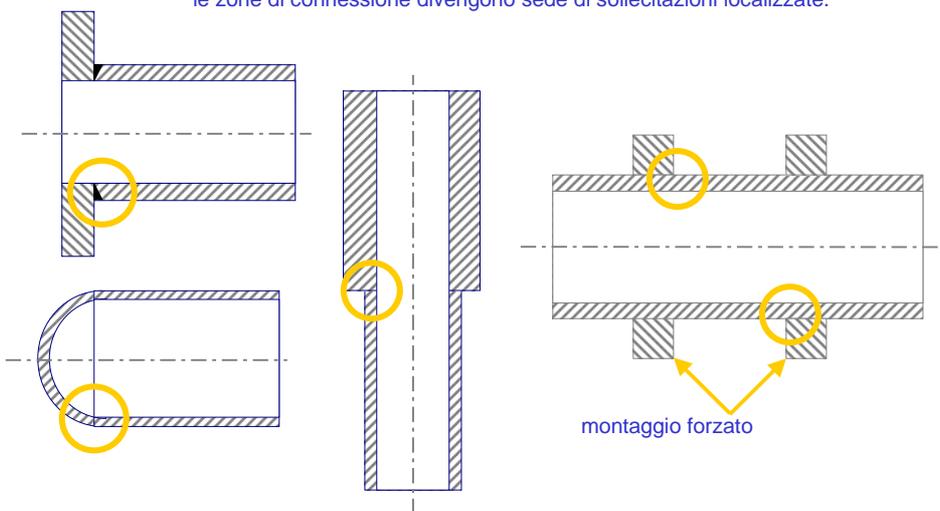


Tubi - coefficienti di bordo

Tubi - coefficienti di bordo

Molti componenti di macchine sono schematizzabili come corpi assialsimmetrici connessi tra loro, come mostrano gli schizzi qui rappresentati.

Quando le rigidità dei due corpi connessi tra loro sono diverse, le zone di connessione divengono sede di sollecitazioni localizzate.



Tubi - coefficienti di bordo

Ci sono molti componenti di macchine che sono schematizzabili come corpi assialsimmetrici connessi tra loro, come mostrano gli schizzi qui rappresentati.

Quando le rigidità dei due corpi connessi tra loro sono diverse, le zone di connessione divengono sede di sollecitazioni localizzate.

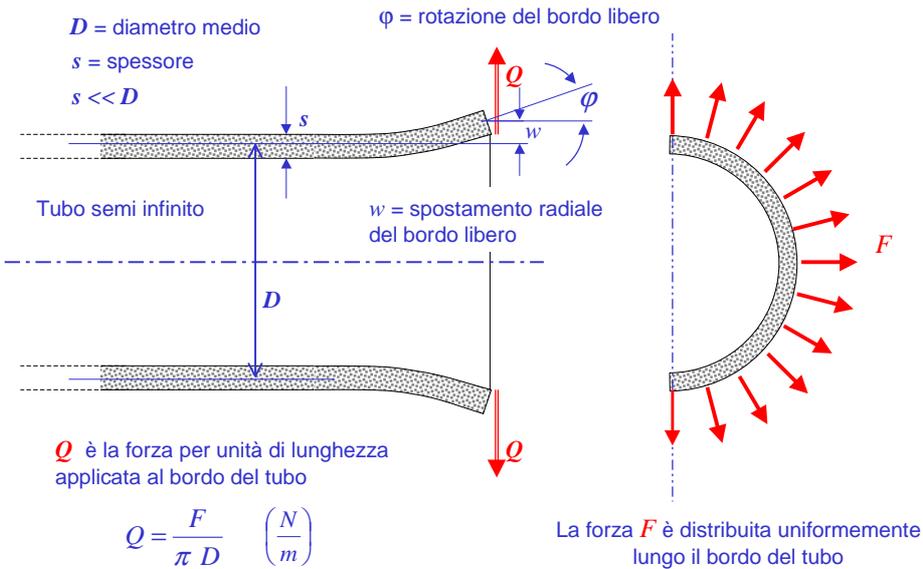


I due tubi si deformano sotto l'azione della pressione e si portano a diametri diversi, non più congruenti:

L'imposizione della congruenza comporta l'insorgere di deformazioni locali nei due tubi.

Tubi - coefficienti di bordo

Applicando una forza uniformemente distribuita al bordo di un tubo si ottiene una deformata assialsimmetrica.



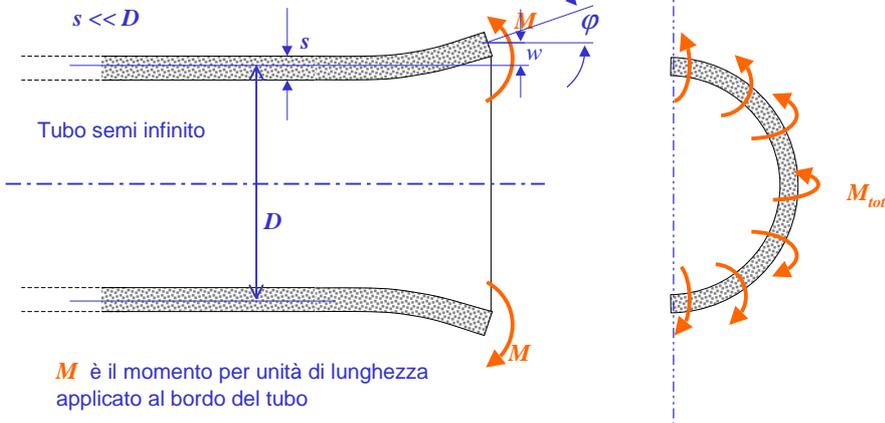
Tubi - coefficienti di bordo

Anche applicando un momento uniformemente distribuito al bordo di un tubo si ottiene una deformata assialsimmetrica.

D = diametro medio

s = spessore

$s \ll D$

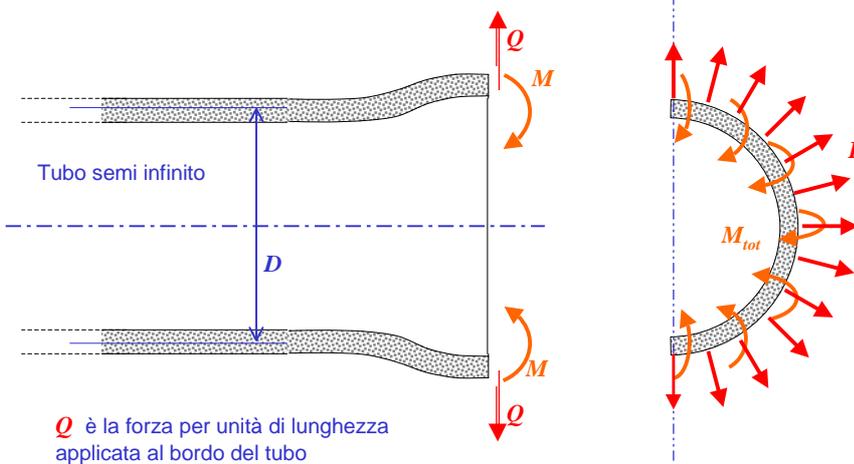


$$M = \frac{M_{tot}}{\pi D} \left(\frac{Nm}{m} \right)$$

Il momento M_{tot} è distribuito uniformemente lungo il bordo del tubo

Tubi - coefficienti di bordo

Nel caso siano applicati sia la forza Q che il momento M la deformata, sempre assialsimmetrica, sarà dovuta alla sovrapposizione degli effetti.



Q è la forza per unità di lunghezza applicata al bordo del tubo

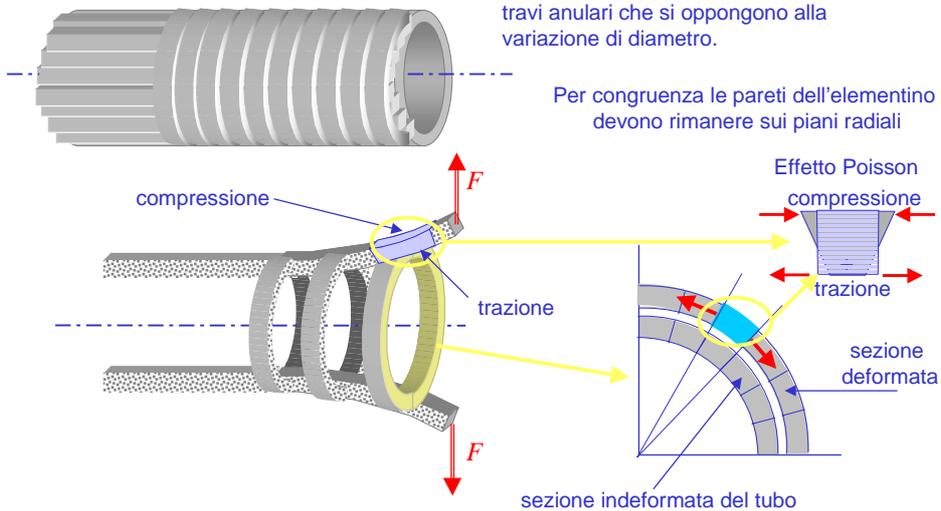
M è il momento per unità di lunghezza applicato al bordo del tubo

Tubi - coefficienti di bordo

Il tubo si oppone alla deformazione sia con la rigidità flessionale della sua parete sia con quella membranale.

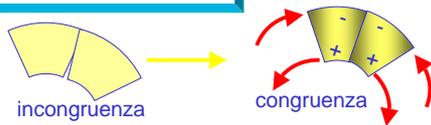
Un tubo può essere pensato, infatti, come una serie di travi disposte lungo le generatrici.....

.....connesse circonferenzialmente da altre travi anulari che si oppongono alla variazione di diametro.



Tubi - coefficienti di bordo

Per rispettare la congruenza, i piani radiali devono rimanere tali.



la deformazione circonferenziale deve essere nulla o comunque costante attraverso lo spessore.

Di conseguenza, devono nascere coppie di forze in grado di contrastare l'effetto poisson e mantenere le sezioni piane e giacenti sui piani radiali.

Ciò ha effetto sulla rigidità flessionale della parete del tubo, che si comporta in modo analogo ad una piastra.

Indicando con ϵ_a la deformazione assiale della parete del tubo e con ϵ_c quella circonferenziale legata alla sola flessione della parete del tubo, senza tener conto del contributo dovuto alla variazione di diametro, si può scrivere:

$$\epsilon_c = \frac{1}{E}(\sigma_c - \nu\sigma_a) \quad (\sigma_r = 0) \quad \epsilon_a = \frac{1}{E}(\sigma_a - \nu\sigma_c) \quad \rightarrow \quad \epsilon_a = \frac{1}{E}[\sigma_a - \nu(\nu\sigma_a)]$$

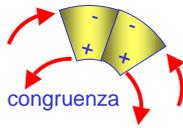
Per congruenza si ha: $\epsilon_c = \frac{1}{E}(\sigma_c - \nu\sigma_a) = 0 \rightarrow \sigma_c = \nu\sigma_a$

$$\epsilon_a = \frac{1}{E}\sigma_a(1 - \nu^2) = \frac{(1 - \nu^2)}{E}\sigma_a = \frac{1}{E'}\sigma_a \quad \text{con: } E' = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$$

La conseguenza di ciò è che per effetto Poisson la rigidità a flessione (per unità di larghezza) della parete del tubo è maggiore di quella che avrebbe una trave nella stessa situazione.

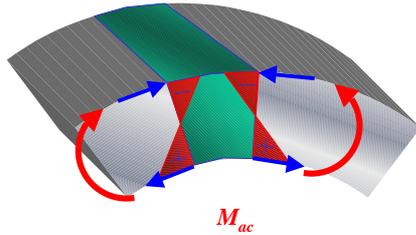
Tubi - coefficienti di bordo

Per rispettare la congruenza, i piani radiali devono rimanere tali.



la deformazione circonferenziale deve essere nulla o comunque costante attraverso lo spessore.

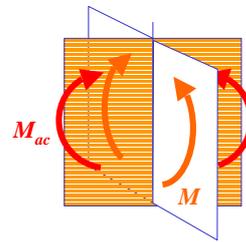
Di conseguenza, devono nascere coppie di forze in grado di contrastare l'effetto poisson e mantenere le sezioni piane e giacenti su piani radiali.



L'effetto poisson fa quindi nascere un momento flettente M_{ac} , che viene detto **momento anticlastico**, giacente su un piano normale a quello di inflessione delle generatrici.

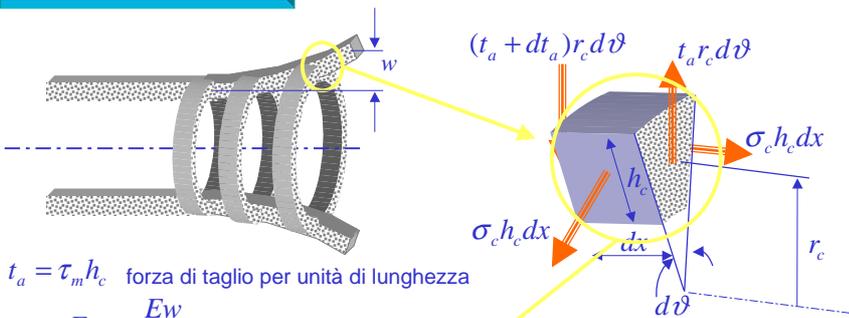
Il momento anticlastico M_{ac} è legato al momento agente sul piano assiale M tramite il coefficiente di poisson ν

$$M_{ac} = \nu M$$



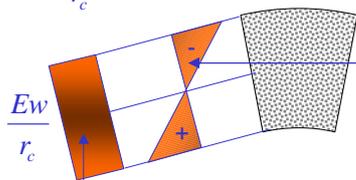
Tubi - coefficienti di bordo

Consideriamo l'equilibrio alla traslazione radiale di un elementino infinitesimo di parete del tubo:



$$t_a = \tau_m h_c \text{ forza di taglio per unità di lunghezza}$$

$$\sigma_c = E \varepsilon_c = \frac{E w}{r_c} \text{ Tensione circonferenziale}$$



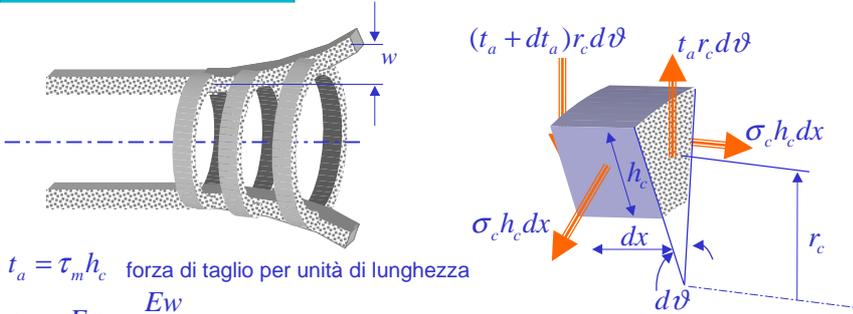
Componente della tensione circonferenziale dovuta alla variazione di raggio

Componente della tensione circonferenziale dovuta all'effetto poisson e, quindi, legata alla flessione delle generatrici del tubo

Questa componente essendo circonferenzialmente autoequilibrata non influisce sull'equilibrio radiale

Tubi - coefficienti di bordo

Consideriamo l'equilibrio alla traslazione radiale di un elementino infinitesimo di parete del tubo:



$t_a = \tau_m h_c$ forza di taglio per unità di lunghezza

$\sigma_c = E \varepsilon_c = \frac{E w}{r_c}$ Tensione circonferenziale

Quindi, le forze in gioco nell'equilibrio radiale sono:

↑ Si assume la convenzione che le forze siano positive se dirette verso l'esterno del tubo

$t_a r_c d\vartheta$
 $-(t_a + dt_a) r_c d\vartheta$ } forze di taglio

$-2\sigma_c h_c dx \cdot \sin \frac{d\vartheta}{2} \cong -2\sigma_c h_c dx \frac{d\vartheta}{2}$ forze di coesione circonferenziale

Sommando le forze si ottiene:

$$t_a r_c d\vartheta - (t_a + dt_a) r_c d\vartheta - 2\sigma_c h_c dx \frac{d\vartheta}{2} = 0$$

Tubi - coefficienti di bordo

Equilibrio alla traslazione radiale di un elementino infinitesimo di parete del tubo:

$$t_a r_c d\vartheta - (t_a + dt_a) r_c d\vartheta - 2\sigma_c h_c dx \frac{d\vartheta}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad -dt_a r_c d\vartheta - 2 \frac{E w}{r_c} h_c dx \frac{d\vartheta}{2} = 0$$

Il taglio ed il momento flettente sono legati allo spostamento radiale w

con relazioni analoghe a quelle delle travi tenendo conto dell'incremento di rigidezza dovuto all'effetto poisson

$$\left\{ \begin{aligned} t_a &= D \frac{d^3 w}{dx^3} \\ M &= D \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \right.$$

$$D = E' I \quad E' = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad I = \frac{1 \cdot h_c^3}{12}$$

quindi:

$$D = \frac{E h_c^3}{12(1-\nu^2)}$$

momento d'inerzia per unità di larghezza

dividendo per r_c e dx si ha:

$$-\frac{dt_a}{dx} - E w \frac{h_c}{r_c^2} = 0$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + E \frac{h_c}{r_c^2} w = 0$$

dividendo tutto per D si ha:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E h_c}{D r_c^2} w = 0$$

esprimendo D in termini di E ed h_c si ha:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{E h_c^3} \frac{E h_c}{r_c^2} w = 0$$

indicando con λ la quantità: $\lambda = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h_c^2 r_c^2}}$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{h_c^2 r_c^2} w = 0$$

Tubi - coefficienti di bordo

Equilibrio alla traslazione radiale di un elementino infinitesimo di parete del tubo:

$$t_a r_c d\vartheta - (t_a + dt_a) r_c d\vartheta - 2\sigma_c h_c dx \frac{d\vartheta}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad -dt_a r_c d\vartheta - 2 \frac{Ew}{r_c} h_c dx \frac{d\vartheta}{2} = 0$$

Il taglio ed il momento flettente sono legati allo spostamento radiale w

con relazioni analoghe a quelle delle travi tenendo conto dell'incremento di rigidezza dovuto all'effetto poisson

$$\left\{ \begin{aligned} t_a &= D \frac{d^3 w}{dx^3} \\ M &= D \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \right.$$

$$D = E'I \quad E' = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad I = \frac{1 \cdot h_c^3}{12}$$

quindi:

$$D = \frac{Eh_c^3}{12(1-\nu^2)}$$

momento d'inerzia per unità di larghezza

dividendo per r_c e dx si ha:

$$-\frac{dt_a}{dx} - Ew \frac{h_c}{r_c^2} = 0$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + E \frac{h_c}{r_c^2} w = 0$$

dividendo tutto per D si ha:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E h_c}{D r_c^2} w = 0$$

esprimendo D in termini di E ed h_c si ha:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{Eh_c^3} \frac{Eh_c}{r_c^2} w = 0$$

indicando con λ la quantità: $\lambda = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{h_c^2 r_c^2}}$

si ha: $w^{IV} + 4\lambda^4 w = 0$

Tubi - coefficienti di bordo

Integrazione dell'equazione differenziale:

La soluzione dell'equazione differenziale è del tipo:

$$w^{IV} + 4\lambda^4 w = 0 \quad \rightarrow \quad w_{(x)} = Ce^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \psi)$$

dove C e ψ sono le costanti di integrazione

La derivata prima della funzione $w_{(x)}$ vale:

$$\frac{dw}{dx} = -\lambda Ce^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \psi) + \lambda Ce^{-\lambda x} \cos(\lambda x + \psi)$$

l'equazione precedente può essere riscritta moltiplicando e dividendo i termini del secondo membro per $\sqrt{2}$

...e ricordando che: $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{dw}{dx} = -\lambda \sqrt{2} Ce^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \psi) \cos \frac{\pi}{4} + \lambda \sqrt{2} Ce^{-\lambda x} \cos(\lambda x + \psi) \sin \frac{\pi}{4}$$

tenendo conto che: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

si può scrivere: $\frac{dw}{dx} = -\sqrt{2} \lambda Ce^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{\pi}{4}\right)$

Tubi - coefficienti di bordo

Integrazione dell'equazione differenziale:

La soluzione dell'equazione differenziale è del tipo:

$$w^{IV} + 4\lambda^4 w = 0 \quad \longrightarrow \quad w_{(x)} = Ce^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \psi)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\sqrt{2}\lambda Ce^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{\pi}{4}\right)$$

la derivata è stata quindi ottenuta cambiando il segno, moltiplicando la funzione $w_{(x)}$ per λ e per $\sqrt{2}$ e sottraendo $\frac{\pi}{4}$ all'argomento della funzione trigonometrica

La derivata seconda può essere calcolata dalla derivata prima in modo analogo:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2\lambda^2 Ce^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

e così anche la derivata terza:

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = -2\sqrt{2}\lambda^3 Ce^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Tubi - coefficienti di bordo

Integrazione dell'equazione differenziale:

dalle derivate seconda e terza possono essere ricavati il momento ed il taglio rispettivamente:

$$M = D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 2\lambda^2 Ce^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

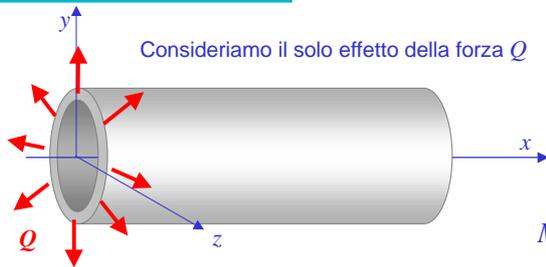
$$M_{(x)} = 2D\lambda^2 Ce^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t_a = D \frac{d^3 w}{dx^3} \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = -2\sqrt{2}\lambda^3 Ce^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$Q_{(x)} = -2\sqrt{2}D\lambda^3 Ce^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{3\pi}{4}\right)$$

Tubi - coefficienti di bordo

Effetti separati della forza Q e del momento M



Consideriamo il solo effetto della forza Q

quindi per $x=0$ deve essere $M=0$

$$Q_0 \neq 0$$

$$M_0 = D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = 0$$

$$M_{(x)} = 2D\lambda^2 C e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{\pi}{2}\right)$$

per $x=0$

$$M_0 = 2D\lambda^2 C \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

da cui si ricava che: $\psi = \frac{\pi}{2}$

La forza Q all'ascissa $x=0$ è data da:

$$Q_0 = t_{a(x=0)} = D \left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0}$$

$$Q_{(x)} = -2\sqrt{2}D\lambda^3 C e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \psi - \frac{3\pi}{4}\right)$$

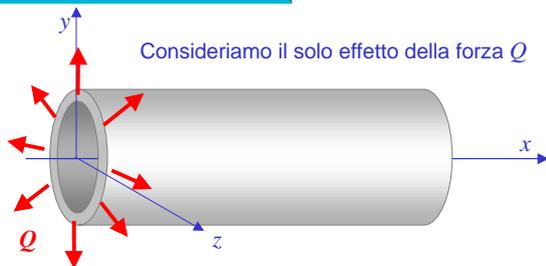
per $x=0$

$$Q_0 = -2\sqrt{2}D\lambda^3 C \sin\left(\psi - \frac{3\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}D\lambda^3 C \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}D\lambda^3 C \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Q_0 = 2D\lambda^3 C \quad \text{da cui si ricava l'altra costante d'integrazione:} \quad C = \frac{Q_0}{2D\lambda^3}$$

Tubi - coefficienti di bordo

Effetti separati della forza Q e del momento M



Consideriamo il solo effetto della forza Q

Quando agisce la sola forza Q
le costanti di integrazione sono:

$$C = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

Spostamento radiale $w_{(x)} = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right)$

Rotazione $\varphi_{(x)} = -\frac{\sqrt{2}Q_0}{2D\lambda^2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right)$

Momento assiale $M_{(x)} = \frac{Q_0}{\lambda} e^{-\lambda x} \sin \lambda x$

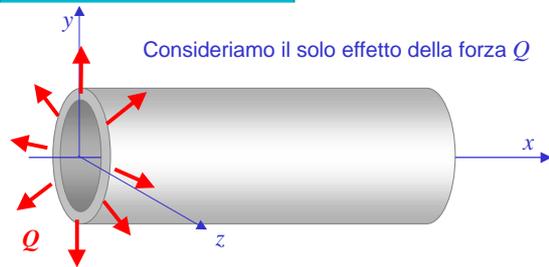
Componente assiale della tensione flessionale $\sigma_{a(x)} = \frac{6M_{(x)}}{h_c^2} = \frac{6Q_0}{h_c^2 \lambda} e^{-\lambda x} \sin \lambda x$

Componente circonf. della tensione flessionale $\sigma_{r(x)} = \pm \frac{\nu 6M_{(x)}}{h_c^2} = \pm \frac{\nu 6Q_0}{h_c^2 \lambda} e^{-\lambda x} \sin \lambda x$

Con i valori delle costanti possono essere calcolate le grandezze d'interesse in funzione di x

Tubi - coefficienti di bordo

Effetti separati della forza Q e del momento M



Consideriamo il solo effetto della forza Q

Quando agisce la sola forza Q
le costanti di integrazione sono:

$$C = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

Spostamento radiale $w_0 = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} \longrightarrow Q_0 = w_0 2D\lambda^3$

Rotazione $\varphi_0 = -\frac{Q_0}{2D\lambda^2}$

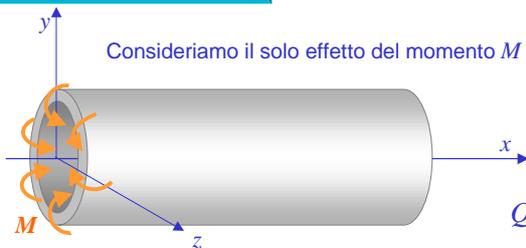
Momento assiale $M_0 = 0$

Al bordo del tubo
 $x = 0$
si ha:

Componente assiale della tensione flessionale $\sigma_{a0} = 0$

Tubi - coefficienti di bordo

Effetti separati della forza Q e del momento M



Consideriamo il solo effetto del momento M

quindi per $x=0$ deve essere $Q=0$

$$M_0 \neq 0 \quad Q_0 = 0$$

$$Q_0 = -2\sqrt{2}D\lambda^3 C \sin\left(\psi - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

Il momento M all'ascissa $x=0$ è dato da:

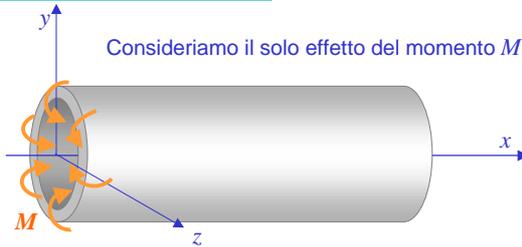
da cui si ricava che: $\psi = \frac{3\pi}{4}$

$$M_0 = 2D\lambda^2 C \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 2D\lambda^2 C \sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} D\lambda^2 C = \sqrt{2} D\lambda^2 C$$

da cui si ricava l'altra costante d'integrazione: $C = \frac{M_0}{\sqrt{2} D\lambda^2}$

Tubi - coefficienti di bordo

Effetti separati della forza Q e del momento M



Consideriamo il solo effetto del momento M

Quando agisce il solo momento M
le costanti di integrazione sono:

$$C = \frac{M_0}{\sqrt{2D\lambda^2}} \quad \psi = \frac{3\pi}{4}$$

Spostamento radiale $w_{(x)} = \frac{M_0}{\sqrt{2D\lambda^2}} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{3\pi}{4}\right)$

Rotazione $\varphi_{(x)} = \frac{dw}{dx} = -\frac{M_0}{D\lambda} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right)$

Momento assiale $M_{(x)} = \sqrt{2}M_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right)$

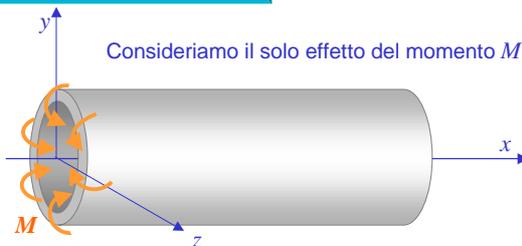
Componente assiale della tensione flessionale $\sigma_{a(x)} = \frac{6M_{(x)}}{h_c^2} = \frac{6\sqrt{2}M_0}{h_c^2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right)$

Componente circonferenziale della tensione flessionale $\sigma_{a(x)} = \pm \frac{\nu 6M_{(x)}}{h_c^2}$

Con i valori delle costanti possono essere calcolate le grandezze d'interesse in funzione di x

Tubi - coefficienti di bordo

Effetti separati della forza Q e del momento M



Consideriamo il solo effetto del momento M

Quando agisce il solo momento M
le costanti di integrazione sono:

$$C = \frac{M_0}{\sqrt{2D\lambda^2}} \quad \psi = \frac{3\pi}{4}$$

Spostamento radiale $w_0 = \frac{M_0}{2D\lambda^2}$

Rotazione $\varphi_0 = -\frac{M_0}{D\lambda} \longrightarrow M_0 = -\varphi_0 D\lambda$

Componente assiale della tensione flessionale $\sigma_{a0} = \frac{6M_0}{h_c^2}$

Componente circonferenziale della tensione flessionale $\sigma_{r0} = \pm \frac{\nu 6M_0}{h_c^2}$

Al bordo del tubo
 $x = 0$
si ha:

Tubi - coefficienti di bordo

Effetto compressivo della forza Q e del momento M

Nel caso siano applicati sia la forza Q che il momento M in corrispondenza del bordo del tubo, per $x = 0$ si ha:

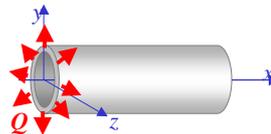
Spostamento radiale
$$w_0 = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} + \frac{M_0}{2D\lambda^2}$$

Rotazione
$$\varphi_0 = -\frac{Q_0}{2D\lambda^2} - \frac{M_0}{D\lambda}$$

Tubi - coefficienti di bordo

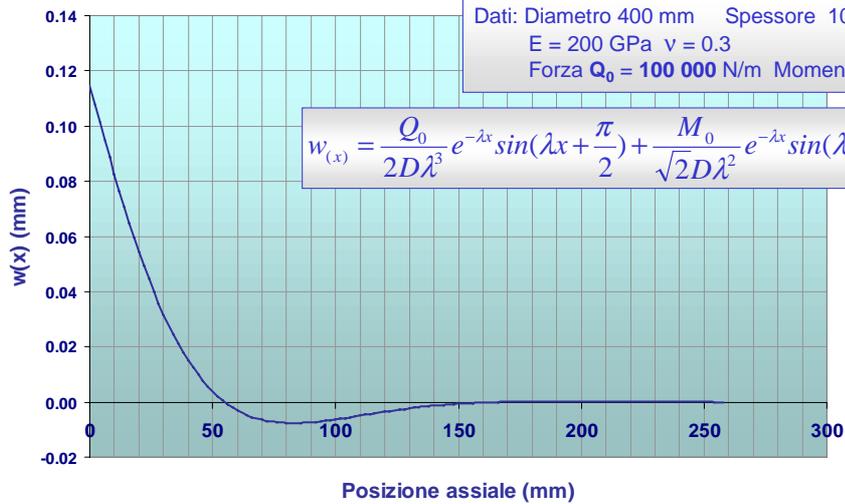
Esempio di calcolo - Tubo con carico radiale ad un estremo

Spostamento radiale



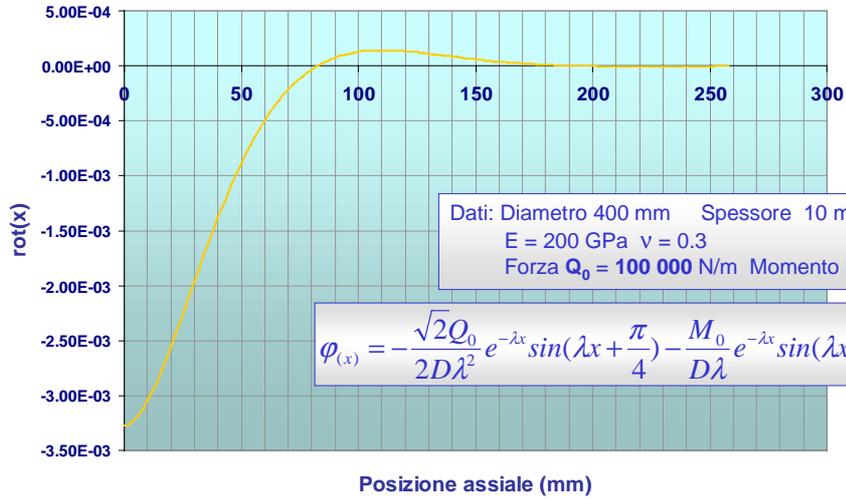
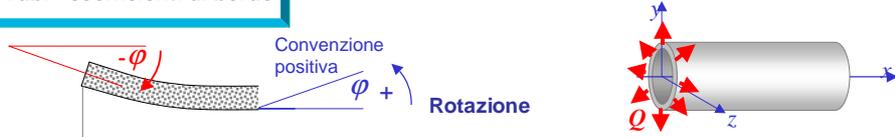
Dati: Diametro 400 mm Spessore 10 mm
 $E = 200 \text{ GPa}$ $\nu = 0.3$
 Forza $Q_0 = 100\,000 \text{ N/m}$ Momento $M_0 = 0$

$$w_{(x)} = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{M_0}{\sqrt{2}D\lambda^2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{3\pi}{4}\right)$$



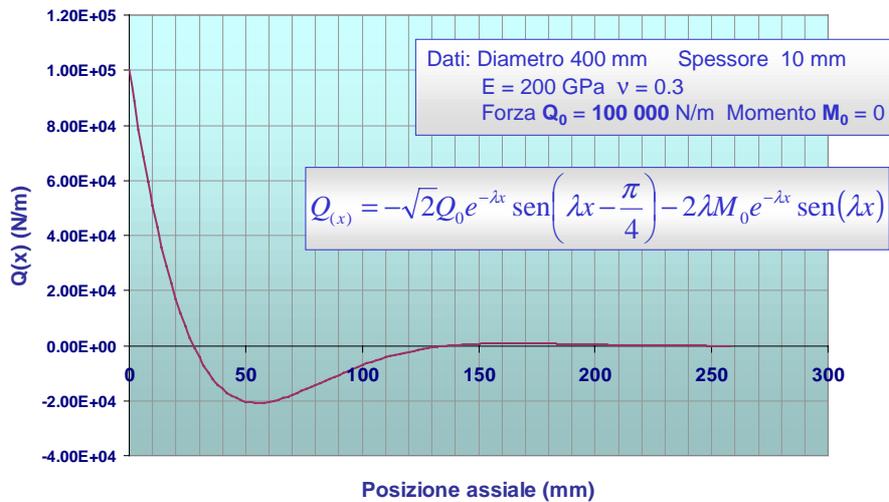
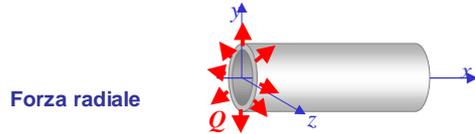
Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con carico radiale ad un estremo



Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con carico radiale ad un estremo

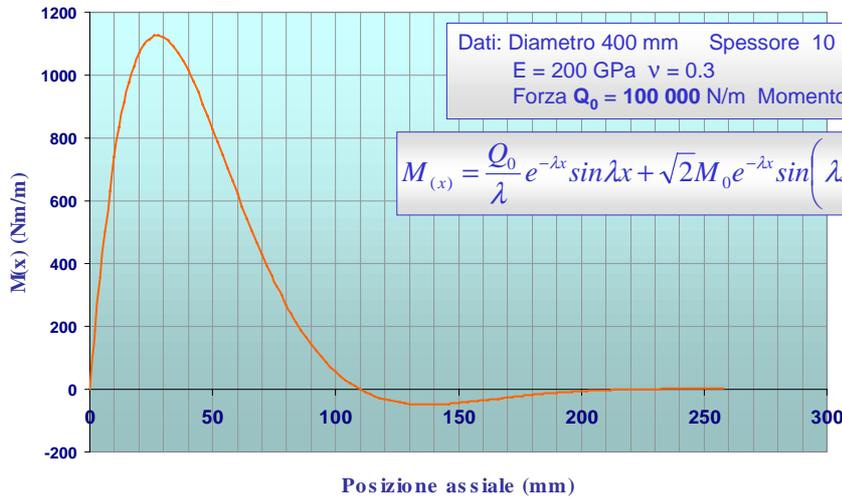
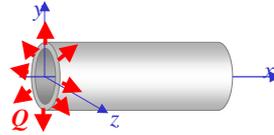


Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con carico radiale ad un estremo

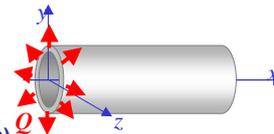


Momento assiale

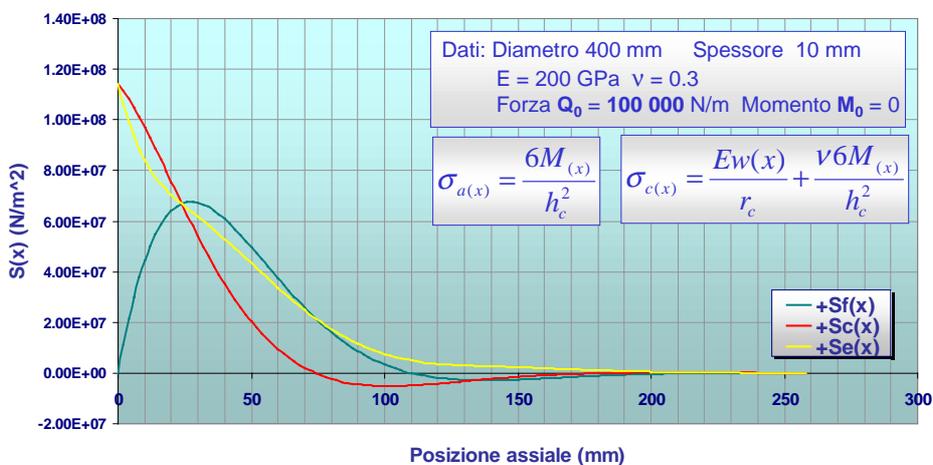


Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con carico radiale ad un estremo

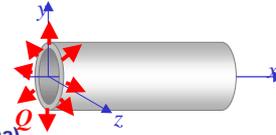


Tensioni (superficie interna)

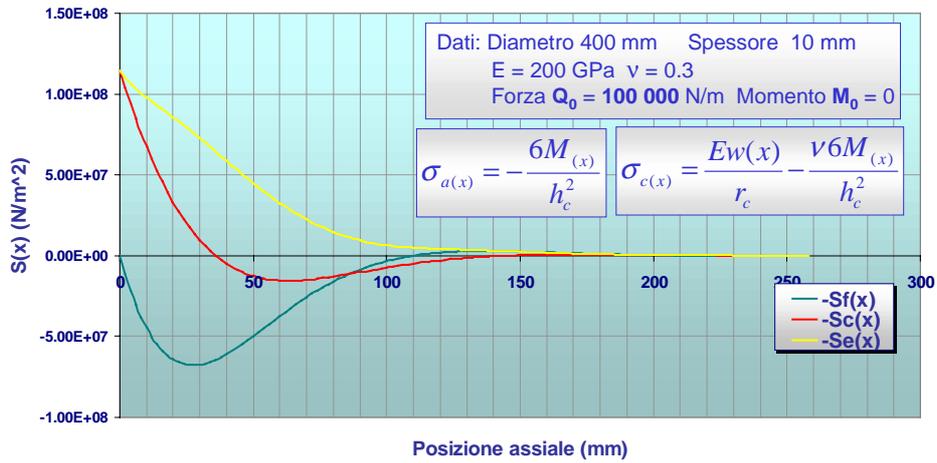


Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con carico radiale ad un estremo

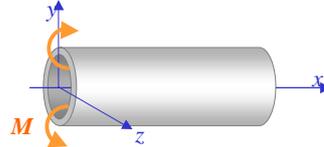


Tensioni (superficie esterna)

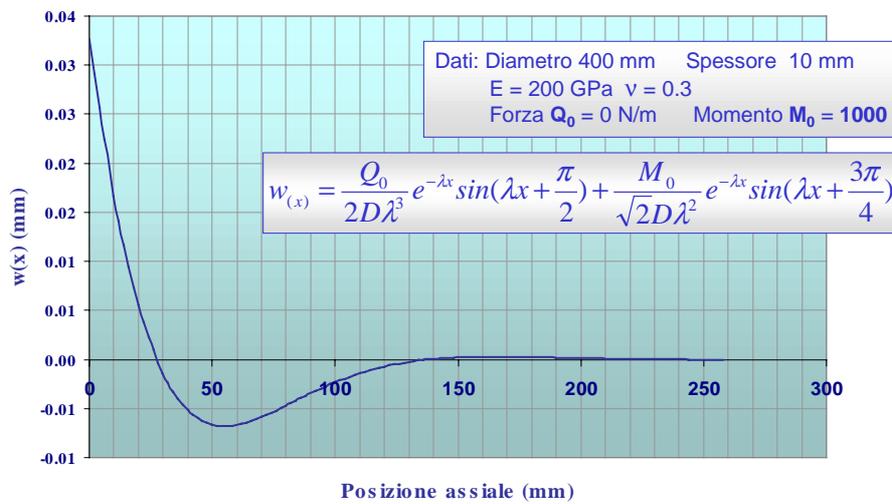


Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Momento assiale ad un estremo

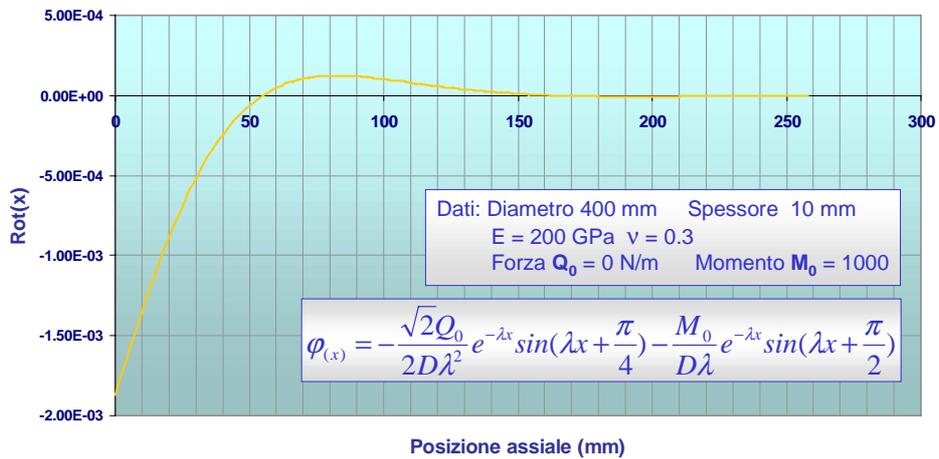
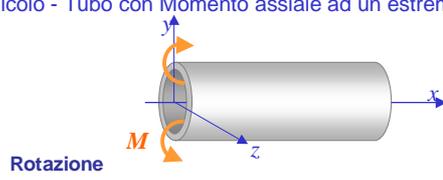


Spostamento radiale



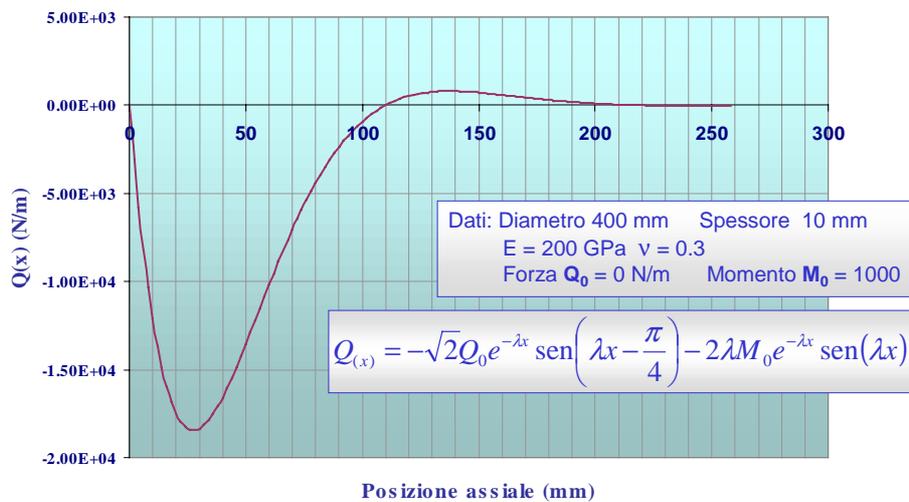
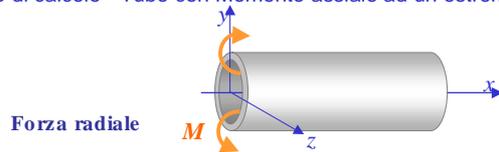
Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Momento assiale ad un estremo



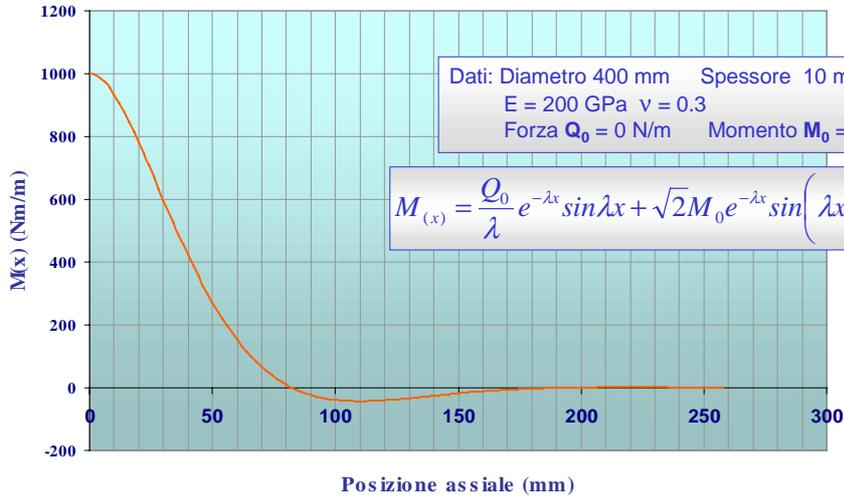
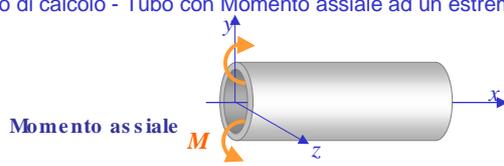
Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Momento assiale ad un estremo



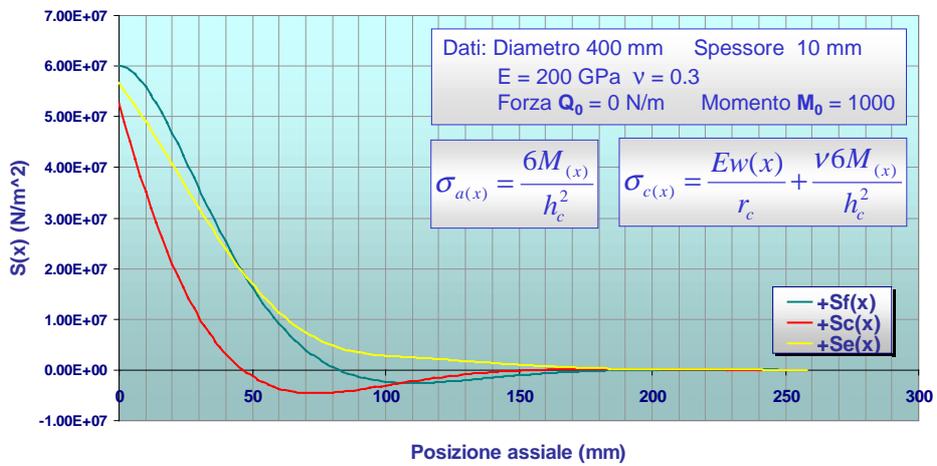
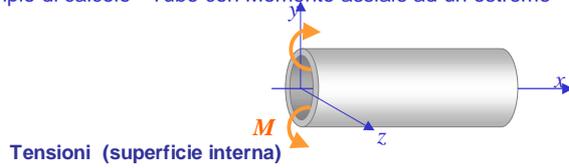
Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Momento assiale ad un estremo



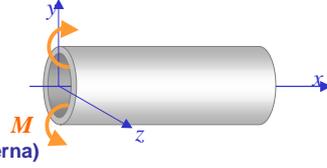
Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Momento assiale ad un estremo

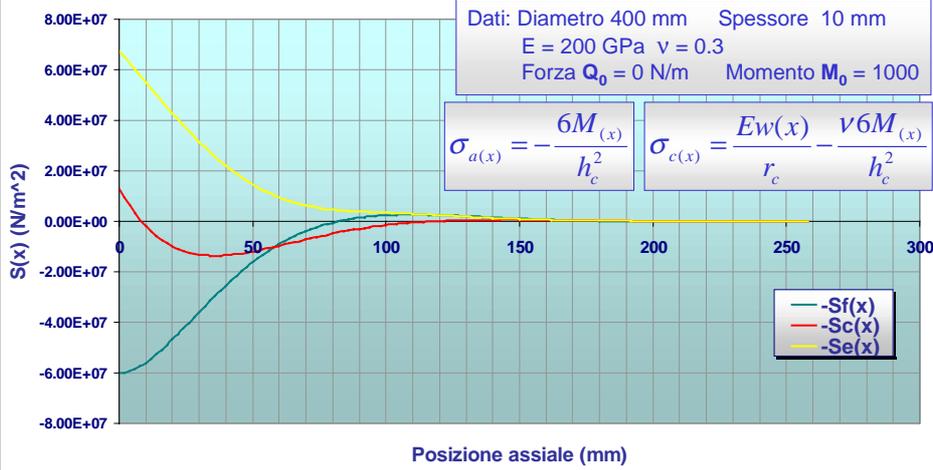


Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Momento assiale ad un estremo

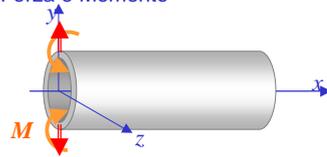


Tensioni (superficie esterna)

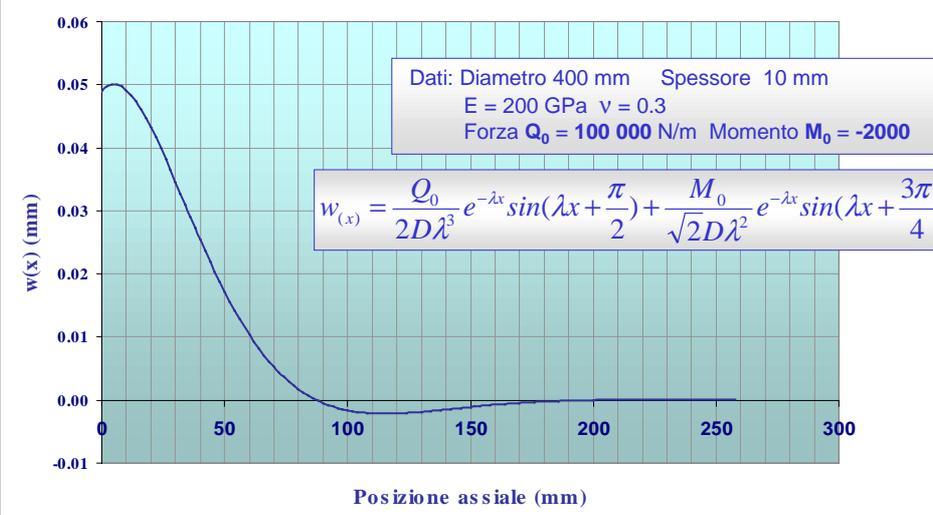


Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Forza e Momento

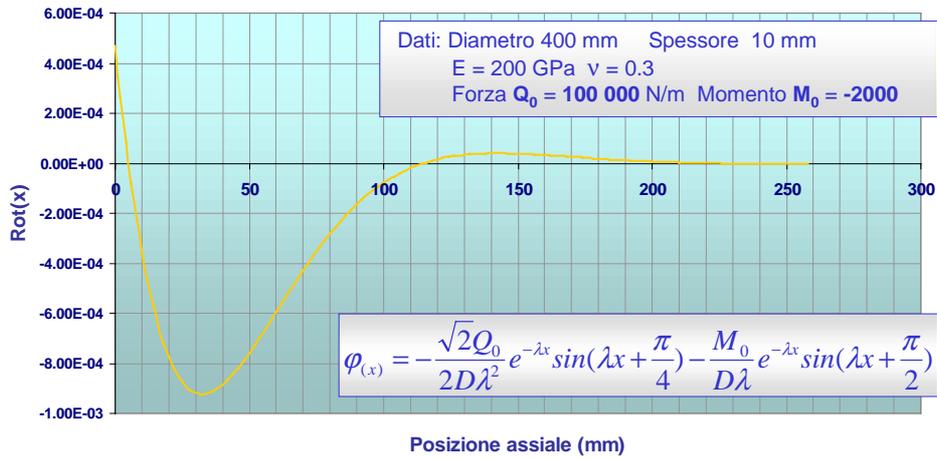
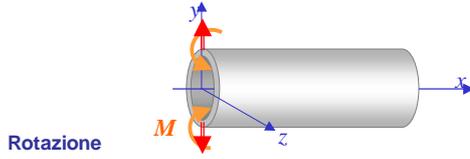


Spostamento radiale



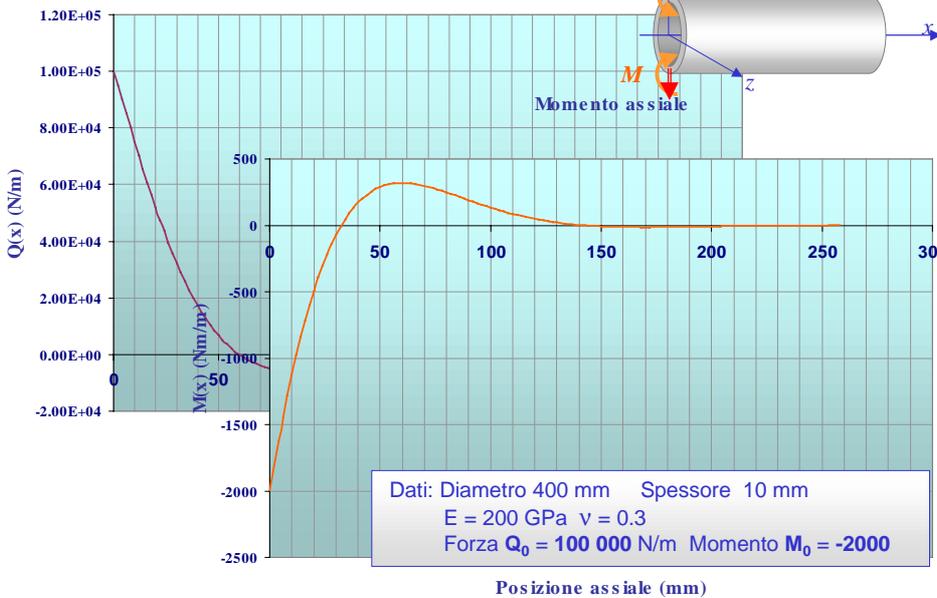
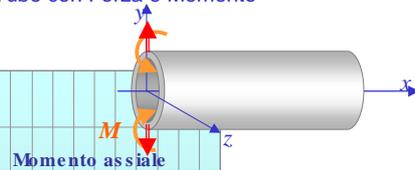
Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Forza e Momento



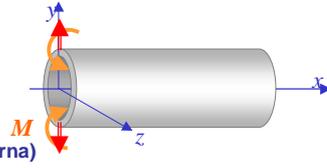
Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Forza e Momento
 Forza radiale



Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Forza e Momento

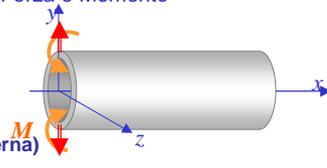


Tensioni (superficie interna)

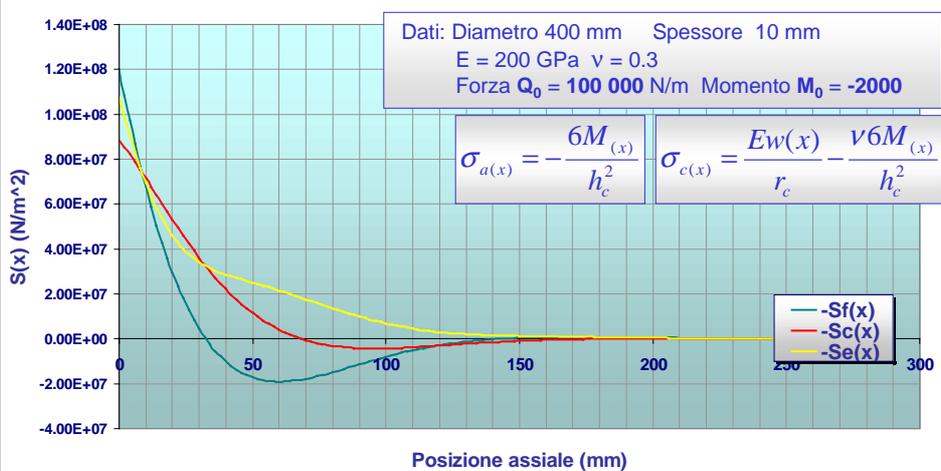


Tubi - coefficienti di bordo

Esempio di calcolo - Tubo con Forza e Momento

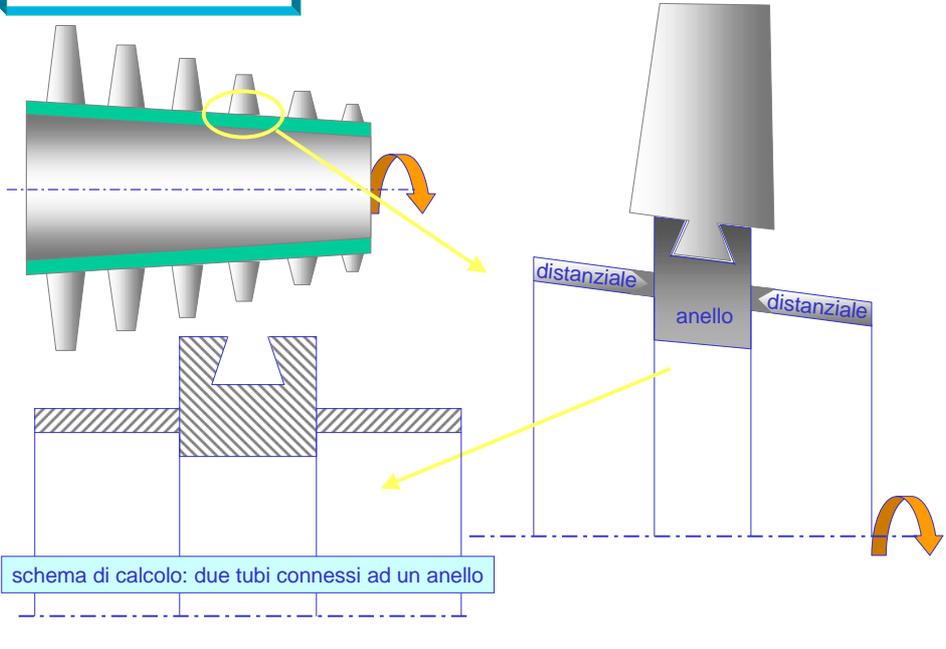


Tensioni (superficie esterna)



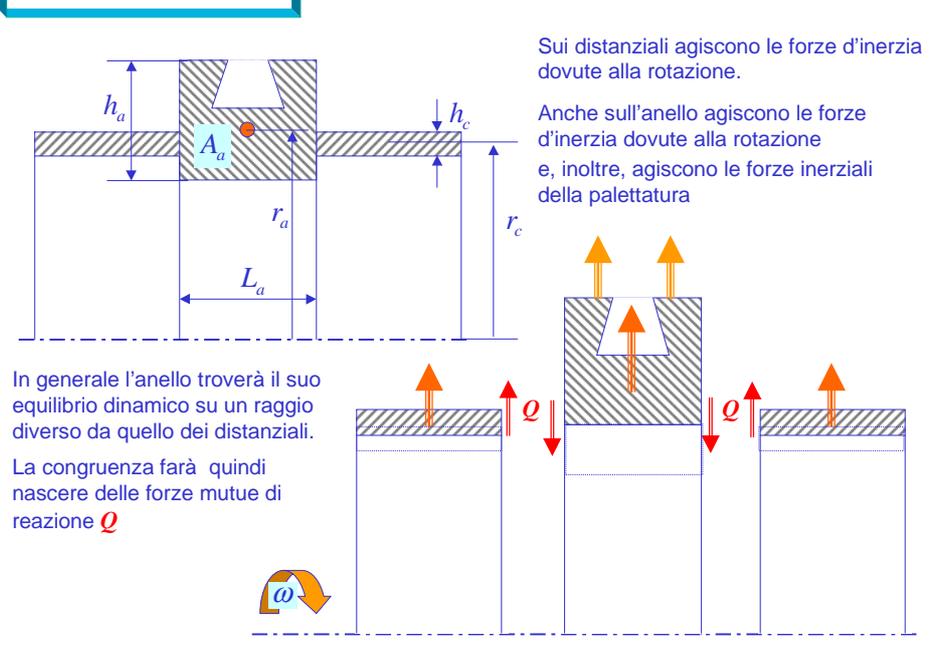
Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali



Tubi - coefficienti di bordo

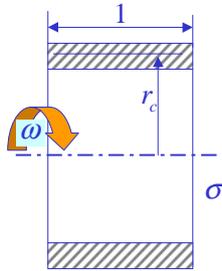
Applicazione: tamburi per compressori assiali



Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali

Consideriamo la deformazione del distanziale separatamente dall'anello, soggetto quindi alle sole forze d'inerzia.



$$dF_i = \rho \overbrace{h_c l r_c d\vartheta}^{dV} \overbrace{\omega^2 r_c}^a$$

Equilibrio radiale

$$\rho h_c l r_c d\vartheta \omega^2 r_c - 2\sigma_c l h_c \sin \frac{d\vartheta}{2} = 0$$

$$\sigma_c = \rho \omega^2 r_c^2$$

La deformazione circonferenziale è data da: $\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E}$

Quindi può essere calcolato lo spostamento radiale: $w_c = \epsilon_c r_c = \frac{\sigma_c}{E} r_c = \frac{\rho \omega^2 r_c^3}{E}$

Considerazioni analoghe possono essere fatte per l'anello, separato dai distanziali e soggetto unicamente alla propria forza d'inerzia.

$$\text{Spostamento radiale: } w_a = \epsilon_a r_a = \frac{\sigma_a}{E} r_a = \frac{\rho \omega^2 r_a^3}{E}$$

Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali

Oltre alla propria forza d'inerzia l'anello è soggetto all'azione delle palette.

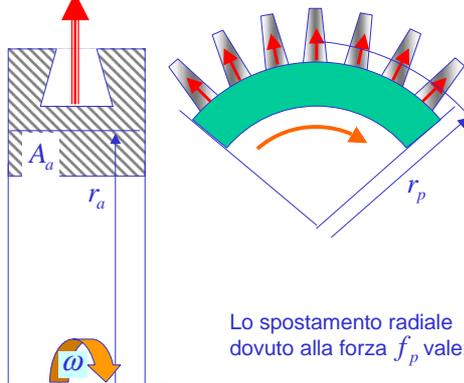
$$f_p = \frac{n_p m_p \omega^2 r_p}{2\pi r_a}$$

$n_p = \text{n° di palette}$

$m_p = \text{massa di una palette}$

$f_p = \text{forza inerziale delle palette per unità di lunghezza}$

$r_p = \text{raggio del baricentro di una palette}$



La tensione circonferenziale dovuta alla forza f_p si ottiene dall'equilibrio dell'anello:

$$\sigma = \frac{f_p 2r_a}{2A_a}$$

$$\sigma = \frac{f_p r_a}{A_a}$$

Lo spostamento radiale dovuto alla forza f_p vale:

$$w_a = \epsilon r_a = \frac{\sigma}{E} r_a = \frac{f_p r_a^2}{EA_a}$$

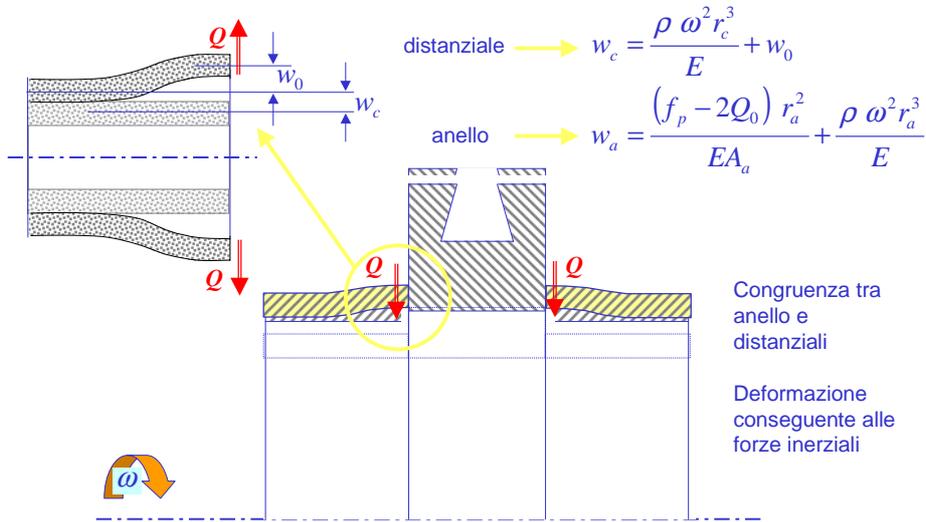
Lo spostamento radiale complessivo dell'anello, dovuto sia alla propria forza d'inerzia che all'effetto delle palette è dato quindi da:

$$w_a = \frac{f_p r_a^2}{EA_a} + \frac{\rho \omega^2 r_a^3}{E}$$

Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali

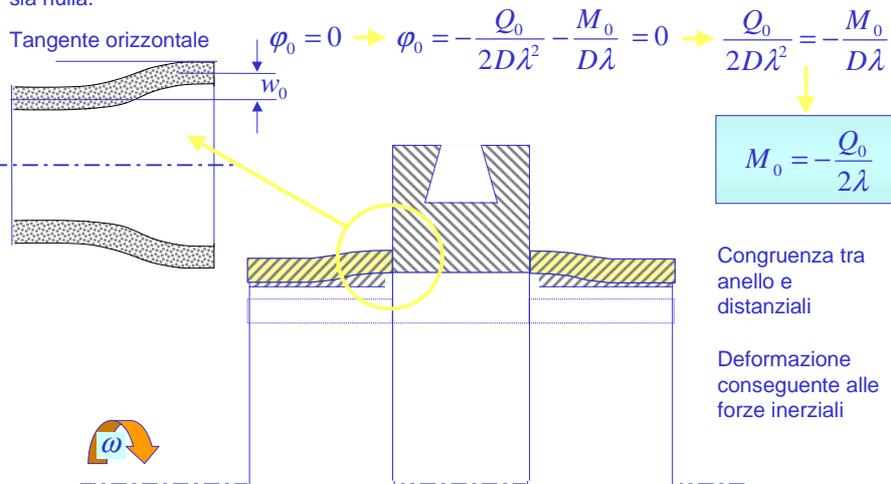
In generale si avrà $w_a \neq w_c$ pertanto, per rispettare la congruenza, dovranno verificarsi ulteriori spostamenti radiali, sia per l'anello che per il distanziale: $w_c + \Delta w_c = w_a + \Delta w_a$



Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali

Il distanziale ha una rigidezza flessionale, nel piano radiale, molto minore dell'anello, che pertanto può essere considerato rigido. In conseguenza di questa assunzione si può affermare che la rotazione del distanziale in corrispondenza della connessione con l'anello sia nulla.



Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali

La relazione: $M_0 = -\frac{Q_0}{2\lambda}$ garantisce, quindi, che le generatrici del distanziale si mantengano orizzontali in corrispondenza della connessione con l'anello.

Lo spostamento radiale w_0 può dunque essere scritto come segue:

$$w_0 = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} + \frac{M_0}{2D\lambda^2} = \frac{Q_0}{2D\lambda^3} - \frac{Q_0}{4D\lambda^3} = \frac{Q_0}{4D\lambda^3}$$

Lo spostamento radiale complessivo w_c è dato quindi dalla relazione:

$$w_c = \frac{\rho \omega^2 r_c^3}{E} + w_0 = \frac{\rho \omega^2 r_c^3}{E} + \frac{Q_0}{4D\lambda^3}$$

Per la congruenza gli spostamenti radiali w_c e w_a devono assumere lo stesso valore.

$$w_c = w_a \quad \rightarrow \quad \frac{\rho \omega^2 r_c^3}{E} + \frac{Q_0}{4D\lambda^3} = \frac{(f_p - 2Q_0) r_a^2}{EA_a} + \frac{\rho \omega^2 r_a^3}{E}$$

Da questa equazione è possibile calcolare il valore dell'unica incognita Q_0

Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali

$$\frac{\rho \omega^2 r_c^3}{E} + \frac{Q_0}{4D\lambda^3} = \frac{(f_p - 2Q_0) r_a^2}{EA_a} + \frac{\rho \omega^2 r_a^3}{E}$$

$$Q_0 = \frac{A_a \rho \omega^2 (r_a^3 - r_c^3) + r_a^2 f_p}{\frac{EA_a}{4D\lambda^3} + 2r_a^2}$$

La relazione esistente tra la forza radiale ed il momento consente di calcolare quest'ultimo:

$$M_0 = -\frac{Q_0}{2\lambda} = -\frac{A_a \rho \omega^2 (r_a^3 - r_c^3) + r_a^2 f_p}{2\lambda \left(\frac{EA_a}{4D\lambda^3} + 2r_a^2 \right)}$$

Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali

Dai valori di Q_0 ed M_0 è possibile calcolare tutte le altre grandezze di interesse

relative al distanziale: $Q_{(x)} = -\sqrt{2}Q_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\lambda M_0 e^{-\lambda x} \sin(\lambda x)$

$$M_{(x)} = \frac{Q_0}{\lambda} e^{-\lambda x} \sin \lambda x + \sqrt{2}M_0 e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Spostamento radiale

$$w_{(x)} = \frac{\rho \omega^2 r_c^3}{E} \left[\frac{Q_0}{2D\lambda^3} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{M_0}{\sqrt{2}D\lambda^2} e^{-\lambda x} \sin\left(\lambda x + \frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

Componente relativa alla dilatazione inerziale

Componente relativa alla forza radiale Q_0

Componente relativa al momento flettente M_0

Dal momento M_0 dipende la componente flessionale dello stato di tensione:

Componente assiale

$$\sigma_{a(x)} = \frac{6M_{(x)}}{h_c^2}$$

Componente circonferenziale

$$\sigma_{c(x)} = \frac{E w_{(x)}}{r_c} + \frac{\nu 6M_{(x)}}{h_c^2}$$

Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali

Esempio di calcolo

Dati:

Geometria:
(dimensioni in m)

$$\phi_{ea} = 0.76$$

$$\phi_{ia} = 0.60$$

$$\phi_{ec} = 0.63$$

$$\phi_{ic} = 0.62$$

$$L_a = 0.05$$

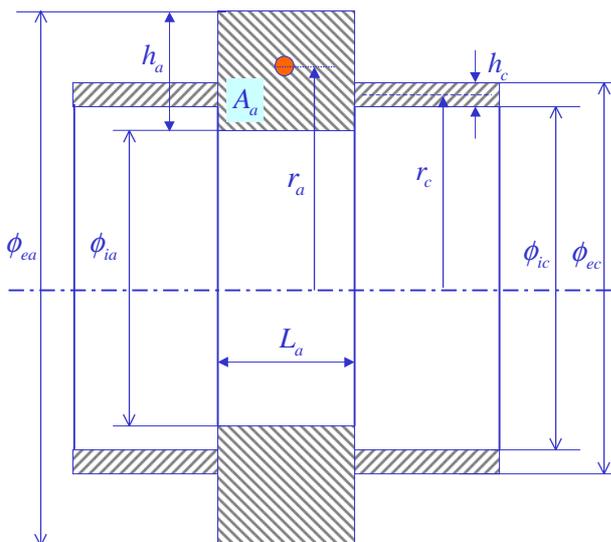
$$r_a = \frac{\phi_{ea} + \phi_{ia}}{4} = 0.34$$

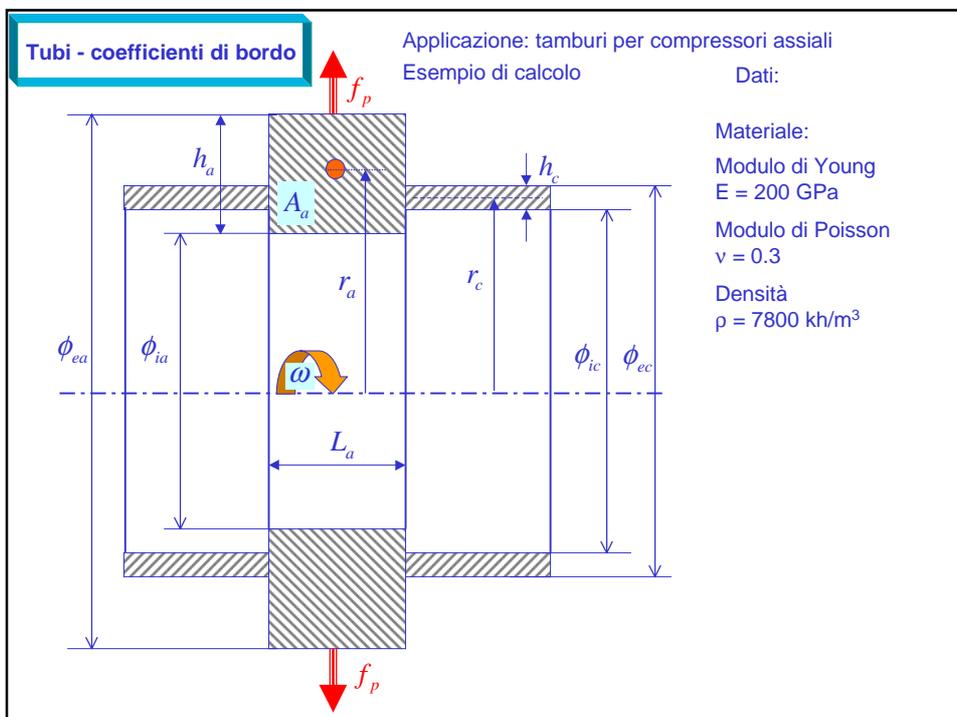
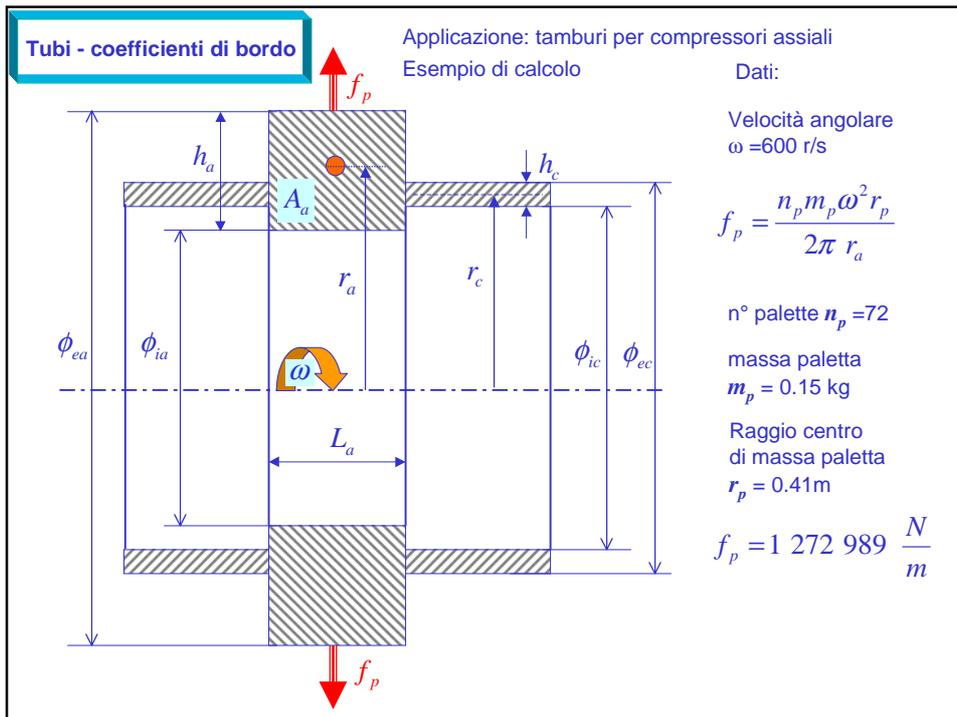
$$r_c = \frac{\phi_{ec} + \phi_{ic}}{4} = 0.3125$$

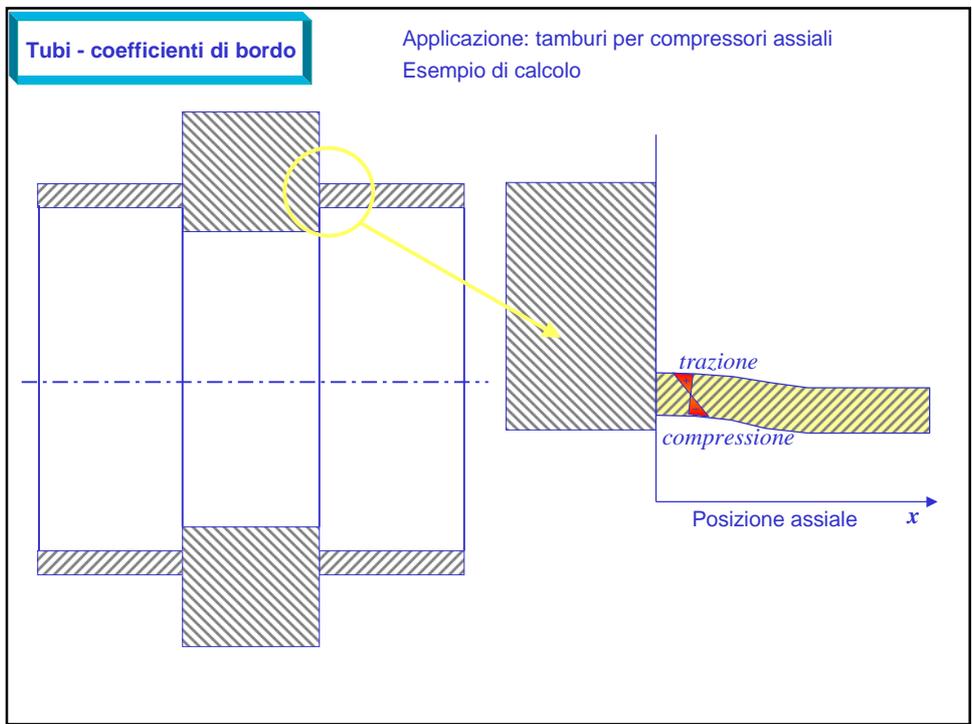
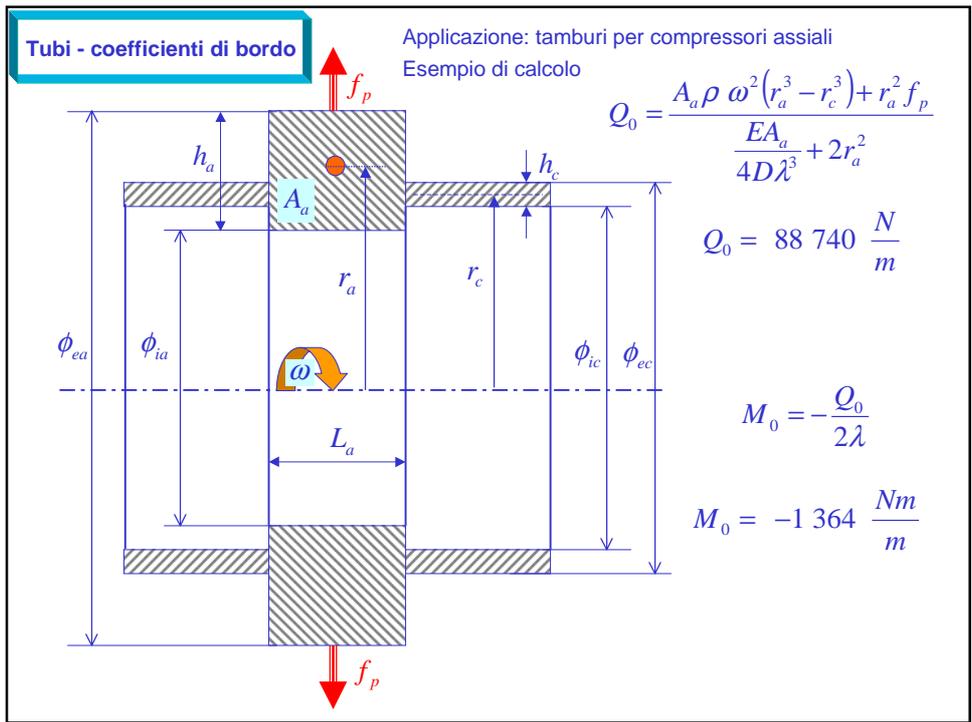
$$h_a = \frac{\phi_{ea} - \phi_{ia}}{2} = 0.08$$

$$h_c = \frac{\phi_{ec} - \phi_{ic}}{2} = 0.05$$

$$A_a = h_a L_a = 0.004$$



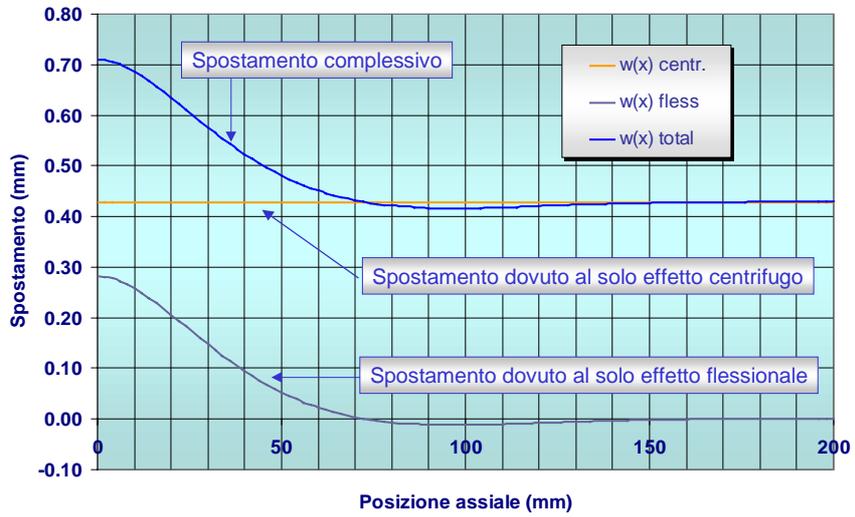




Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali
Esempio di calcolo

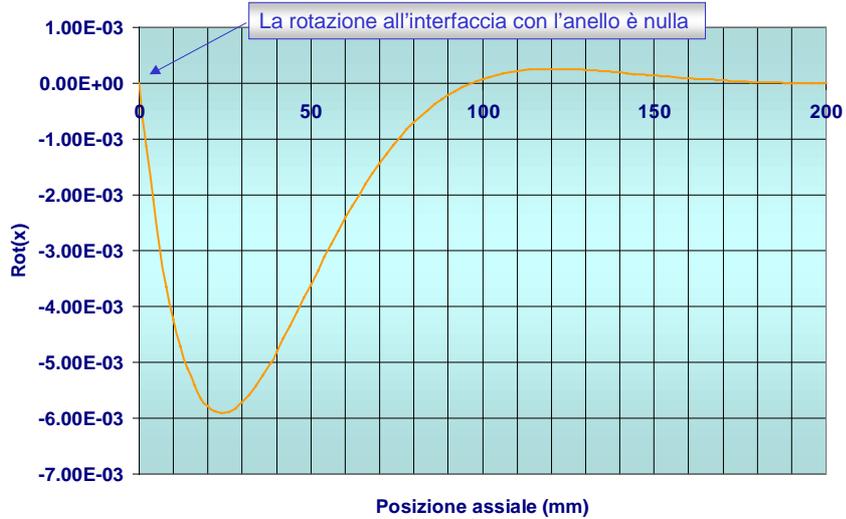
Spostamento radiale distanziale



Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali
Esempio di calcolo

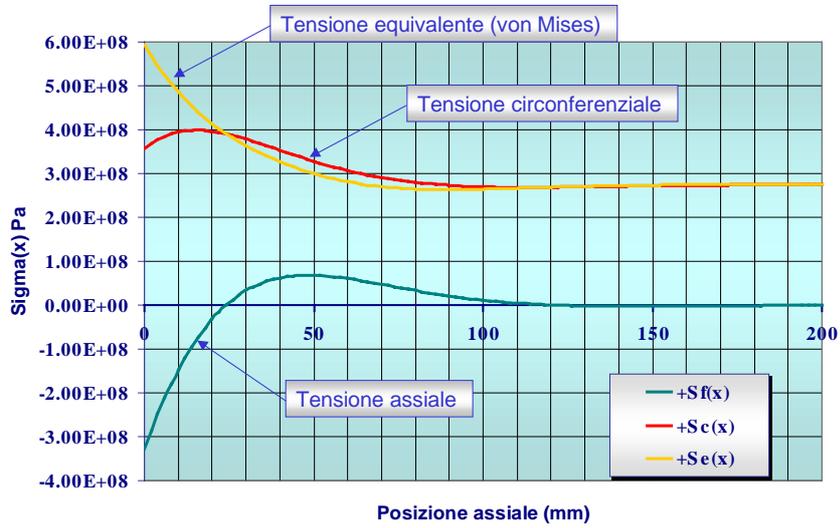
Rotazione distanziale



Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali
Esempio di calcolo

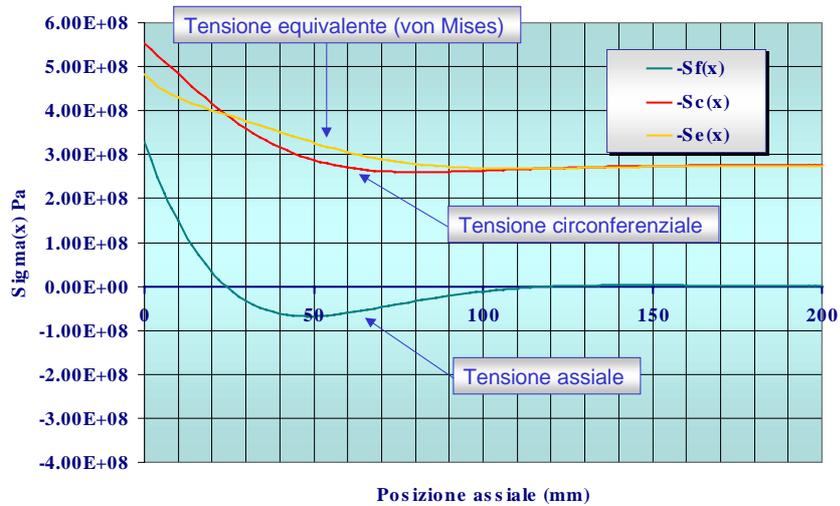
Tensioni sulla superficie interna del distanziale



Tubi - coefficienti di bordo

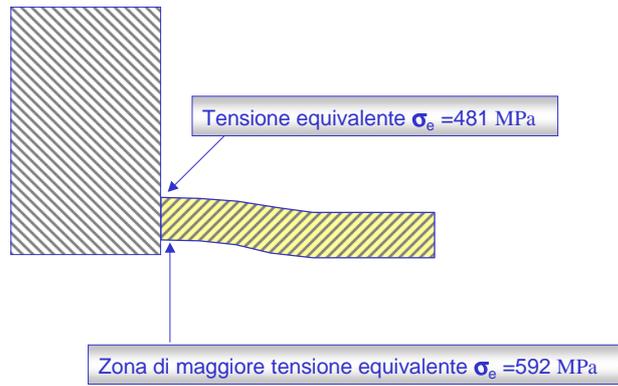
Applicazione: tamburi per compressori assiali
Esempio di calcolo

Tensioni sulla superficie esterna del distanziale



Tubi - coefficienti di bordo

Applicazione: tamburi per compressori assiali
Esempio di calcolo



Tubi - coefficienti di bordo

