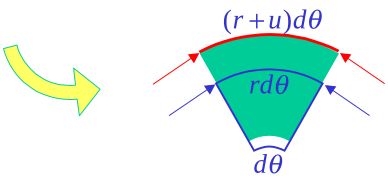


Dopo deformazione



Deformazione radiale

$$\varepsilon_r=\frac{\underbrace{dr+(u+du)-u}_{l_1}-\underbrace{dr}_{l_0}}{dr}=\frac{du}{dr}$$



Deformazione circonferenziale

$$\varepsilon_c=\frac{(r+u)\,d\theta-r\,d\theta}{r\,d\theta}=\frac{u}{r}$$

$$u=\varepsilon_c\,r$$

$$\varepsilon_r=\frac{du}{dr}=\frac{d}{dr}(\varepsilon_c\,r)\quad\Rightarrow\quad\varepsilon_r=\varepsilon_c+r\frac{d\varepsilon_c}{dr}$$

Equazione di congruenza

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Congruenza

$$\varepsilon_r = \varepsilon_c + r\frac{d\varepsilon_c}{dr}$$

L'equazione di congruenza può essere riscritta esprimendo le deformazioni in termini di tensioni, tramite le relazioni di Hooke, e considerando l'effetto della variazione di temperatura

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_c) + \alpha\,T$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{E}(\sigma_c - \nu\,\sigma_r) + \alpha\,T$$

dove con T si intende la differenza $T\text{-}T_0$ essendo T_0 la temperatura di riferimento della configurazione indeformata

$$\frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\,\sigma_c) + \alpha T = \frac{1}{E}(\sigma_c - \nu\,\sigma_r) + \alpha T + \frac{r}{E}\frac{d}{dr}(\sigma_c - \nu\,\sigma_r) + r\frac{d(\alpha T)}{dr}$$

che può essere riscritta nella forma più compatta:

$$(1+\nu)(\sigma_c - \sigma_r) + r\frac{d}{dr}(\sigma_c - \nu\,\sigma_r) + E\,r\frac{d}{dr}(\alpha\,T) = 0$$

se la variazione di temperatura nel disco non è tale da comportare una significativa variazione del coefficiente di dilatazione termica, allora α può essere considerato indipendente dal raggio:

$$(1+\nu)(\sigma_c - \sigma_r) + r\frac{d}{dr}(\sigma_c - \nu\,\sigma_r) + E\,\alpha\,r\frac{dT}{dr} = 0$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Oltre l'equazione di equilibrio $\frac{d}{dr}(r\,h\sigma_r) - h\sigma_c + \rho\,\omega^2 r^2 h = 0$

e quella di congruenza $(1+\nu)(\sigma_c - \sigma_r) + r\frac{d}{dr}(\sigma_c - \nu\,\sigma_r) + E\,\alpha\,r\frac{dT}{dr} = 0$

è necessario introdurre anche l'equazione di resistenza, per avere uno strumento di progetto o verifica del disco.

Se si utilizza l'ipotesi di resistenza di Von Mises è possibile esprimere la tensione equivalente nella forma:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_c^2 - \sigma_r\sigma_c} = \sigma_a$$

essendo σ_a la tensione ammissibile del materiale

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi ad uniforme sollecitazione

Dalle equazioni precedenti è possibile ricavare la legge di variazione dello spessore con il raggio che rende la sollecitazione uniforme su tutto il disco.

Si ammetta l'ipotesi: disco pieno a temperatura uniforme.

Dall'equazione di congruenza si ricava:

$$(1+\nu)(\sigma_c-\sigma_r)+r\,\cancel{\frac{d}{dr}(\sigma_c-\nu\,\sigma_r)}+E\,\alpha\,r\,\cancel{\frac{dT}{dr}}=0$$

da cui si ottiene: $\Rightarrow$ $\sigma_c = \sigma_r$

e dall'eq. di resistenza $\Rightarrow$ $\sigma_c = \sigma_r = \sigma_a$

Dalla equazione di equilibrio

$$\frac{d}{dr}(r\,h\sigma_r)-h\sigma_c+\rho\,\omega^2r^2h=0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dr}(rh)-h+\frac{\rho\omega^2r^2h}{\sigma_a} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; r\frac{dh}{dr}+\cancel{h}-\cancel{h}+\frac{\rho\omega^2r^2h}{\sigma_a}=0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{dh}{dr}=-h\frac{\rho\omega^2}{\sigma_a}r}$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi ad uniforme sollecitazione

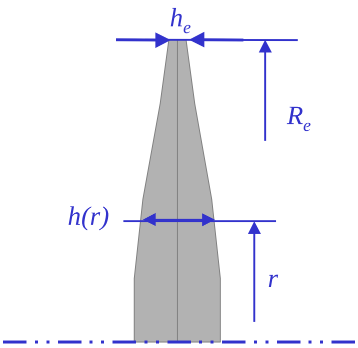
separando le variabili: $\dfrac{dh}{h}=-\dfrac{\rho\,\omega^2}{\sigma_a}r\,dr$

da cui, integrando tra il raggio esterno e un raggio qualsiasi, si ha:

$$\ln\left(\frac{h_e}{h(r)}\right)=-\frac{\rho\,\omega^2}{2\sigma_a}\left(R_e^2-r^2\right)$$

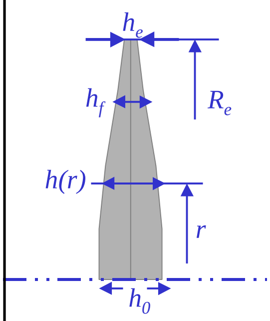
$$\Downarrow$$

$$\boxed{h(r)=h_e\;e^{\frac{\rho\,\omega^2}{2\sigma_a}\left(R_e^2-r^2\right)}}$$



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi ad uniforme sollecitazione



Le derivate della funzione $h(r)$ forniscono indicazioni sulla posizione del punto di massimo spessore e del punto di flesso:

La forma della derivata prima di $h(r)$ è già nota:

$$\frac{dh}{dr} = -h\frac{\rho\omega^2}{\sigma_a} r$$

e la derivata seconda è data da:

$$\frac{d^2h}{dr^2} = -h\frac{\rho\omega^2}{\sigma_a}\left(1 - \frac{\rho\omega^2}{\sigma_a} r^2\right)$$

In corrispondenza del raggio $r=0$, si ottiene l'annullamento della derivata prima, mentre la seconda è minore di zero.

Lo spessore massimo si ottiene sull'asse del disco, dove assume il valore:

$$\boxed{h_0 = h_e\, e^{\frac{\rho\omega^2}{2\sigma_a} R_e^2}}$$

La derivata seconda si annulla per: $r = r_f = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho}}$

in corrispondenza del quale lo spessore del disco vale:

$$\boxed{h = h_f = \frac{h_0}{\sqrt{e}} = 0.606 h_0}$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

Nel caso di disco a spessore costante, sia pieno che forato, è possibile ottenere una soluzione in forma chiusa del problema.

Se h è indipendente dal raggio l'equazione di equilibrio si semplifica:

$$\frac{d}{dr}(r h \sigma_r) - h\sigma_c + \rho\omega^2 r^2 h = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cancel{h}\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \cancel{h}\sigma_c + \rho\omega^2 r^2 \cancel{h} = 0$$

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_c + \rho\omega^2 r^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_c = \sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} + \rho\omega^2 r^2$$

Da cui è possibile ricavare la derivata: $\frac{d\sigma_c}{dr} = r\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 2\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\rho\omega^2 r$

La relazione tra σ_c e σ_r, fornita dall'equazione di equilibrio, può essere sfruttata per esprimere l'equazione di congruenza:

$$(1+\nu)(\sigma_c - \sigma_r) + r\frac{d}{dr}(\sigma_c - \nu\sigma_r) + E\alpha r\frac{dT}{dr} = 0$$

solo in termini di σ_r

Sostituendo, quindi, σ_c e $\frac{d\sigma_c}{dr}$ nell'equazione precedente si ottiene:

$$r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3r\frac{d\sigma_r}{dr} + (3+\nu)\rho\omega^2 r^2 + E\alpha r\frac{dT}{dr} = 0$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

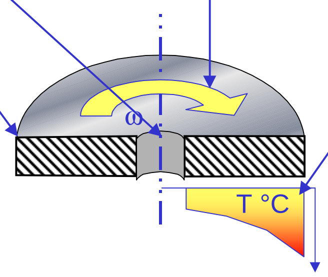
L’equazione differenziale descrive lo stato di tensione
in un disco a spessore uniforme, rotante e soggetto a gradiente termico.

$$\underbrace{r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3r\frac{d\sigma_r}{dr}}+\underbrace{(3+\nu)\rho\,\omega^2 r^2}+\underbrace{E\,\alpha\, r\frac{dT}{dr}}=0$$

Omogenea associata.
Descrive lo stato di tensione del disco
dovuto alle condizioni al contorno:
pressione esterna ed interna

Tiene conto degli effetti inerziali

Tiene conto dell’effetto
del gradiente termico
sullo stato tensionale



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

L’integrale dell’omogenea associata: $r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3r\frac{d\sigma_r}{dr}=0$ è del tipo: $\sigma_r = B\,r^n$

Calcolando le derivate ed introducendole nell’equazione differenziale si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\sigma_r}{dr}&=n\,B\,r^{n-1}\\ \frac{d^2\sigma_r}{dr^2}&=n(n-1)B\,r^{n-2}\end{aligned}\right\}\; n(n-1)B\,r^n+3n\,B\,r^n=0 \;\Longrightarrow\; B\,r^n[n(n+2)]=0$$

che ha soluzione
per i valori di n: $n=0$ $\quad n=-2$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\sigma_r = B_1+\frac{B_2}{r^2}}$

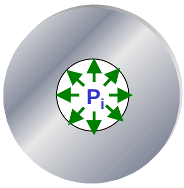
Ricordando che: $\sigma_c = \sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\sigma_c = B_1-\frac{B_2}{r^2}}$

Imponendo le condizioni al contorno si calcolano le due costanti B_1 e B_2
che consentono di determinare lo stato tensionale nel disco.

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

Disco forato fermo, soggetto a pressione interna.



Condizioni al contorno: $r = R_i \Rightarrow \sigma_r = -P_i$

$r = R_e \Rightarrow \sigma_r = 0$

ricordando che: $\sigma_r = B_1 + \dfrac{B_2}{r^2} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = B_1 + \dfrac{B_2}{R_e^2} \\ -P_i = B_1 + \dfrac{B_2}{R_i^2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B_1 = P_i \dfrac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ B_2 = -P_i \dfrac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{array}$$

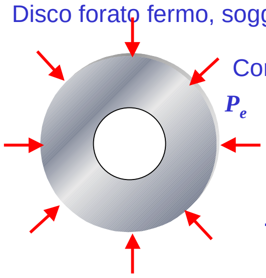
Dai valori delle costanti si ottengono le componenti radiale e circonferenziale della tensione:

$$\sigma_r = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 - \frac{R_e^2}{r^2}\right) \qquad \sigma_c = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 + \frac{R_e^2}{r^2}\right)$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

Disco forato fermo, soggetto a pressione esterna.



Condizioni al contorno: $r = R_e \Rightarrow \sigma_r = -P_e$

$r = R_i \Rightarrow \sigma_r = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -P_e = B_1 + \dfrac{B_2}{R_e^2} \\ 0 = B_1 + \dfrac{B_2}{R_i^2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} B_1 = -P_e \dfrac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ B_2 = P_e \dfrac{R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{array}$$

Dai valori delle costanti si ottengono le componenti radiale e circonferenziale della tensione:

$$\sigma_r = \frac{P_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(\frac{R_i^2}{r^2} - 1\right) \qquad \sigma_c = -\frac{P_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(\frac{R_i^2}{r^2} + 1\right)$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

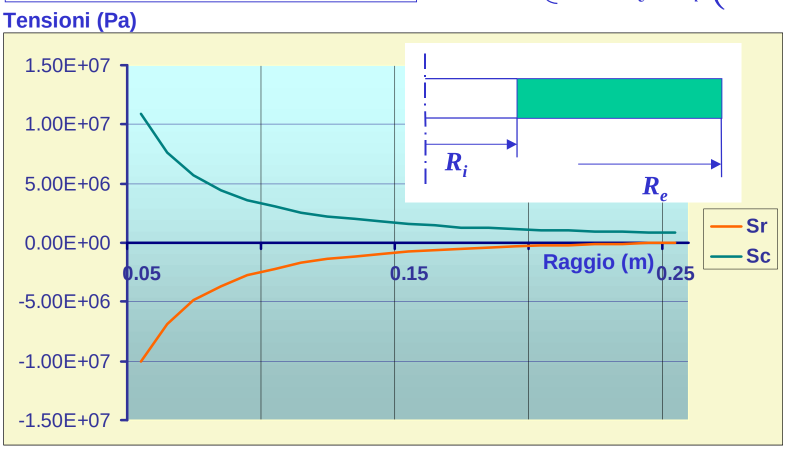
Dischi a spessore uniforme: casi particolari

Le equazioni ricavate nel caso di pressione interna:
consentono di calcolare l'andamento delle tensioni in funzione del raggio.

Il grafico riporta tali andamenti nel caso:

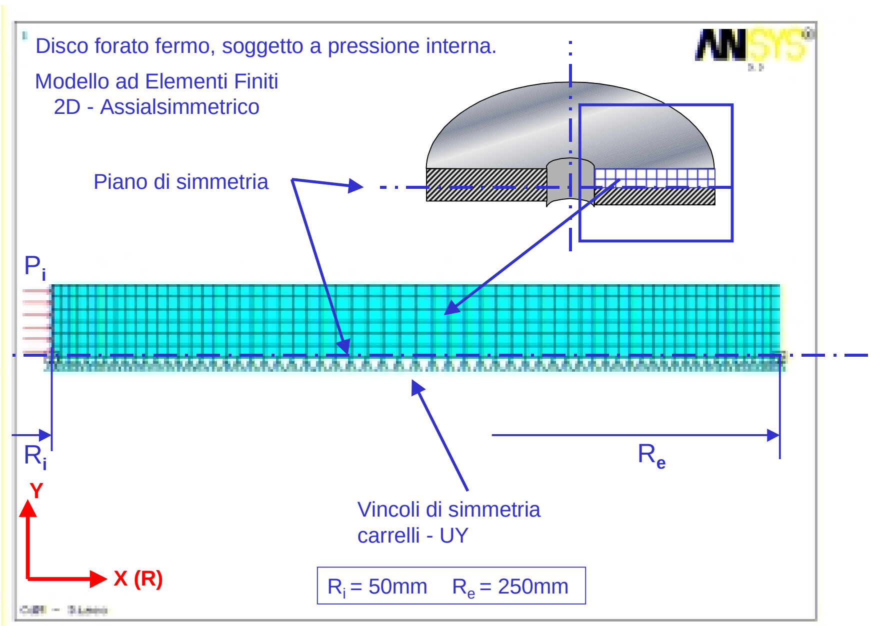
$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 - \dfrac{R_e^2}{r^2}\right) \\ \sigma_c = \dfrac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 + \dfrac{R_e^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

R_i = 50mm R_e = 250mm P_i = 10 MPa



Solidi assialsimmetrici - Dischi

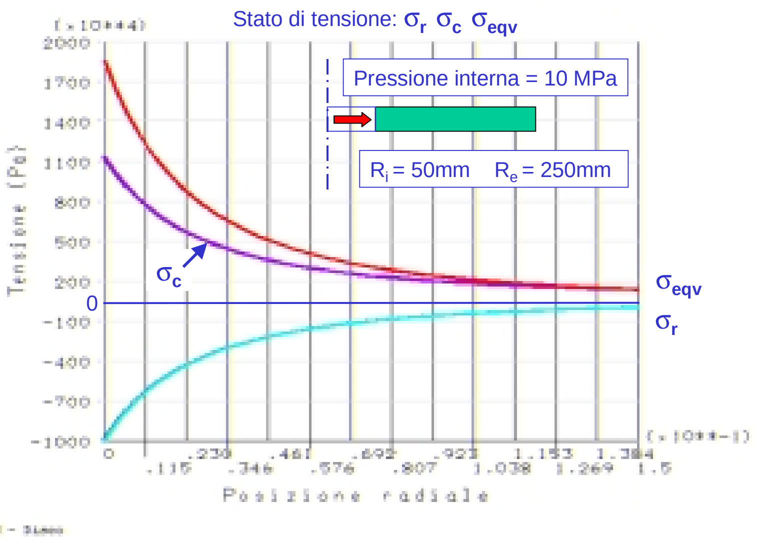
Dischi a spessore uniforme: casi particolari



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari

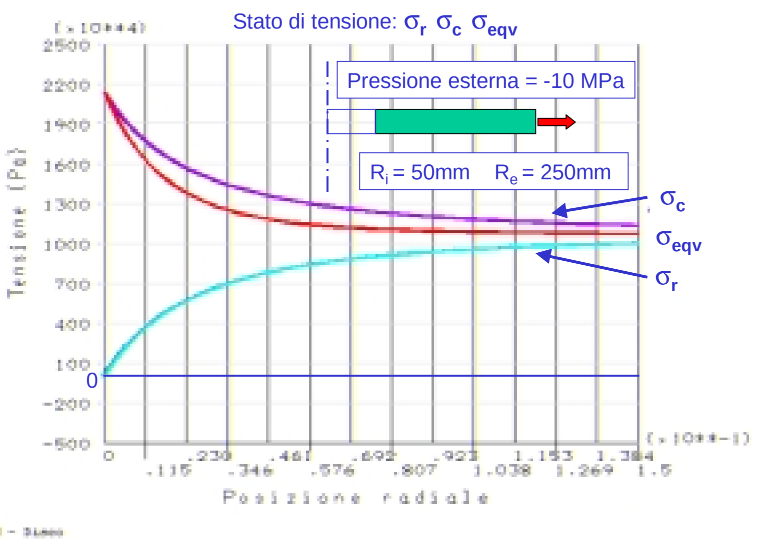
Disco forato fermo, soggetto a pressione interna.



Solidi assialsimmetrici - Dischi

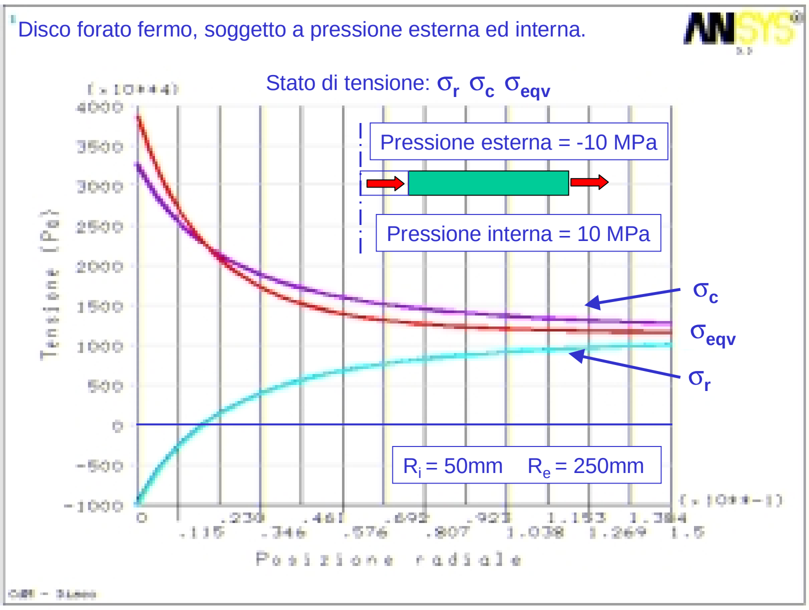
Dischi a spessore uniforme: casi particolari

Disco forato fermo, soggetto a pressione esterna.



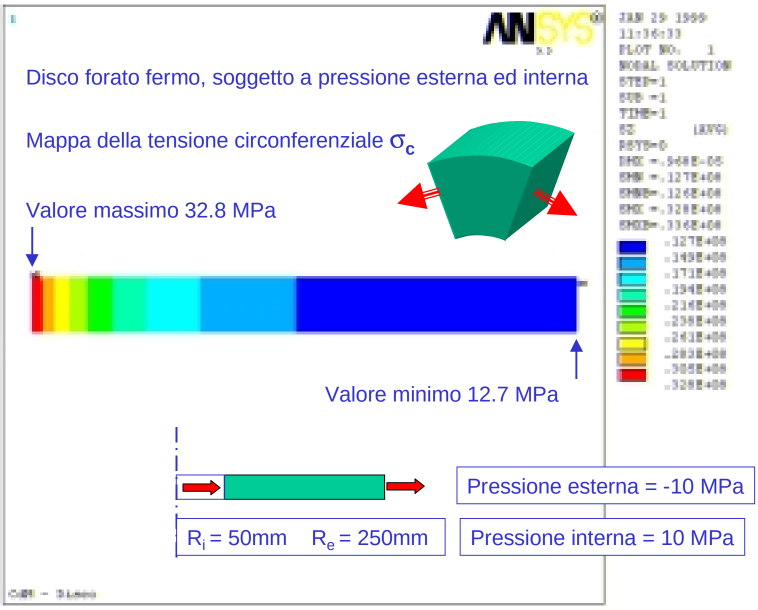
Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Serbatoi a forte spessore

Le funzioni

$$\sigma_r = B_1 + \frac{B_2}{r^2}$$

$$\sigma_c = B_1 - \frac{B_2}{r^2}$$

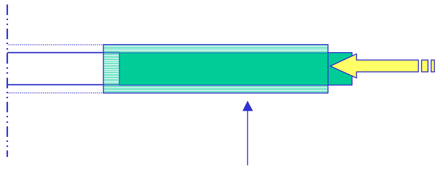
che descrivono l'andamento delle tensioni con il raggio sono state ricavate con l'ipotesi di **stato piano di tensione,** ovvero: $\sigma_{as} = 0$

La deformazione assiale può essere, quindi, calcolata come: $\varepsilon_{as} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_c)$

quindi, esprimendo le tensioni in funzione delle costanti B, si ha:

$$\varepsilon_a = -\frac{\nu}{E}\left(B_1 + \frac{B_2}{r^2} + B_1 - \frac{B_2}{r^2}\right) = -\frac{\nu}{E} 2 B_1 \text{ = costante}$$

la deformazione assiale è costante (stato piano di deformazione generalizzato).



Una qualsiasi tensione assiale non influisce, quindi, sulla distribuzione delle tensioni radiali e circonferenziali. Per questo motivo le funzioni, fin ora ricavate per i dischi, sono applicabili al caso dei serbatoi a forte spessore.

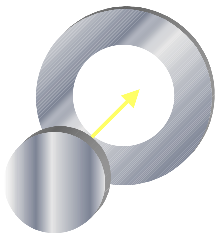
Le superfici si spostano parallelamente a se stesse

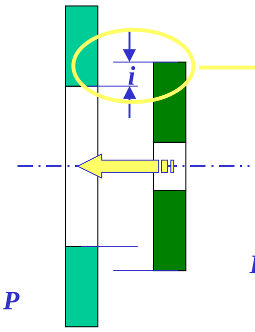
Solidi assialsimmetrici - Dischi

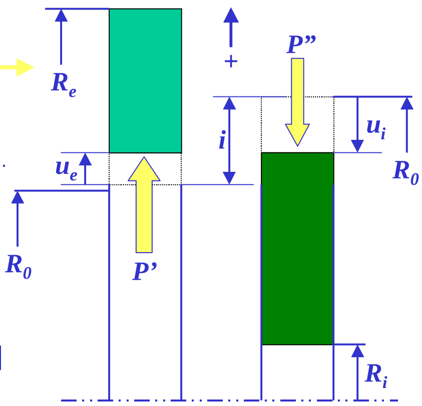
Dischi a spessore uniforme: casi particolari

Montaggio di due dischi concentrici con interferenza

$i = u_e - u_i$







Equilibrio: $P' = P'' = P$

Congruenza: $i = u_e - u_i$ oppure $i = |u_e| + |u_i|$

Lo spostamento radiale può essere calcolato come segue:

$$u_e = r\varepsilon_c = \frac{R_0}{E}(\sigma_c - \nu\sigma_r) = \frac{R_0}{E}\left[\frac{P R_0^2}{R_e^2 - R_0^2}\left(1 + \frac{R_e^2}{R_0^2}\right) - \nu \frac{P R_0^2}{R_e^2 - R_0^2}\left(1 - \frac{R_e^2}{R_0^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{P R_0^3}{E(R_e^2 - R_0^2)}\left[1 - \nu + (1+\nu)\frac{R_e^2}{R_0^2}\right]$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari

Montaggio di due dischi concentrici con interferenza

$$u_e = \frac{P\,R_0^3}{E(R_e^2 - R_0^2)}\left[1-\nu+(1+\nu)\frac{R_e^2}{R_0^2}\right]$$

spostamento radiale della superficie del foro del disco esterno

Per il disco interno si procede in modo analogo, valutando lo spostamento radiale u_i:

$$u_i = r\varepsilon_c = \frac{R_0}{E}(\sigma_c - \nu\sigma_r) = \frac{R_0}{E}\left[\frac{-PR_0^2}{(R_0^2-R_i^2)}\left(\frac{R_i^2}{R_0^2}+1\right)-\nu\frac{PR_0^2}{(R_0^2-R_i^2)}\left(\frac{R_i^2}{R_0^2}-1\right)\right]$$

Lo spostamento radiale del disco interno è, dunque, dato dall'espressione:

$$u_i = -\frac{P\,R_0^3}{E(R_0^2-R_i^2)}\left[(1+\nu)\frac{R_i^2}{R_0^2}+1-\nu\right]$$

A questo punto è possibile legare l'interferenza i agli spostamenti radiali u_e e u_i e, quindi, alla geometria dei dischi (R_e, R_0, R_i) ed alle caratteristiche del materiale (E, ν).

Ricordando che: $i = u_e - u_i$ si può scrivere:

$$i = u_e - u_i = \frac{P\,R_0^3}{E(R_e^2-R_0^2)}\left[1-\nu+(1+\nu)\frac{R_e^2}{R_0^2}\right]+\frac{P\,R_0^3}{E(R_0^2-R_i^2)}\left[(1+\nu)\frac{R_i^2}{R_0^2}+1-\nu\right]$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari

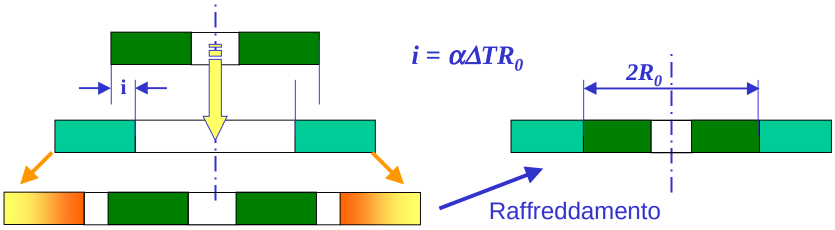
Montaggio di due dischi concentrici con interferenza

$$i = u_e - u_i = \frac{P\,R_0^3}{E(R_e^2-R_0^2)}\left[1-\nu+(1+\nu)\frac{R_e^2}{R_0^2}\right]+\frac{P\,R_0^3}{E(R_0^2-R_i^2)}\left[1-\nu+(1+\nu)\frac{R_i^2}{R_0^2}\right]$$

Nel calcolo delle sollecitazioni dovute ai calettamenti forzati è interessante conoscere il rapporto i/P tra il valore dell'interferenza e la pressione di contatto.

Dall'equazione precedente si ottiene:

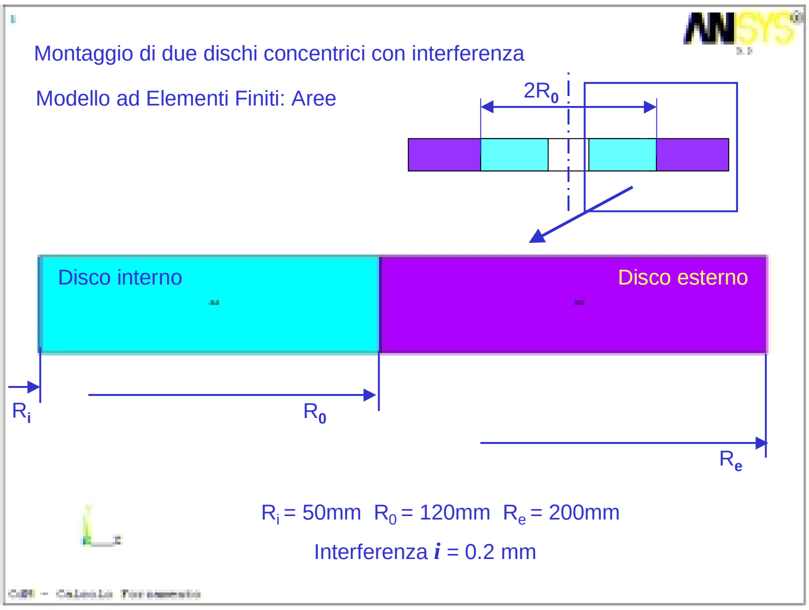
$$\frac{i}{P} = \frac{R_0^3}{E}\left[\frac{(1-\nu)}{(R_e^2-R_0^2)}+\frac{1+\nu}{(R_e^2-R_0^2)}\left(\frac{R_e^2}{R_0^2}\right)+\frac{(1-\nu)}{(R_0^2-R_i^2)}+\frac{1+\nu}{(R_0^2-R_i^2)}\left(\frac{R_i^2}{R_0^2}\right)\right]$$



Dilatazione per riscaldamento del disco esterno

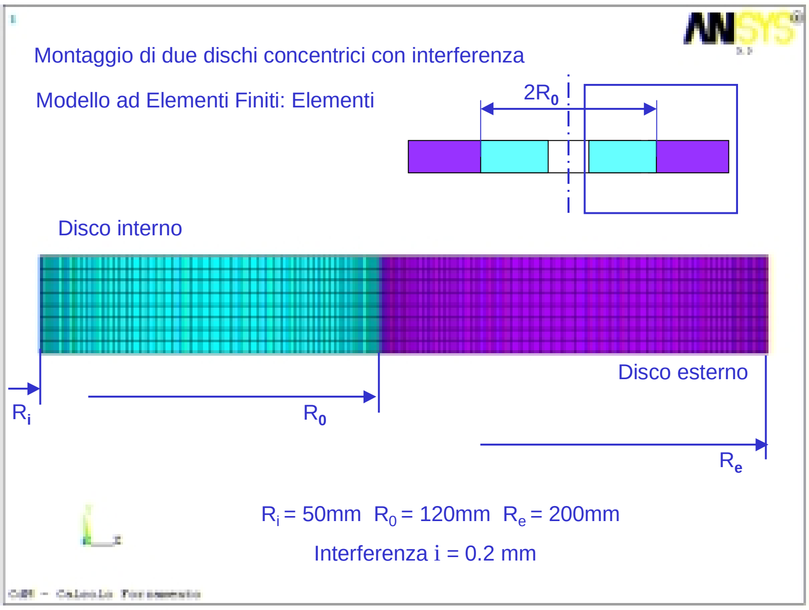
Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari



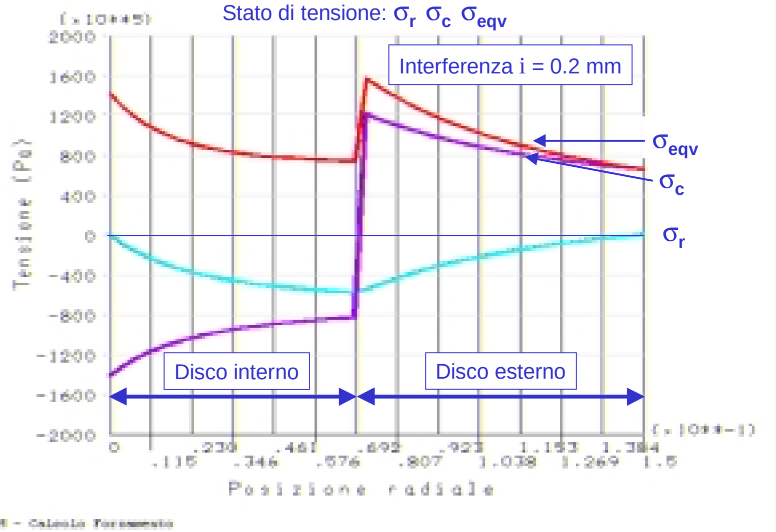
Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari

- Montaggio di due dischi concentrici con interferenza

R_i = 50mm R_0 = 120mm R_e = 200mm

Stato di tensione: σ_r σ_c σ_{eqv}



Solidi assialsimmetrici - Dischi

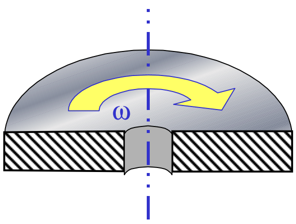
Dischi a spessore uniforme

Ricordando l'equazione differenziale che descrive lo stato di tensione in un disco a spessore uniforme:

$$\underbrace{r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3r\frac{d\sigma_r}{dr}}_{\text{Omogenea associata.}}+\underbrace{(3+\nu)\rho\,\omega^2 r^2}_{\text{Tiene conto degli effetti inerziali}}+\underbrace{E\,\alpha\, r\frac{dT}{dr}}_{\text{Tiene conto dell'effetto del gradiente termico sullo stato tensionale}}=0$$

Prendiamo ora in considerazione l'integrale particolare che tiene conto degli **effetti inerziali**:

L'equazione differenziale assume la forma: $r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3r\frac{d\sigma_r}{dr}+(3+\nu)\rho\,\omega^2 r^2=0$

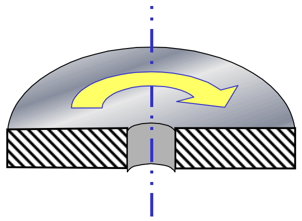


La funzione $\sigma_r = Br^2$ e le sue derivate:
$$\begin{cases}\dfrac{d\sigma_r}{dr}=2Br\\[2mm] \dfrac{d^2\sigma_r}{dr^2}=2B\end{cases}$$
introdotte nell'equazione differenziale portano alla determinazione della costante B

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

Effetto delle forze d'inerzia



$$\begin{cases} r^2\dfrac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3r\dfrac{d\sigma_r}{dr}+(3+\nu)\rho\,\omega^2 r^2=0 \\ \sigma_r=Br^2 \quad \dfrac{d\sigma_r}{dr}=2Br \quad \dfrac{d^2\sigma_r}{dr^2}=2B \end{cases}$$

$$r^2(2B)+3r(2Br)+(3+\nu)\rho\,\omega^2 r^2=0$$

$$8Br^2+(3+\nu)\rho\,\omega^2 r^2=0 \qquad B=-\frac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2$$

e quindi: $\sigma_r=B_1+\dfrac{B_2}{r^2}-\dfrac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2 r^2$ ricordando che: $\sigma_c=\sigma_r+r\dfrac{d\sigma_r}{dr}+\rho\,\omega^2 r^2$

si ha: $\sigma_c=\underbrace{B_1+\dfrac{B_2}{r^2}-\dfrac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2 r^2}_{\sigma_r}\underbrace{-2\dfrac{B_2}{r^2}-2\dfrac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2 r^2}_{r\frac{d\sigma_r}{dr}}+\rho\,\omega^2 r^2$

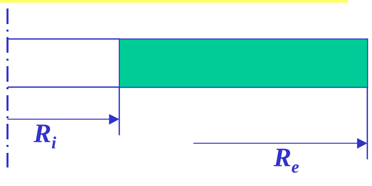
si ottiene la tensione circonferenziale: $\sigma_c=B_1-\dfrac{B_2}{r^2}-\dfrac{(1+3\nu)}{8}\rho\,\omega^2 r^2$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

Effetto delle forze d'inerzia

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_r&=B_1+\frac{B_2}{r^2}-\frac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2 r^2\\ \sigma_c&=B_1-\frac{B_2}{r^2}-\frac{(1+3\nu)}{8}\rho\,\omega^2 r^2\end{aligned}}$$



Nel caso di sollecitazione dovuta unicamente alla rotazione del disco si ha:

Condizioni al contorno: $r=R_i \Rightarrow \sigma_r=0$

$r=R_e \Rightarrow \sigma_r=0$

$$\begin{cases} 0=B_1+\dfrac{B_2}{R_i^2}-\dfrac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2 R_i^2 \\ 0=B_1+\dfrac{B_2}{R_e^2}-\dfrac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2 R_e^2 \end{cases}$$

da cui si ottengono i valori delle costanti: $\Rightarrow$

$$B_1=\frac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2\left(R_e^2+R_i^2\right)$$

$$B_2=\frac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2 R_e^2 R_i^2$$

e dalle quali si calcolano le tensioni:

$$\sigma_r=\frac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2\left(R_e^2+R_i^2-\frac{R_e^2R_i^2}{r^2}-r^2\right)$$

$$\sigma_c=\frac{(3+\nu)}{8}\rho\,\omega^2\left(R_e^2+R_i^2+\frac{R_e^2R_i^2}{r^2}\right)-\frac{(1+3\nu)}{8}\rho\,\omega^2 r^2$$

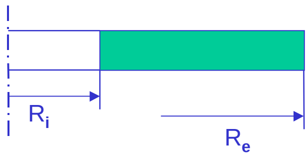
Solidi assialsimmetrici - Dischi

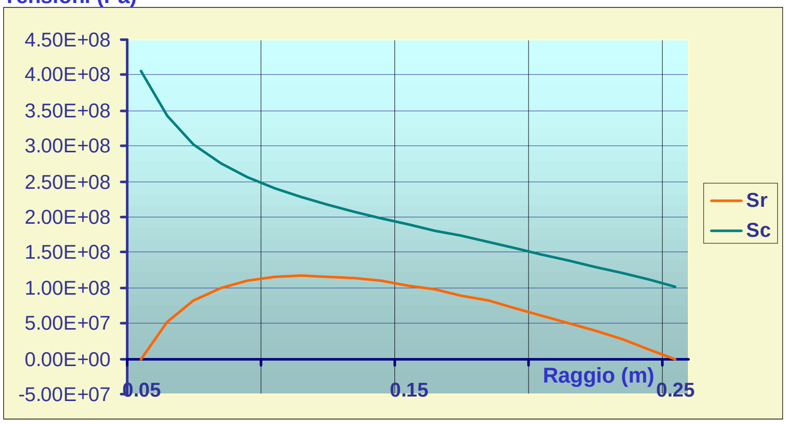
Dischi a spessore uniforme : casi particolari

Le equazioni ricavate nel caso di di sollecitazione dovuta unicamente alla rotazione del disco, consentono di calcolare l'andamento delle tensioni in funzione del raggio.

Il grafico riporta tali andamenti nel caso:

R_i = 50mm R_e = 250mm ω = 1000 r/s ρ = 7800

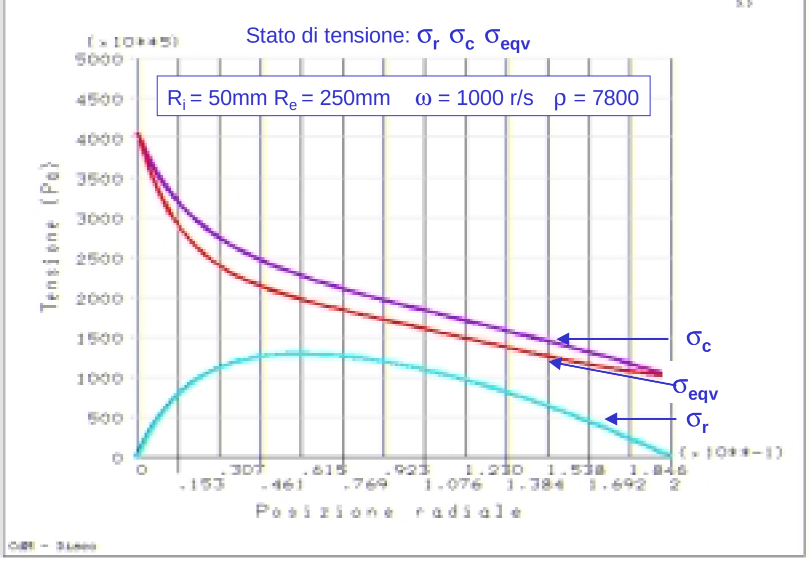




Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme : casi particolari

Risultati del calcolo ad Elementi finiti - Disco forato rotante



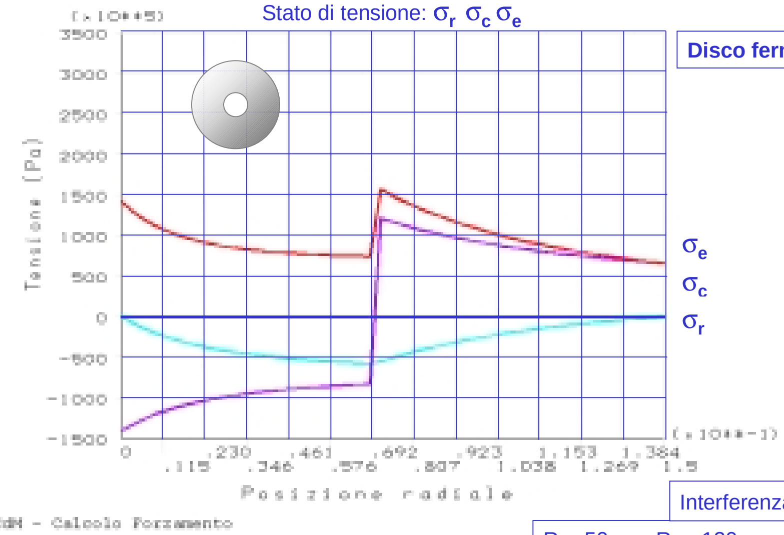
Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari

Montaggio di due dischi concentrici con interferenza

Effetto della velocità angolare sul forzamento

Stato di tensione: σ_r σ_c σ_e



Disco fermo

σ_e

σ_c

σ_r

Interferenza i = 0.2 mm

R_i = 50mm R_0 = 120mm R_e = 200mm

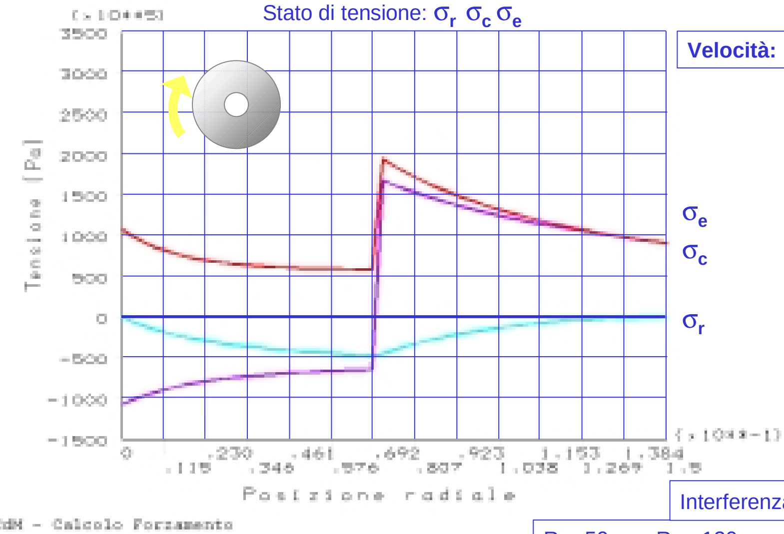
Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari

Montaggio di due dischi concentrici con interferenza

Effetto della velocità angolare sul forzamento

Stato di tensione: σ_r σ_c σ_e



Velocità: 500 r/s

σ_e

σ_c

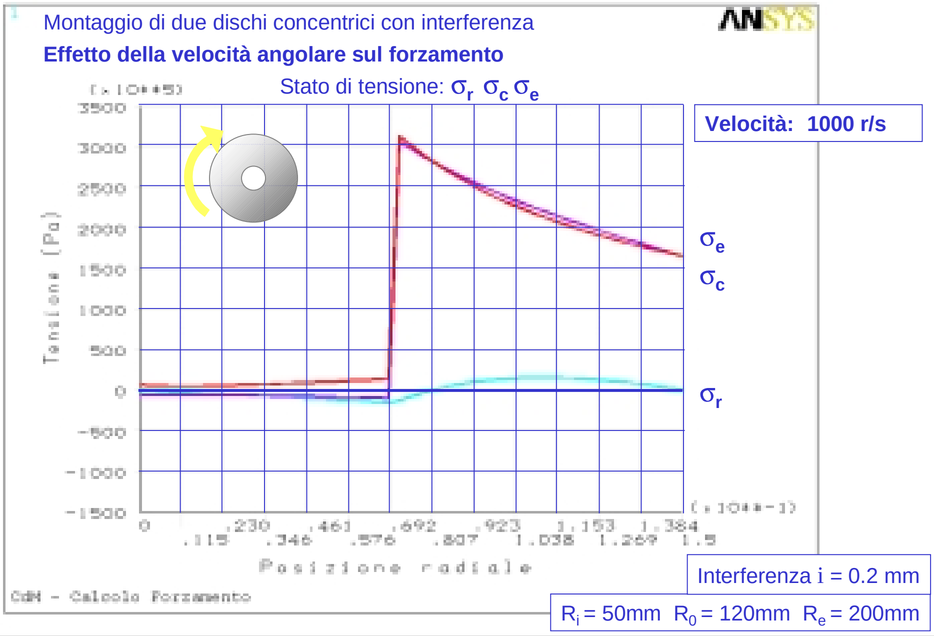
σ_r

Interferenza i = 0.2 mm

R_i = 50mm R_0 = 120mm R_e = 200mm

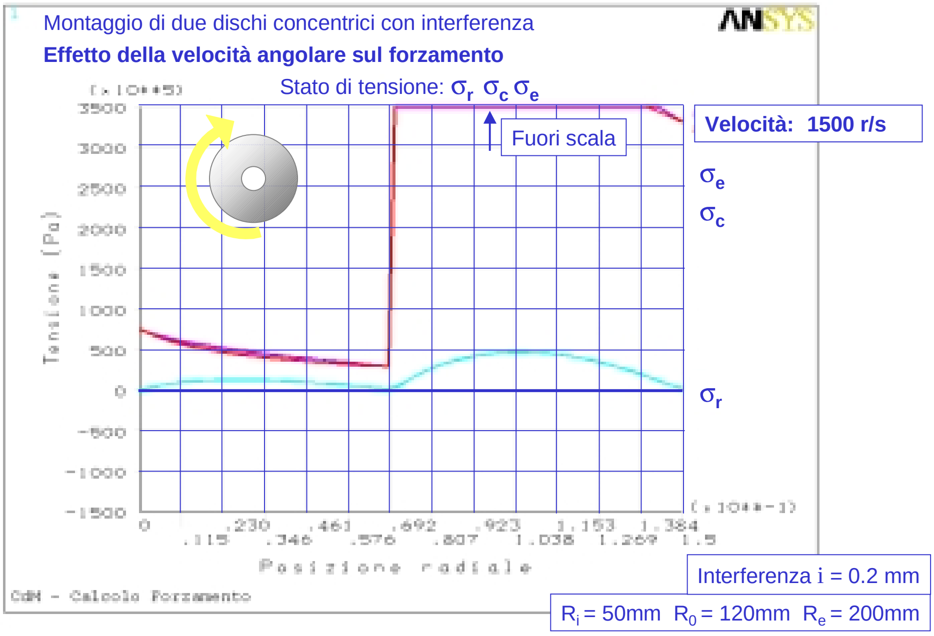
Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme: casi particolari



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

Torniamo ancora all'equazione differenziale che descrive lo stato di tensione in un disco a spessore uniforme:

$$\underbrace{r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3r\frac{d\sigma_r}{dr}}_{\text{Omogenea associata.}}+\underbrace{(3+\nu)\rho\,\omega^2 r^2}_{\text{Tiene conto degli effetti inerziali}}+\underbrace{E\,\alpha\, r\frac{dT}{dr}}_{\text{Tiene conto dell'effetto del gradiente termico sullo stato tensionale}}=0$$

Prendiamo ora in considerazione l'integrale particolare che tiene conto degli **effetti termici**:

L'equazione differenziale assume la forma: $r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3r\frac{d\sigma_r}{dr}+E\,\alpha\, r\frac{dT}{dr}=0$

Per valutare il gradiente della temperatura è necessario conoscere la funzione $T(r)$.

A tale scopo si ipotizza una funzione polinomiale del tipo: $T(r)=k_0+\sum_{n=1}^{m}k_n r^n$

il cui gradiente è $\frac{dT}{dr}=\sum_{n=1}^{m}nk_n r^{n-1}$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

L'equazione differenziale assume quindi la forma: $r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}+3r\frac{d\sigma_r}{dr}+E\,\alpha\sum_{n=1}^{m}nk_n r^n=0$

che ammette quale integrale particolare la funzione: $\sigma_r=\sum_{n=1}^{m}B_n r^n$

le cui derivate sono: $\frac{d\sigma_r}{dr}=\sum_{n=1}^{m}nB_n r^{n-1}$ e $\frac{d^2\sigma_r}{dr^2}=\sum_{n=1}^{m}n(n-1)B_n r^{n-2}$

introducendo le derivate della tensione radiale nell'equazione differenziale si ha:

$\sum_{n=1}^{m}\left[B_n(n+2)+E\,\alpha\, k_n\right]n_n r^n=0$ da cui si ricava il valore delle costanti: $B_n=-\frac{E\alpha}{n+2}k_n$

si ottiene in tal modo l'integrale particolare: $\sigma_r=-E\,\alpha\sum_{n=1}^{m}\frac{k_n}{n+2}r^n$

Per cui la tensione radiale può essere scritta come: $\sigma_r=B_1+\frac{B_2}{r^2}-E\,\alpha\sum_{n=1}^{m}\frac{k_n}{n+2}r^n$

La tensione circonferenziale può essere ricavata ricordando che esiste la relazione: $\sigma_c=\sigma_r+r\frac{d\sigma_r}{dr}$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

Per cui, tenendo conto della espressione della tensione radiale:

$$\sigma_r = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - E\,\alpha \sum_{n=1}^{m} \frac{k_n}{n+2} r^n$$

Si può calcolare tensione circonferenziale:

$$\sigma_c = \sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} = \underbrace{B_1 + \frac{B_2}{r^2} - E\alpha \sum_{n=1}^{m} \frac{k_n}{n+2} r^n}_{\sigma_r} \underbrace{- 2\frac{B_2}{r^2} - E\alpha \sum_{n=1}^{m} \frac{k_n}{n+2} n r^n}_{r\frac{d\sigma_r}{dr}}$$

$$\sigma_c = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - E\alpha \sum_{n=1}^{m} \frac{k_n}{n+2} (n+1) r^n$$

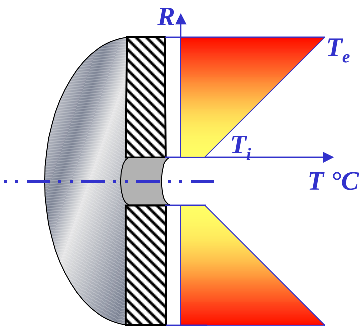
Nel caso di variazione lineare di temperatura,
esiste solo il primo termine della sommatoria:

$$n = 1 \Rightarrow \quad \sigma_r = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \frac{E\alpha}{3} k_1 r$$

$$\sigma_c = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - 2\frac{E\alpha}{3} k_1 r$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme



Ipotesi di variazione lineare (gradiente costante):

$$T(r) = k_0 + k_1 r$$

condizioni al contorno:

$T(r) = T_e$ per $R = R_e$ $\Rightarrow$ $T_e = k_0 + k_1 R_e$

$T(r) = T_i$ per $R = R_i$ $\quad$ $T_i = k_0 + k_1 R_i$

da cui si ricavano i valori delle costanti:

$$k_0 = T_e - \frac{T_e - T_i}{R_e - R_i} R_e \qquad k_1 = \frac{T_e - T_i}{R_e - R_i}$$

Si possono, quindi, scrivere le espressioni della tensione radiale e circonferenziale:

$$\sigma_r = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \frac{E\alpha}{3} k_1 r = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \frac{E\alpha}{3} \frac{T_e - T_i}{R_e - R_i} r$$

$$\sigma_c = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - 2\frac{E\alpha}{3} k_1 r = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - 2\frac{E\alpha}{3} \frac{T_e - T_i}{R_e - R_i} r$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme

Nel caso che sul disco agisca solo il gradiente termico, le costanti B possono essere calcolate come segue:

$$\begin{cases} \sigma_r = B_1 + \dfrac{B_2}{r^2} - \dfrac{E\alpha}{3} k_1 r \\ \sigma_c = B_1 - \dfrac{B_2}{r^2} - 2\dfrac{E\alpha}{3} k_1 r \end{cases}$$

Condizioni al contorno:

$\sigma_r = 0$ per $R = R_e$ e per $R = R_i$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B_1 + \frac{B_2}{R_i^2} - \frac{E\alpha}{3} k_1 R_i \\ 0 &= B_1 + \frac{B_2}{R_e^2} - \frac{E\alpha}{3} k_1 R_e \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} B_1 &= \frac{E\alpha}{3} k_1 \left(\frac{R_e^2 + R_i^2 + R_e R_i}{R_e + R_i} \right) \\ B_2 &= -\frac{E\alpha}{3} k_1 \frac{R_e^2 R_i^2}{R_e + R_i} \end{aligned}$$

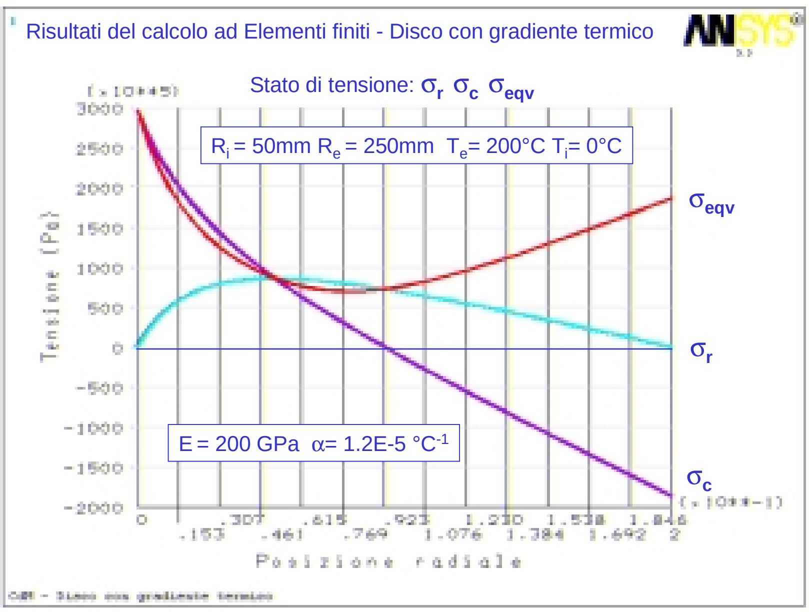
Da cui si ottengono le funzioni del raggio delle tensioni radiali e circonferenziali:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha}{3} \frac{T_e - T_i}{R_e^2 - R_i^2} \left(R_e^2 + R_i^2 + R_e R_i - \frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} - r(R_e + R_i) \right)$$

$$\sigma_c = \frac{E\alpha}{3} \frac{T_e - T_i}{R_e^2 - R_i^2} \left(R_e^2 + R_i^2 + R_e R_i + \frac{R_e^2 R_i^2}{r^2} - 2r(R_e + R_i) \right)$$

Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme : casi particolari



Solidi assialsimmetrici - Dischi

Dischi a spessore uniforme : casi particolari

- Risultati del calcolo ad Elementi finiti
  Disco rotante, con gradiente termico, pressione interna ed esterna.