



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

COSTRUZIONE DI MACCHINE

COMPORTAMENTO MATERIALI

a cura di Luca Cortese e Gabriele Cortis

Bozza 0.1, 2025



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

STATO DI TENSIONE E DEFORMAZIONE RICHIAMI TEORICI



Stato di tensione

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \text{ 6 componenti indipendenti} \xrightarrow{\text{nel riferimento principale}} \bar{\bar{\sigma}}_{princ} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \text{ 6 componenti indipendenti, dove } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \text{ con } i \neq j \xrightarrow{\text{nel riferimento principale}} \bar{\bar{\varepsilon}}_{princ} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Le tre tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ si ricavano ponendo il seguente determinante pari a zero e trovando le incognite σ :

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma| = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \longrightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

Stato di tensione

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = tr(\bar{\sigma}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[(tr\bar{\sigma})^2 - tr(\bar{\sigma}^2)] = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

$$I_3 = det(\bar{\sigma}) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{xy}^2 + \sigma_y\tau_{yz}^2 + \sigma_z\tau_{zx}^2)$$

Invarianti del
tensore delle
tensioni, sono
indipendenti
dal sistema di
riferimento

Si possono ricavare i coseni direttori (l, m, n) delle tre tensioni principali, sostituendo in δ , una alla volta, le $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ trovate in precedenza, e risolvendo il sistema:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \delta & \tau_{yz} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \delta & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = 0$$

Stato di tensione

Ipotizzando $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, gli invarianti nel riferimento principale risultano:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{array} \right.$$

- Se lo stato di tensione è piano (es. $\sigma_3 = 0$), oppure se il problema è assialsimmetrico, una delle tensioni principali è nella direzione di simmetria ed è facile da individuare. In questi casi si trovano facilmente le altre due tensioni tramite la costruzione grafica con i cerchi di Mohr
- Il vantaggio di lavorare con gli invarianti è che si possono calcolare partendo da un $\bar{\sigma}$ generico non principale grazie alla non dipendenza dal sistema di riferimento

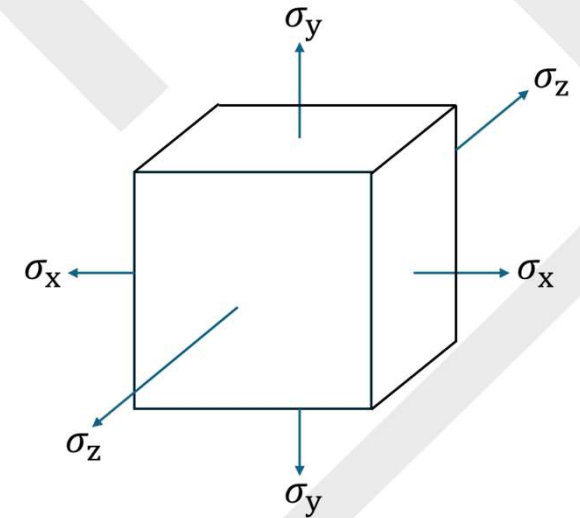
Stato di tensione

Generico stato di tensione = parte idrostatica + parte deviatorica

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_m + s_{ij}$$

Stato idrostatico, rif. principale:

$$\bar{\sigma} = \bar{p} + \bar{s} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$



Stato idrostatico (o stato sferico): $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ e $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ovvero $\bar{s} = s_{ij} = 0$

Tensore idrostatico $\bar{p} = p_{ij} = \delta_{ij}\sigma_m$ dove $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1$

è una tensione media

Stato di tensione

Generico stato di tensione = parte idrostatica + parte deviatorica

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_m + s_{ij}$$

$$\bar{\sigma} = \bar{p} + \bar{s} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

Tensore deviatorico, nel sistema di riferimento generico:

$$\bar{s} = s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix}$$

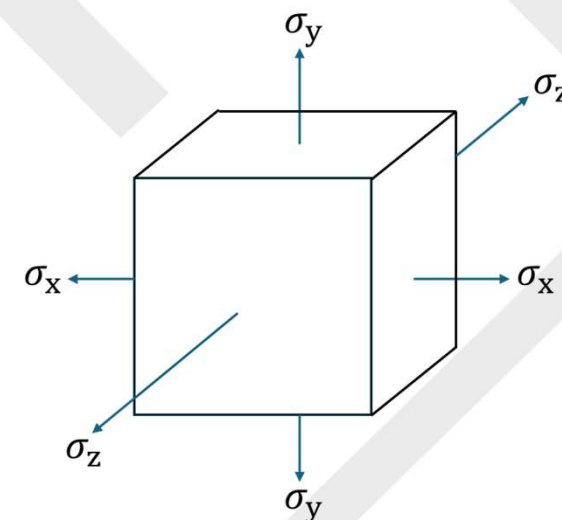
Nel riferimento principale: $s_i = \sigma_i - \sigma_m$ con $i = 1, 2, 3$

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$

$$s_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}$$

$$s_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{3}$$



Stato di tensione

Generico stato di tensione = parte idrostatica + parte deviatorica

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_m + s_{ij}$$

Analogamente al tensore delle tensioni, anche per il tensore deviatorico possono essere calcolati gli invarianti: J_1, J_2, J_3

$$s^3 - J_1 s^2 + J_2 s - J_3 = 0$$

Esprese tramite le componenti s_i

$$J_1 = \text{tr}(\bar{s}) = s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0 \quad (\text{sempre nullo})$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(I_1^2 - 3I_2) = -(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

$$J_3 = \frac{1}{27}(2I_1^3 + 9I_1 I_2 + 27I_3) = \det(\bar{s}) = s_1 s_2 s_3$$

Esprese tramite le componenti σ_i

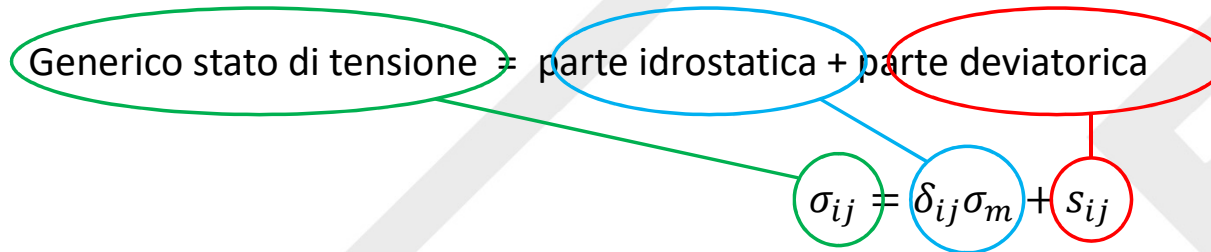
$$J_1 \equiv 0$$

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (\text{principale})$$

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (\text{non principale})$$

$$J_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \quad (\text{principale})$$

Stato di tensione



Componente idrostatica \bar{p}

- comporta solo variazione di volume e non di forma
- non influenza né lo snervamento né il comportamento plastico nei metalli duttili

Componente deviatorica \bar{s}

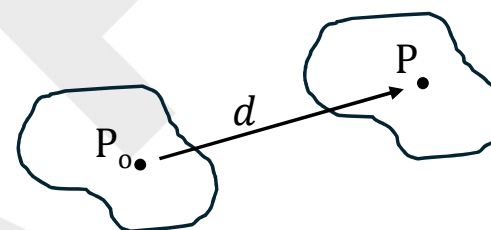
- comporta solo variazione di forma e non di volume
- ha un ruolo fondamentale sullo snervamento e sul danneggiamento/rottura dei materiali duttili

Tali affermazioni non dipendono dal materiale e valgono sia in campo elastico che in campo plastico

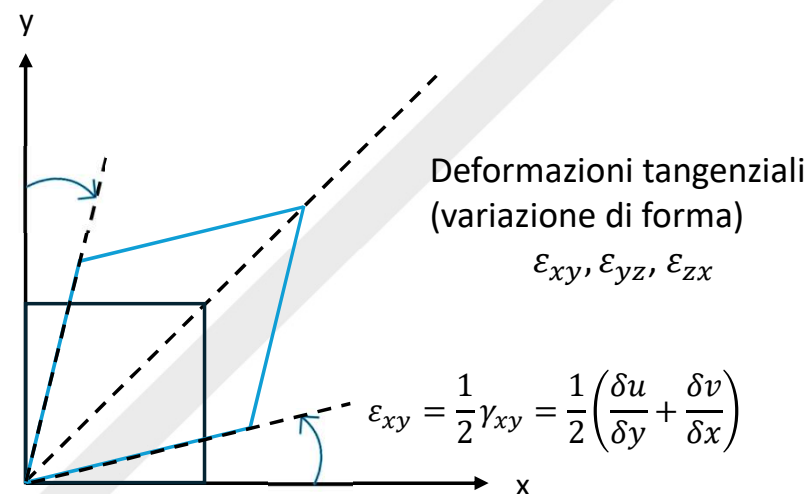
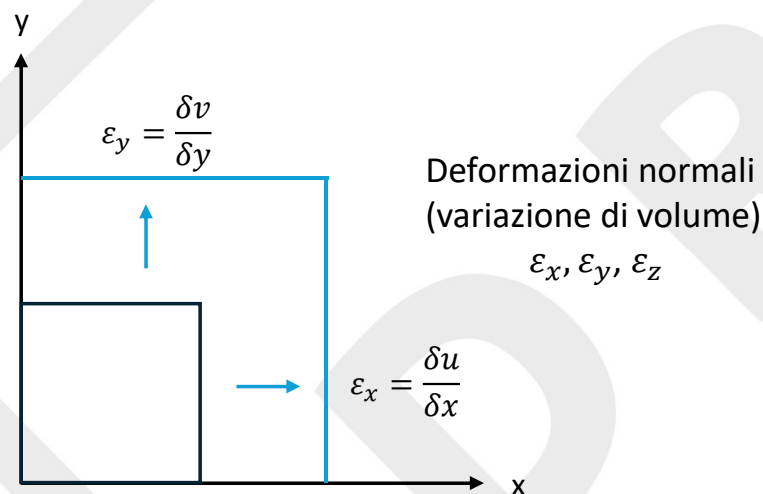
Stato di deformazione

Per piccoli spostamenti, il tensore delle deformazioni $\bar{\varepsilon}$ è definito:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) & \frac{\delta v}{\delta y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y} \right) & \frac{\delta w}{\delta z} \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} P_o &= (x_o, y_o, z_o) \\ P &= (x, y, z) \\ d &= (u, v, w) \end{aligned}$$



Stato di deformazione

Analogamente alle tensioni, esistono tre deformazioni principali ε_1 , ε_2 , ε_3 e si ricavano sempre tramite azzeramento del seguente determinante:

$$|\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon| = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} \longrightarrow \varepsilon^3 - I'_1\varepsilon^2 + I'_2\varepsilon - I'_3 = 0$$

$$= 0$$

Nel riferimento generico

$$I'_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I'_2 = -(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2$$

$$I'_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz} - (\varepsilon_x\varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_y\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_z\varepsilon_{xy}^2)$$

Nel riferimento principale

$$I'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$I'_2 = -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1)$$

$$I'_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

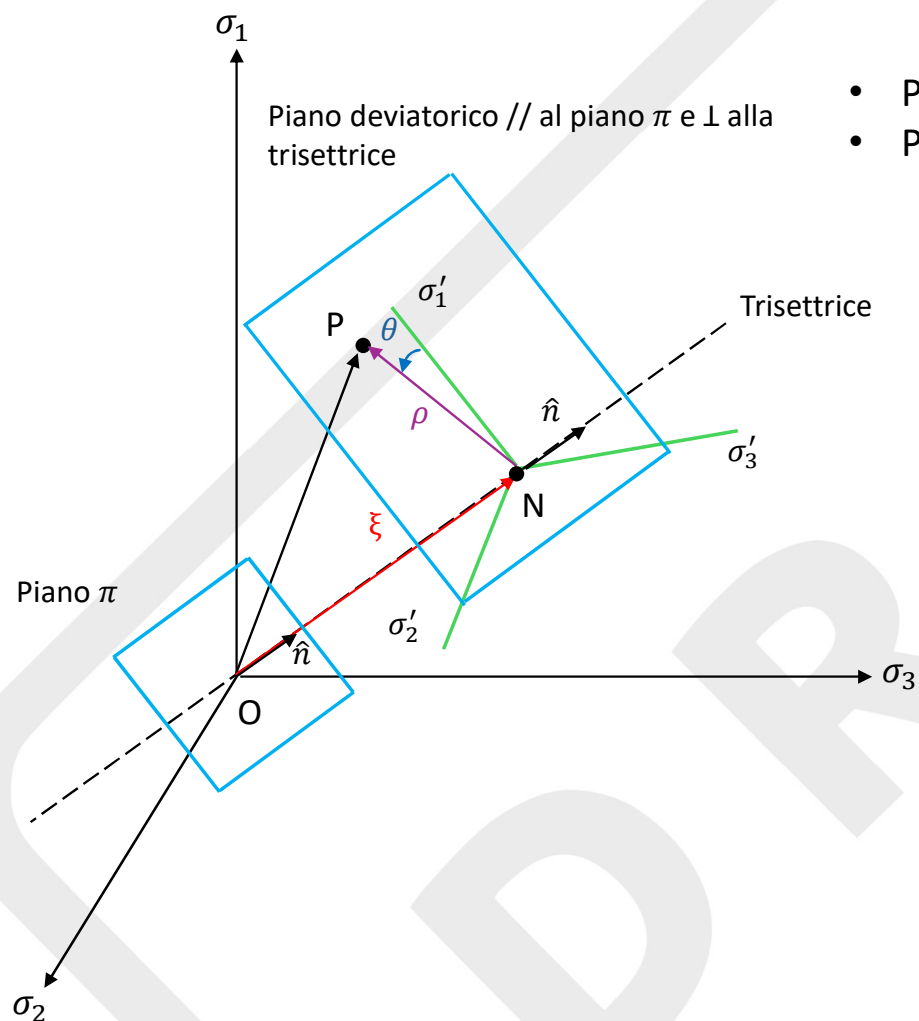
Per materiali omogenei e isotropi le direzioni principali delle tensioni e delle deformazioni sono coincidenti



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

COORDINATE DI HAIGH–WESTERGAARD

Coordinate di Haigh–Westergaard

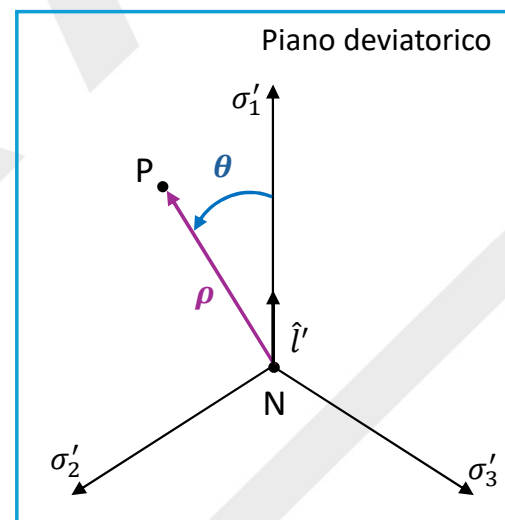


- Punto $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$: generico stato tensionale nello spazio delle tensioni
- Piano deviatorico: piano ortogonale alla trisettrice e passante per P

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP}$$

vettore che giace sul piano deviatorico $|\overrightarrow{ON}| = \xi$

proiezione sulla trisettrice $|\overrightarrow{NP}| = \rho$

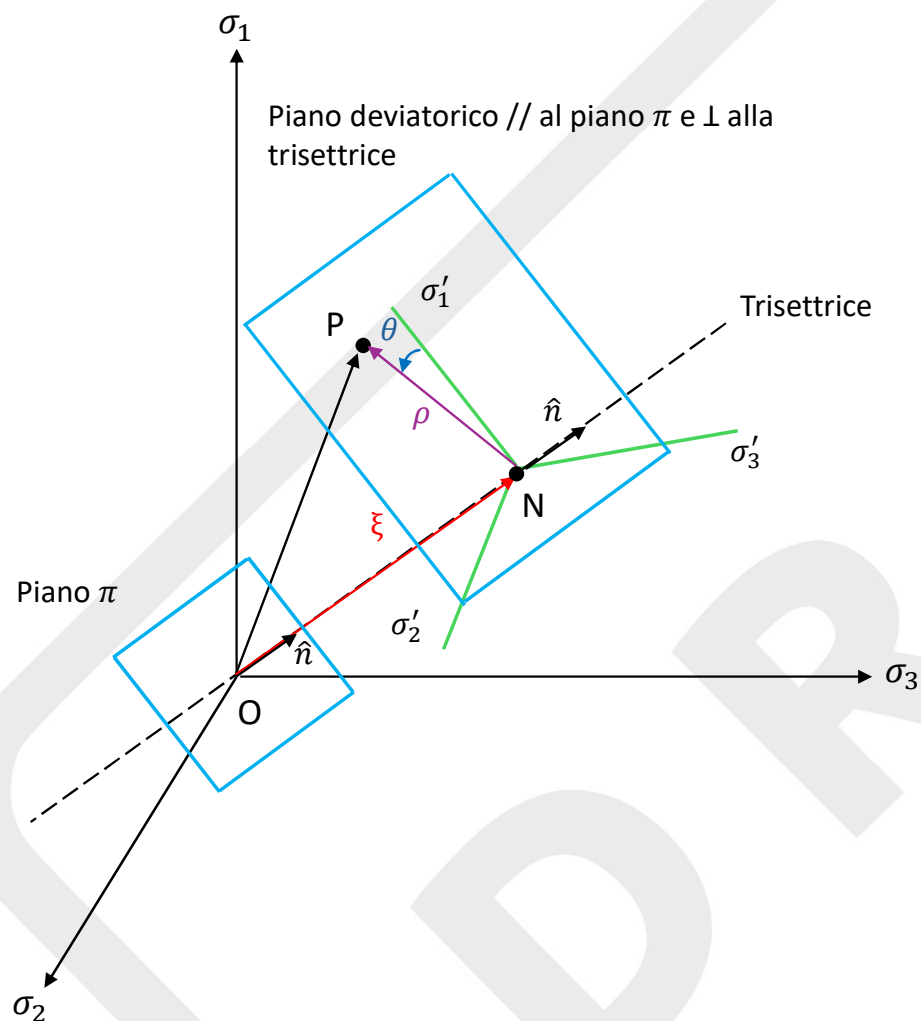


$\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ sono le proiezioni degli assi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sul piano deviatorico

$\theta = \text{Angolo di Lode}$

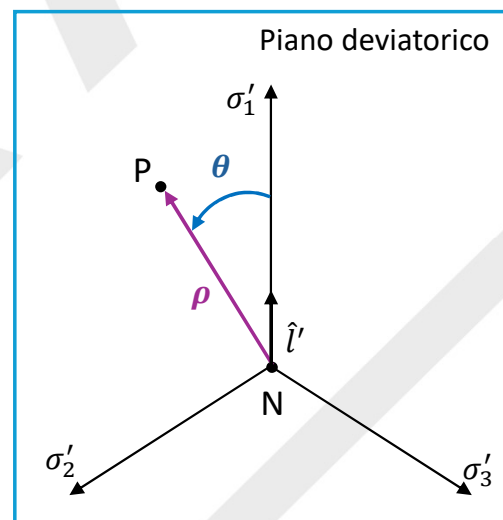
Angolo che si forma tra σ'_1 e \overrightarrow{NP} (ovvero ρ)

Coordinate di Haigh–Westergaard



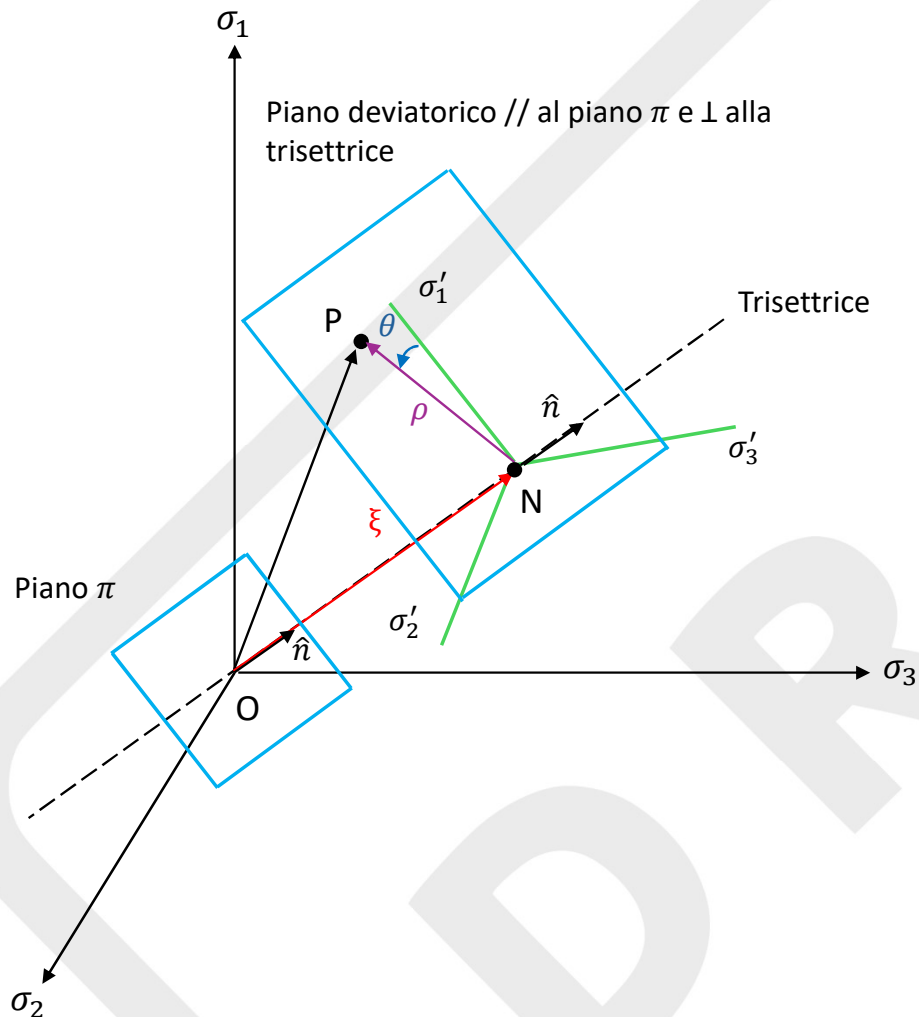
Le grandezze ρ e θ sono le coordinate polari del punto P sul piano deviatorico

Generico stato tensionale P descritto da una nuova terna di coordinate: $P \equiv (\xi, \rho, \theta)$, sono chiamate coordinate di Haigh–Westergaard, da cui il nome “spazio di Haigh–Westergaard”



La criticità dello stato tensionale allo snervamento e alla rottura (danneggiamento) dipende da queste tre grandezze.

Coordinate di Haigh–Westergaard



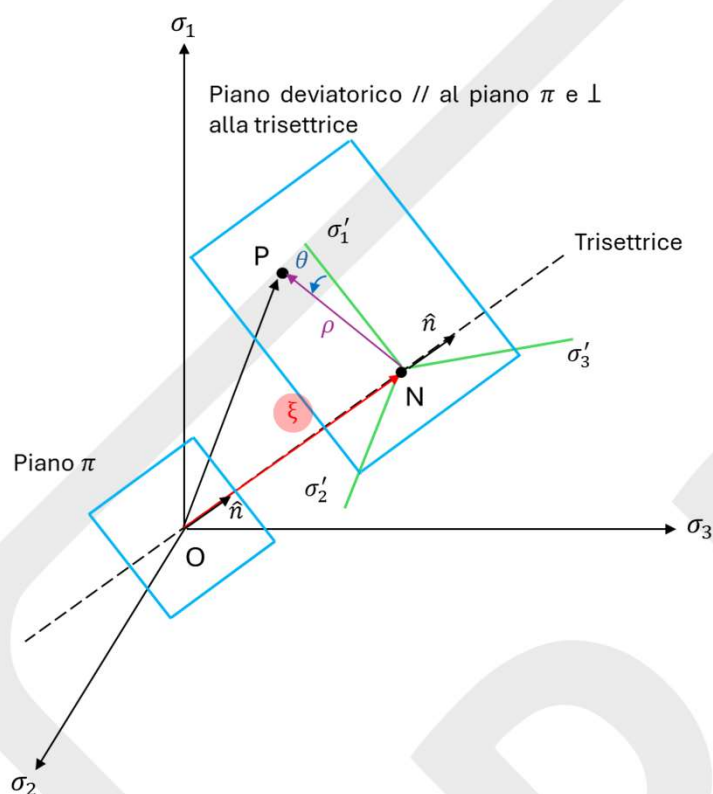
- Punti appartenenti alla trisettrice: stati tensionali idrostatici: ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$; $s_1 = s_2 = s_3 = 0$)
- La componente idrostatica dello stato di tensione è pari alla distanza del piano deviatorico dall'origine
- Piano deviatorico: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sqrt{3} \xi$
- Piano π (// al piano deviatorico, passante per l'origine):

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$
- La direzione della trisettrice è definita dal suo versore \hat{n} :

$$\hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Coordinate di Haigh–Westergaard

Relazione tra (ξ, ρ, θ) , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e (I_1, J_2, J_3) - **Coordinata ξ**



$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

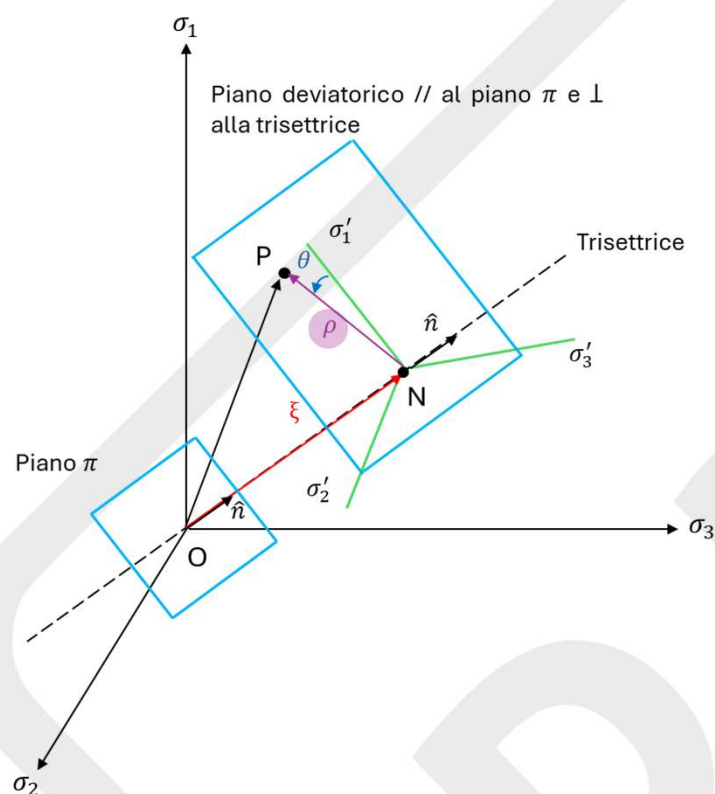
$$\xi = \hat{n}^T \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_3 = \sqrt{3} \sigma_m = \frac{I_1}{\sqrt{3}}$$

La coordinata ξ di *Haigh-Westergaard* è proporzionale alla parte sferica σ_m (o parte idrostatica) del tensore delle tensioni, ovvero al primo invariante del tensore delle tensioni I_1

$$\overrightarrow{ON} = \xi \hat{n} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{I_1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sigma_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix}$$

Coordinate di Haigh–Westergaard

Relazione tra (ξ, ρ, θ) , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e (I_1, J_2, J_3) - **Coordinata ρ**



Conoscendo \overrightarrow{OP} e \overrightarrow{ON} , si ricava \overrightarrow{NP} e si calcola il suo modulo ρ

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

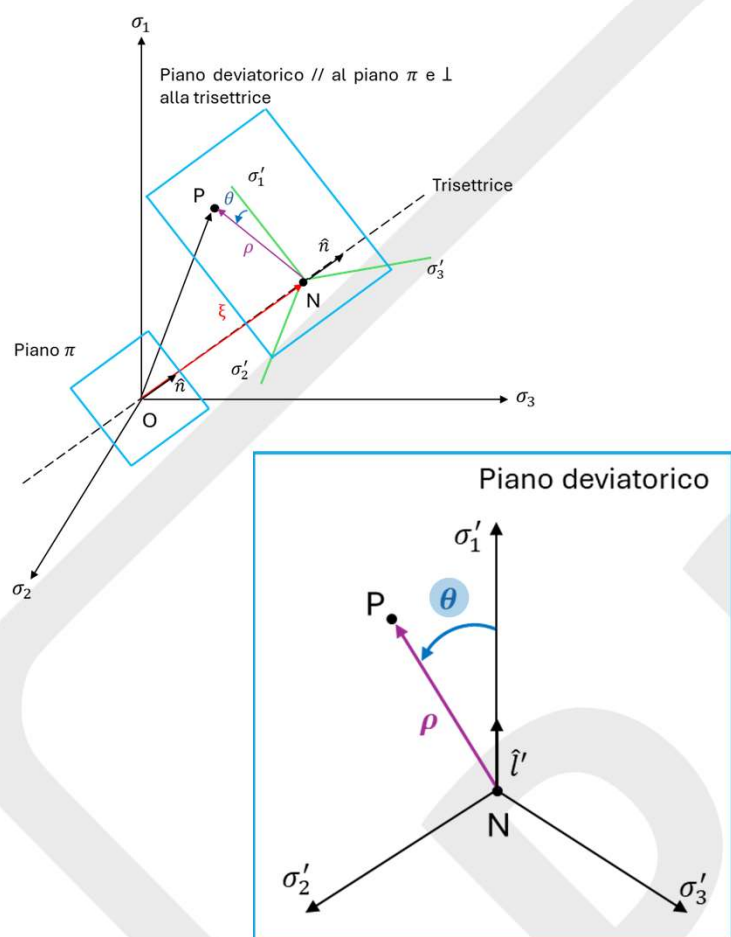
$$\rho = |\overrightarrow{NP}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2}$$

$$\text{dove: } J_2 = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$$

La coordinata ρ di *Haigh-Westergaard*, è proporzionale alla parte deviatorica del tensore delle tensioni, ovvero al secondo invariante del tensore deviatorico J_2 .

Coordinate di Haigh–Westergaard

Relazione tra (ξ, ρ, θ) , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e (I_1, J_2, J_3) - **Coordinata θ**



$$\hat{l}' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ è il versore dell'asse } \sigma'_1$$

La proiezione del vettore \overrightarrow{NP} sull'asse σ'_1 risulta:

$$\hat{l}'^T \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{1}{\sqrt{6}} [2 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \frac{2s_1 - s_2 - s_3}{\sqrt{6}} = \rho \cos \theta$$

Essendo $s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0 \rightarrow s_1 = -s_2 - s_3$ allora:

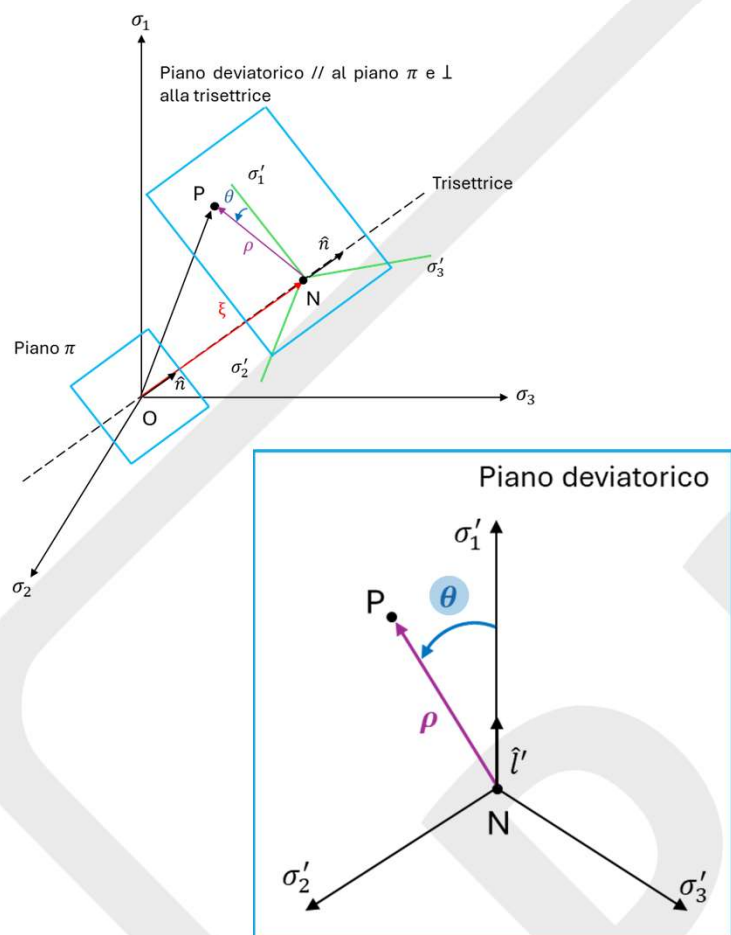
$$\sqrt{\frac{3}{2}} s_1 = \rho \cos \theta$$

Ricordando che $\rho = \sqrt{2J_2}$, risulta:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3} s_1}{2 J_2}$$

Coordinate di Haigh–Westergaard

Relazione tra (ξ, ρ, θ) , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e (I_1, J_2, J_3) - **Coordinata θ**



Utilizzando la relazione trigonometrica: $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2 J_2^{3/2}} s_1 (s_1^2 - J_2)$$

$$\text{dove: } s_1^2 - J_2 = s_1^2 - \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2^2 - s_3^2) = \frac{1}{2}[(-s_2 - s_3)^2 - s_2^2 - s_3^2] = s_2 s_3$$

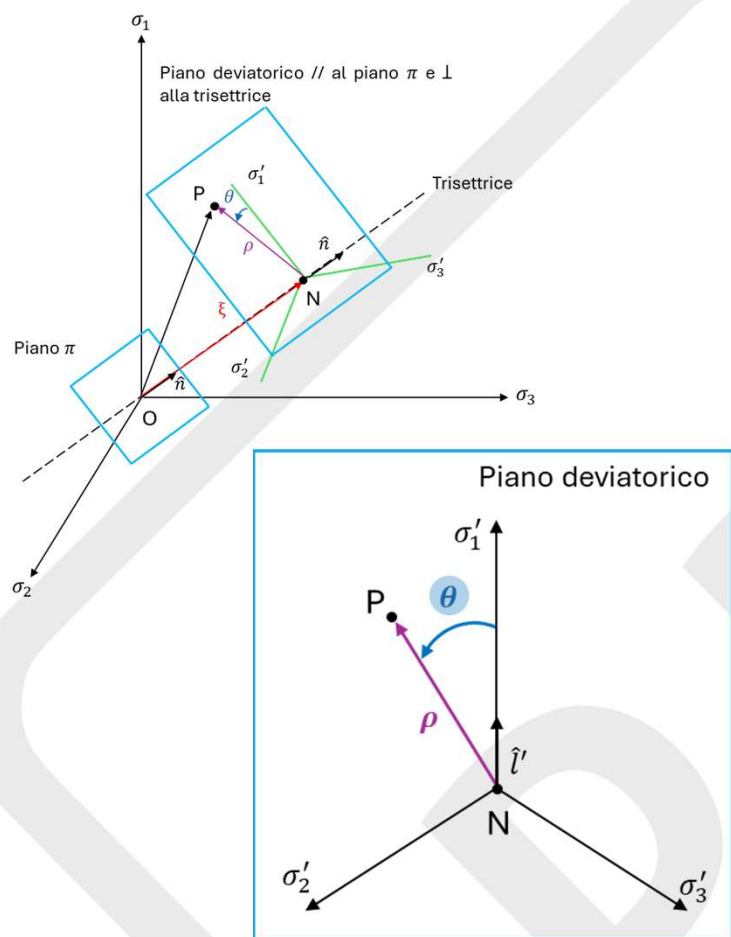
$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2 J_2^{3/2}} s_1 s_2 s_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} = X \quad \text{Parametro deviatorico}$$

Il dominio di θ e di conseguenza di X risulta:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \rightarrow -1 \leq X \leq 1$$

Coordinate di Haigh–Westergaard

Relazione tra (ξ, ρ, θ) , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e (I_1, J_2, J_3) - **Coordinata θ**



Ricordando il criterio di snervamento di Von Mises

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

e riprendendo la relazione di J_2 nel riferimento principale

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

si ottiene:

$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{3J_2} \quad ; \quad J_2 = \frac{(\sigma_{eq}^{VM})^2}{3}$$

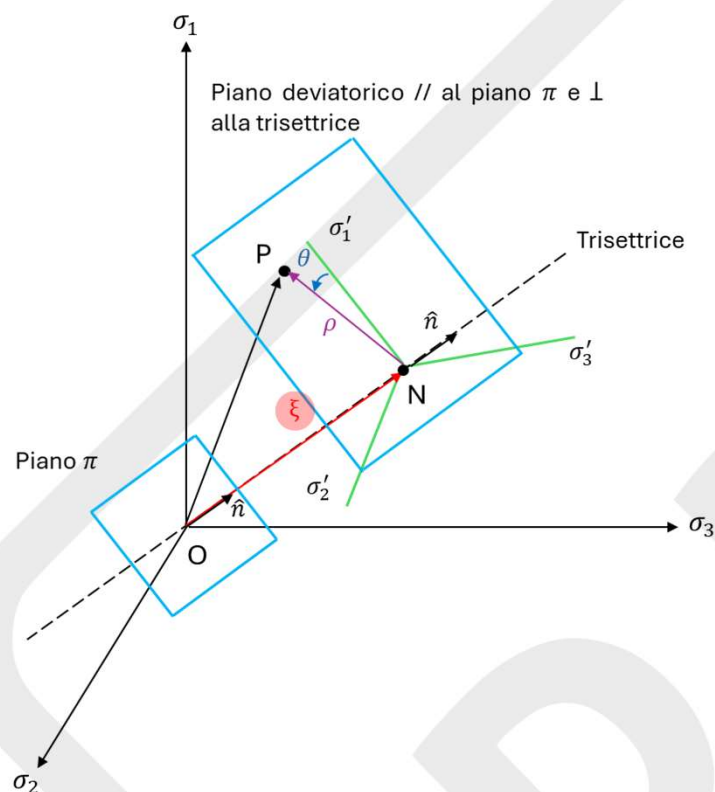
Quindi il parametro deviatorico X si può riscrivere come:

$$X = \frac{27}{2} \frac{J_3}{(\sigma_{eq}^{VM})^3}$$

Si noti che X è adimensionale, ovvero è normalizzato rispetto a σ_{eq}^{VM}

Coordinate di Haigh–Westergaard

Relazione tra (ξ, ρ, θ) , $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e (I_1, J_2, J_3) - **Coordinata ξ**



Per convenienza viene normalizzata anche la grandezza ξ , ovvero la tensione idrostatica σ_m :

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}^{VM}} = \frac{I_1}{3} \frac{1}{\sigma_{eq}^{VM}} = \frac{I_1}{3\sqrt{3J_2}} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{3J_2}} = T \quad \text{Triassialità}$$

T e X sono adimensionali, essi descrivono la componente idrostatica σ_m e il terzo invariante del tensore deviatorico J_3 , rispettivamente.

Entrambi sono normalizzati rispetto alla tensione equivalente di Von Mises σ_{eq}^{VM}

Coordinate di Haigh–Westergaard

Riassumendo:

- $\xi \rightarrow$ componente idrostatica del tensore delle tensioni, dipende da I_1
- $\rho \rightarrow$ componente deviatorica del tensore delle tensioni, dipende da s_1, s_2, s_3 , ovvero da J_2
- $\theta \rightarrow$ dipende dalle componenti deviatoriche, ovvero dipende J_2, J_3

Il punto P si può descrivere in tre differenti modi:

- $P = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ coordinate principali
- $P = (\xi, \rho, \theta)$ coordinate di Haigh–Westergaard
- $P = (I_1, J_2, J_3)$ coordinate in termini degli invarianti

Nei materiali duttili lo snervamento dipende solo da J_2 (von Mises) o da J_2, J_3 (Tresca) ovvero è funzione solo di ρ o ρ, θ . Quindi, sia per il criterio di Von Mises che per quello di Tresca lo snervamento non dipende dalla componente idrostatica, ma solo da quella deviatorica. Al contrario, il danneggiamento è funzione degli invarianti I_1, J_2, J_3 .



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

COMPORTAMENTO ELASTICO ISOTROPO

Comportamento elastico isotropo

Legge di Hooke: $\sigma = E \varepsilon$

Legame costitutivo: $[\varepsilon] =$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

In forma compatta risulta:

$$[\varepsilon] = [D]^{-1}[\sigma]$$

Esclusivamente in campo elastico e per materiali con comportamento isotropo la relazione è biunivoca e si può riscrivere:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon]$$

Il termine E è il modulo di Young o di elasticità, il termine ν è il coefficiente di Poisson, mentre il termine G è il modulo elastico tangenziale (o modulo di taglio) che è pari a:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Comportamento elastico isotropo

Legge di Hooke: $\sigma = E \varepsilon$

Legame costitutivo: $[\varepsilon] =$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Non c'è accoppiamento tra deformazioni tangenziali e tensioni normali

Non c'è accoppiamento tra deformazioni normali e tensioni tangenziali

Non c'è effetto Poisson per le componenti tangenziali

Nel riferimento principale basta annullare i termini ε_{ij} e τ_{ij} con $i \neq j$, quindi la relazione risulta:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Per materiali isotropi le direzioni principali di tensioni e deformazioni coincidono.

Comportamento elastico isotropo

Le singole componenti valgono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G} \tau_{zx} \end{array} \right.$$

Nel riferimento principale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] + \alpha \Delta T \end{array} \right.$$

Definire una relazione più compatta per scrivere la legge di Hooke generalizzata per tutte e sei le componenti

Comportamento elastico isotropo

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} + \alpha \Delta T + \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G} \sigma_x - \frac{\nu}{E} I_1 + \alpha \Delta T$$

$$\rightarrow (\bar{\varepsilon}) \rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left(\frac{\nu}{E} I_1 - \alpha \Delta T \right)$$

$\delta_{ij} = 0$ per componenti tangenziali

$\delta_{ij} \neq 0$ per componenti normali

Per le tensioni si riscrive come:

$$\rightarrow (\bar{\sigma}) \rightarrow \sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \alpha \Delta T) + \delta_{ij} \lambda (I_1' - 3\alpha \Delta T) \quad I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad ; \quad I_1' = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Il termine λ è una delle due costanti di *Lamé* (l'altra è G) e vale:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Comportamento elastico isotropo

In campo elastico per materiale isotropo, la legge di Hooke per tensioni deviatoriche (\bar{s}) e deformazioni deviatoriche (\bar{e}) è pari a:

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij}$$

A seguire i passaggi per ricavare la relazione:

$$I_1' = \left[\frac{1}{2G} \sigma_x - \delta_{ij} \left(\frac{\nu}{E} I_1 - \alpha \Delta T \right) \right] + \left[\frac{1}{2G} \sigma_y - \delta_{ij} \left(\frac{\nu}{E} I_1 - \alpha \Delta T \right) \right] + \left[\frac{1}{2G} \sigma_z - \delta_{ij} \left(\frac{\nu}{E} I_1 - \alpha \Delta T \right) \right]$$

$$I_1' = \frac{1-2\nu}{E} I_1 + 3\alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_m = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m + \alpha \Delta T \quad \text{deformazione idrostatica}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \delta_{ij} \left(\frac{\nu}{E} 3\sigma_m - \alpha \Delta T + \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m + \alpha \Delta T \right) \quad \text{componente deviatorica}$$

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{ij} - \sigma_m) = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij}$$

$$J_1' = J_1 = 0$$

$$J_2' = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \frac{J_2}{(2G)^2}$$

$$J_3' = e_1 e_2 e_3 = \frac{J_3}{(2G)^3}$$

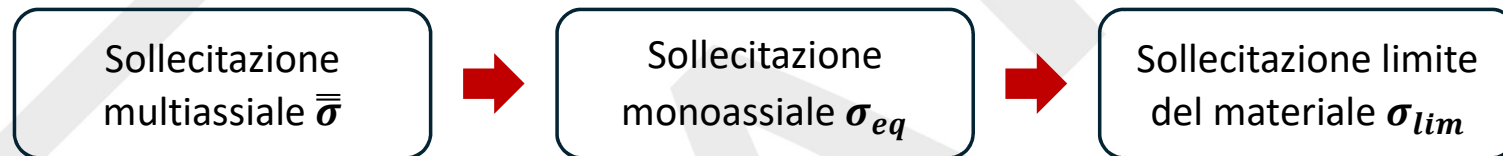


SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

CRITERI E SUPERFICI DI SNERVAMENTO

Criteri di snervamento

I criteri di snervamento legano la pericolosità dello stato tensionale multiassiale con la pericolosità di uno stato equivalente uniassiale (monoassiale).



Generalmente lo stato monoassiale limite comunemente impiegato per il confronto è ricavato dalla prova di trazione, in quanto è il test meccanico più semplice da eseguire.

Di seguito si riportano il criterio di snervamento di Tresca e quello di Von Mises, normalmente impiegati per i materiali duttili.

Criteri di snervamento: Tresca (criterio del massimo sforzo tangenziale)

Il materiale duttile arriva a snervamento quando lo sforzo tangenziale massimo (taglio massimo) arriva ad un valore limite: $\tau_{max} = \tau_{lim}$

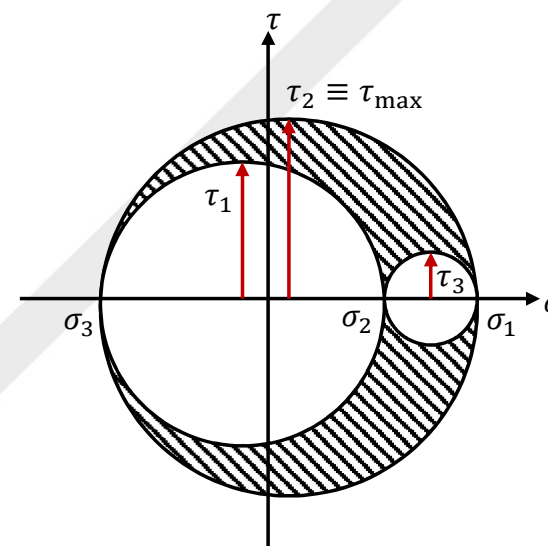
Ricordando i cerchi di Mohr:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{max} = 2\tau_{lim}$$

Il materiale in sollecitazione multiassiale arriva a snervamento quando la tensione equivalente raggiunge la tensione di snervamento a trazione. Nel caso le tre tensioni principali siano così ordinate $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, risulta:

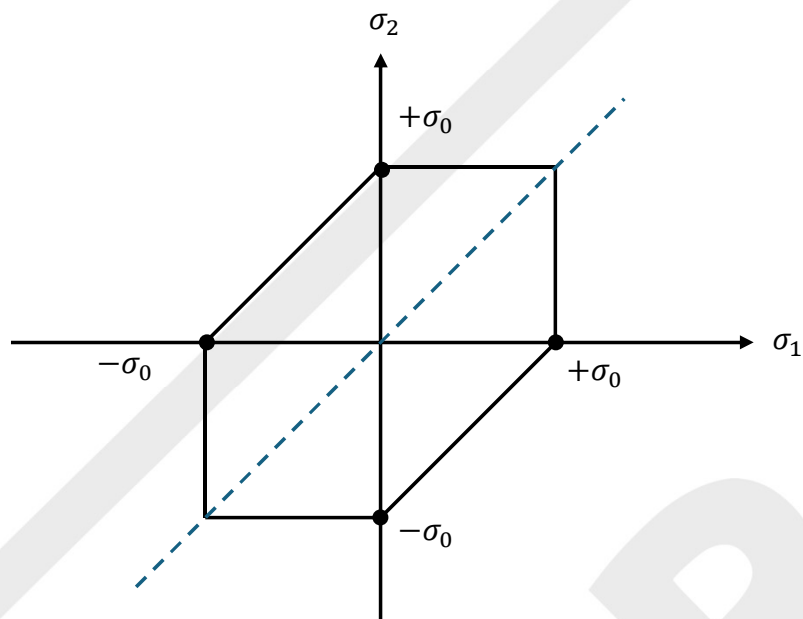
$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{lim}^{Traz} = \sigma_0$$

➔ $\tau_{lim}^{TRESKA} = \frac{\sigma_0}{2}$



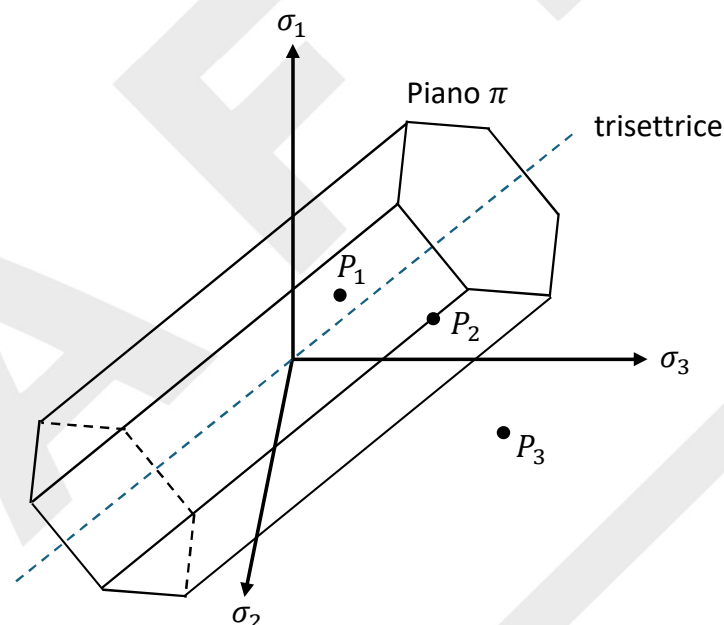
Criteri di snervamento: Tresca (criterio del massimo sforzo tangenziale)

Caso 2D (tensione piana $\sigma_3 = 0$)



Per i materiali duttili si può assumere con buona approssimazione che i limiti di snervamento a compressione e trazione siano (in modulo) uguali

Caso 3D



P_1 è interno alla superficie di snervamento di Tresca, la sollecitazione è in campo elastico; $\sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_0$

P_2 si trova sulla superficie: il materiale si trova in condizioni di incipiente plasticizzazione; $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0$

P_3 si trova "esterno" alla superficie di Tresca: sollecitazione in campo plastico; $\sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_0$

Criteri di snervamento: Von Mises (massima energia di distorsione)

Per materiali duttili, la condizione di snervamento si raggiunge quando l'energia di distorsione elastica accumulata dal materiale nella sollecitazione multiassiale raggiunge un valore limite.

Tale limite per semplicità risulta pari alla massima energia di distorsione elastica accumulata nel caso di sollecitazione monoassiale.

$$U_{Distorsione} = \frac{1}{2G} J_2 \quad \rightarrow \quad U_D^{Multiax} = U_D^{Traz (monoax)}$$

Nel riferimento principale (caso 3D):

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_{lim} = \sigma_0$$

Nel riferimenti principi (caso 2D):

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2} = \sigma_{lim} = \sigma_0$$

In condizione di taglio puro, la tensione equivalente risulta essere:

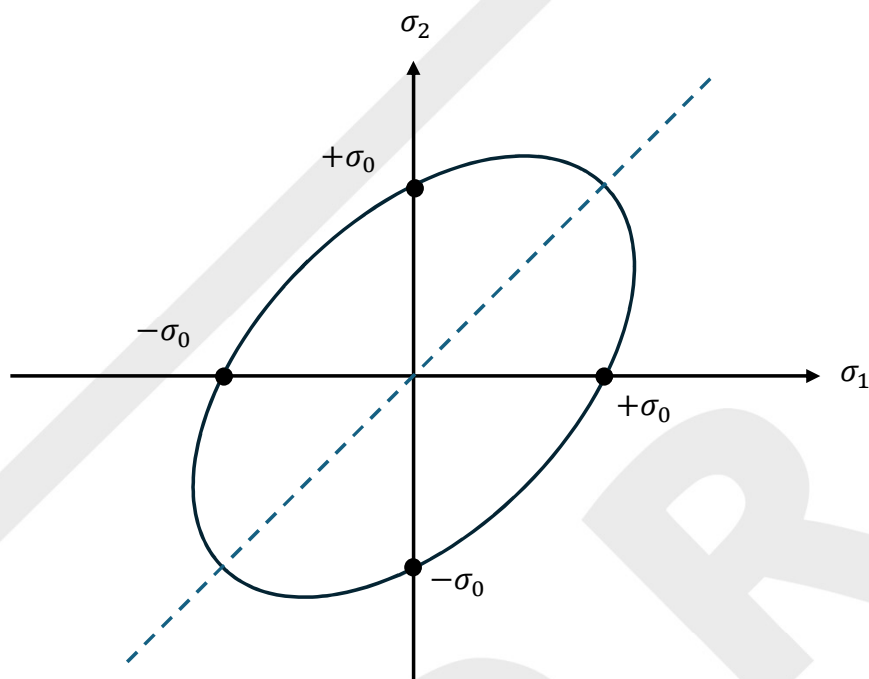
$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{3} \tau_{xy} \quad \text{ovvero} \quad \tau_{lim}^{VM} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Si ricorda che:

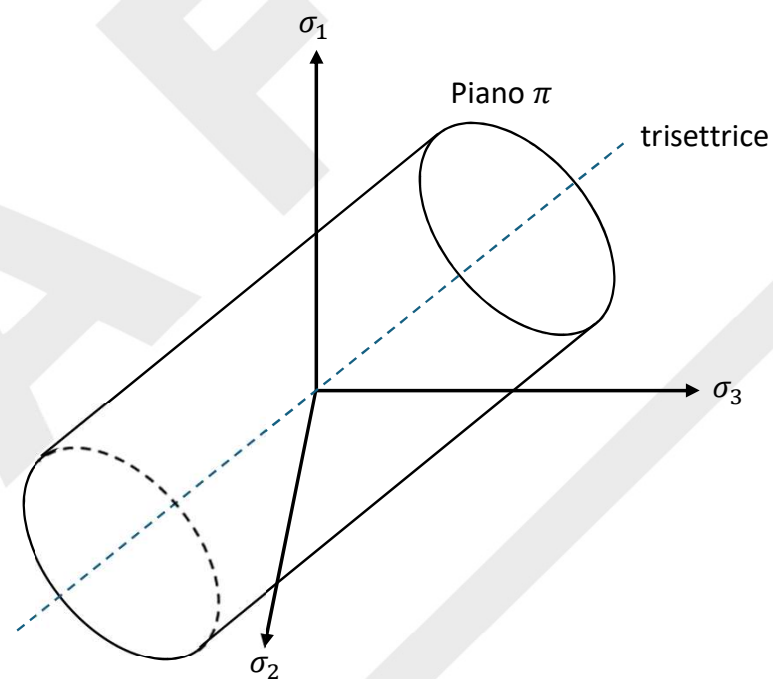
$$\sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}}$$

Criteri di snervamento: Von Mises (massima energia di distorsione)

Caso 2D (tensione piana $\sigma_3 = 0$)



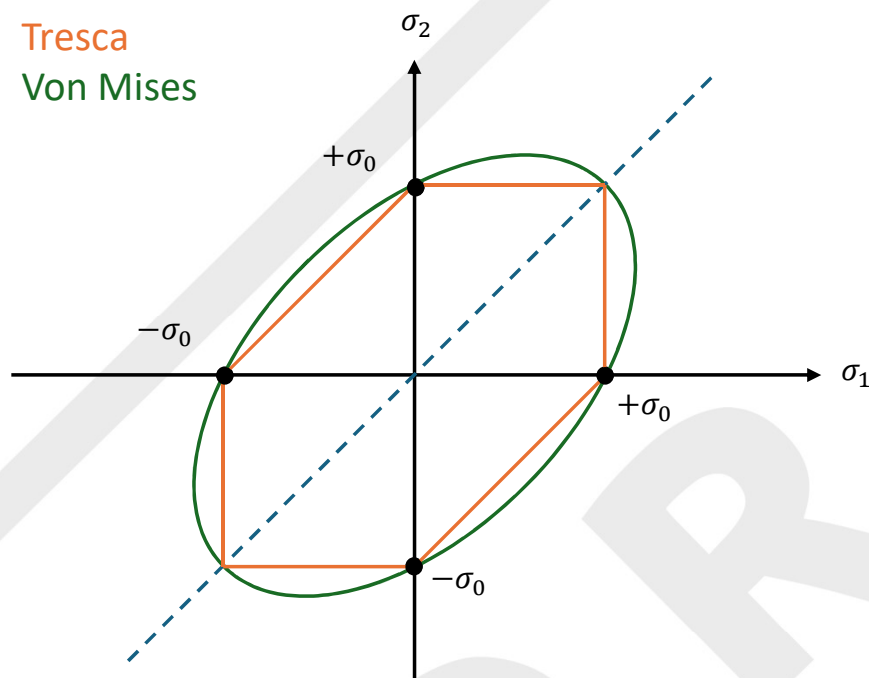
Caso 3D



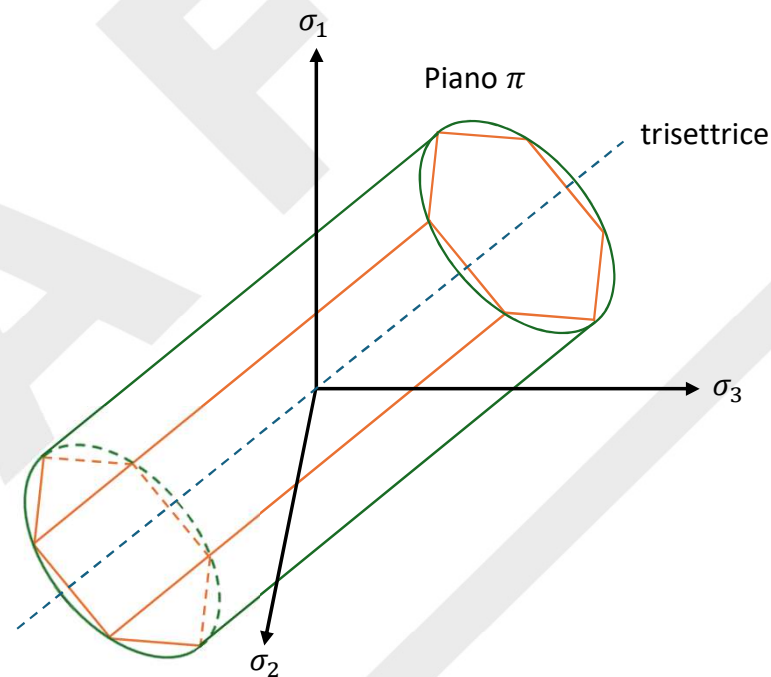
Criteri di snervamento: confronto Von Mises - Tresca

Caso 2D (tensione piana $\sigma_3 = 0$)

Tresca
Von Mises



Caso 3D



Il luogo dei punti del criterio di Tresca è sempre inscritto nel luogo dei punti del criterio di Von Mises, questo significa che il criterio di Tresca risulta più conservativo rispetto a Von Mises.

Criteri di snervamento: superficie di snervamento

Relazione analitica che identifica una generica superficie di snervamento:

$$\text{funzione dello stato tensionale} \rightarrow f(\sigma_{ij}) = K \leftarrow \text{prestazione del materiale}$$

Esempio: per il criterio di Von Mises la funzione è:

$$\begin{cases} f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ K = \sigma_{lim} = \sigma_0 \end{cases}$$

La generica funzione $f(\sigma_{ij})$ si può riscrivere come:

$$f'(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{in cui} \quad f' = f - K$$

È noto che per lo snervamento conta solo la componente deviatorica, per cui la funzione risulta:

$$f''(s_{ij}) = 0$$

Un'altra opzione è quello di descrivere lo stato deviatorico, oltre che tramite le componenti s_{ij} , dagli invarianti deviatorici, ovvero:

$$f'''(J_2, J_3) = 0$$

Criteri di snervamento: superficie di snervamento

Criterio di Von Mises:

$$f'''_{VM}(J_2) = 0, \text{ poiché } \sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{3J_2} \rightarrow f_{VM}(J_2) - K = 0 \rightarrow \sqrt{3J_2} - \sigma_0 = 0$$

Criterio di Tresca:

$f'''_{TR}(J_2, J_3) = 0$, poiché Von Mises dipende solo da J_2 , mentre Tresca da entrambi gli invarianti

Il criterio di Tresca riscritto tramite gli invarianti risulta:

$$\sigma_{eq}^{TR} = 4J_2^3 + 27J_3^2 - (3\sigma_{lim}^2 J_2^2) + (96\sigma_{lim}^4 J_2) - 64\sigma_{lim}^6 = 0$$

Se è verificata la seguente condizione, allora il materiale si trova in campo elastico e non ha raggiunto lo snervamento:

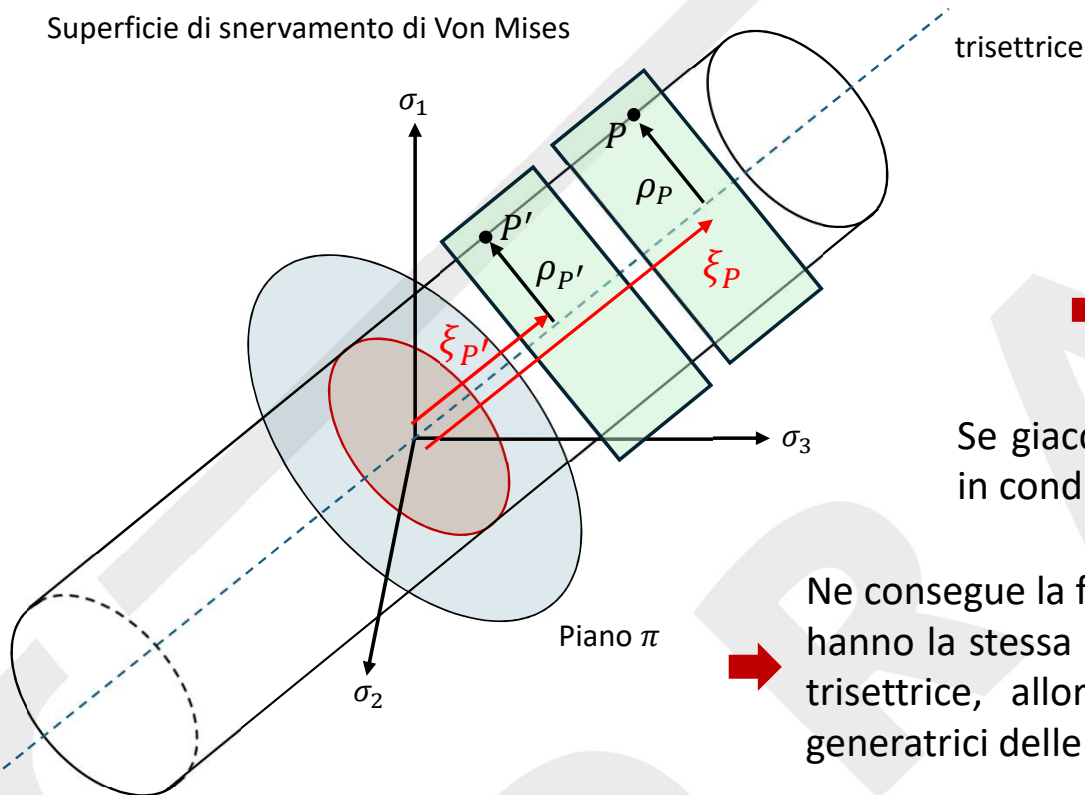
$$f'(\sigma_{ij}) < 0$$

Che si può riscrivere anche nella seguente forma:

$$f''(s_1, s_2, s_3) < 0$$

Criteri di snervamento: superficie di snervamento

Superficie di snervamento di Von Mises



Stati tensionali $P(\sigma_{ij})$ e $P'(\sigma_{ij})$

$$\rho_P = \rho_{P'} \quad (\text{stessa componente deviatorica})$$



Stessa condizione di incipiente snervamento



Stessa componente deviatorica = stessa criticità

Se giacciono sulla stessa generatrice allora si trovano entrambi in condizione di incipiente snervamento.

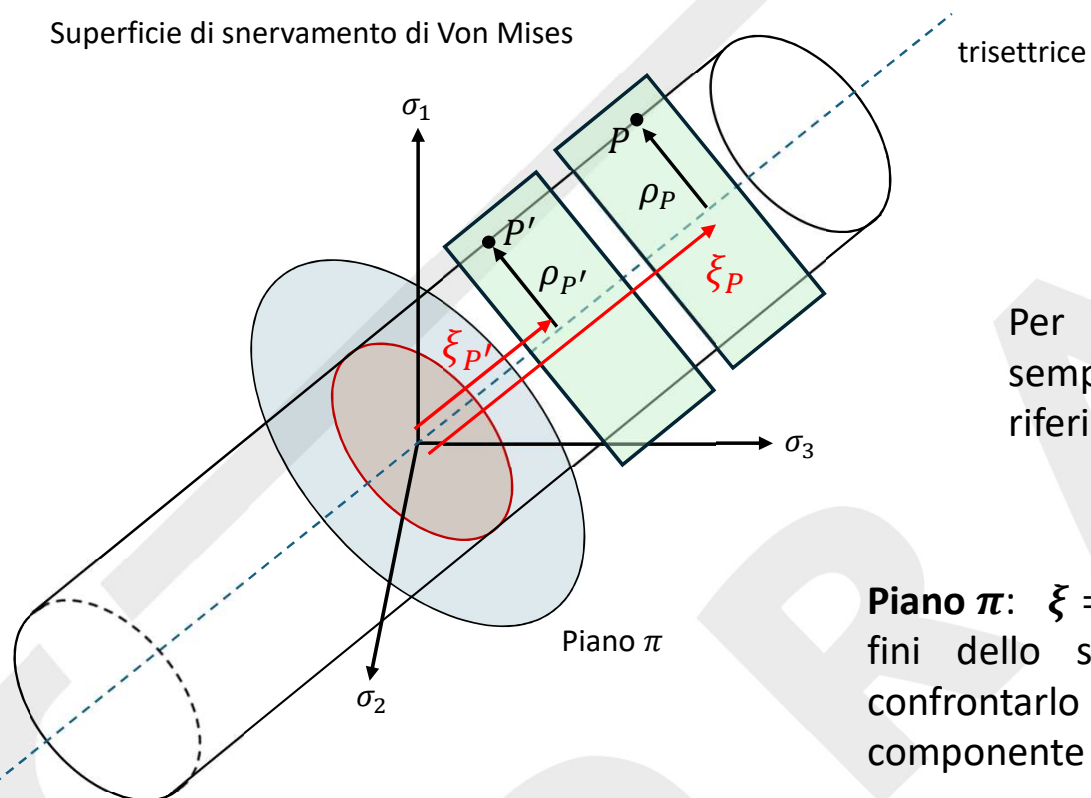


Ne consegue la forma delle superfici di snervamento: siccome i punti che hanno la stessa componente deviatorica giacciono su rette parallele alla trisettrice, allora le superfici di snervamento devono avere come generatrici delle rette parallele alla trisettrice.

La sola differenza tra i due stati tensionali P e P' è la componente idrostatica che risulta essere $\xi_P > \xi_{P'}$ tuttavia essa non influisce sulla criticità rispetto allo snervamento.

Criteri di snervamento: superficie di snervamento

Superficie di snervamento di Von Mises

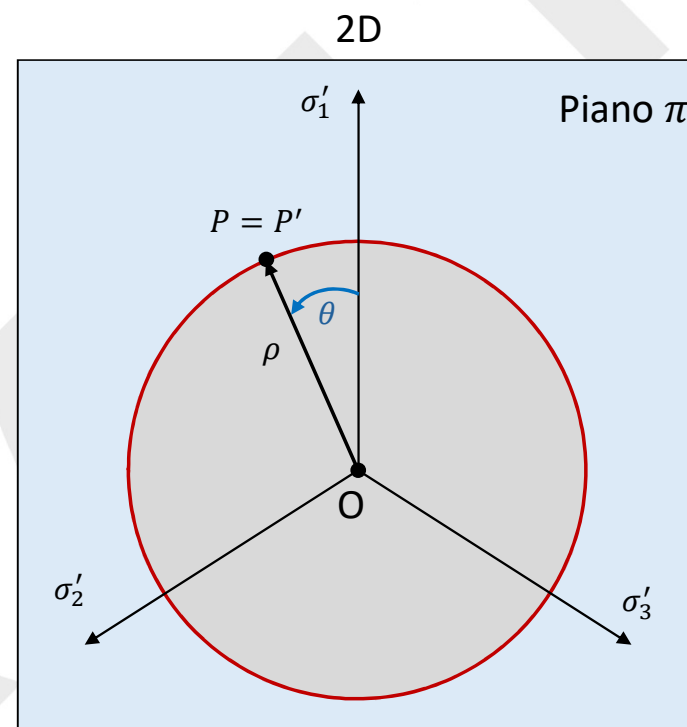
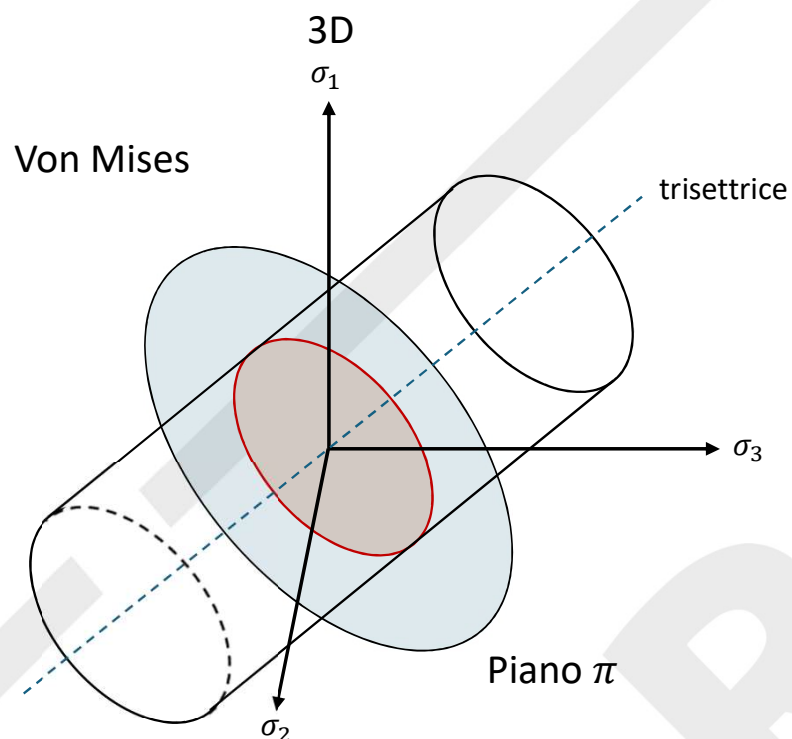


Ai fini dello snervamento, è sufficiente osservare cosa succede su un singolo piano deviatorico.

Per convenienza si considera il piano di riferimento più semplice: quello passante per l'origine del sistema di riferimento, **il piano π** .

Piano π : $\xi = 0$, è possibile valutare la criticità dello stato tensionale ai fini dello snervamento senza perdere nessuna informazione e confrontarlo con altri stati tensionali semplicemente osservando la componente deviatorica ρ .

Criteri di snervamento: superficie di snervamento



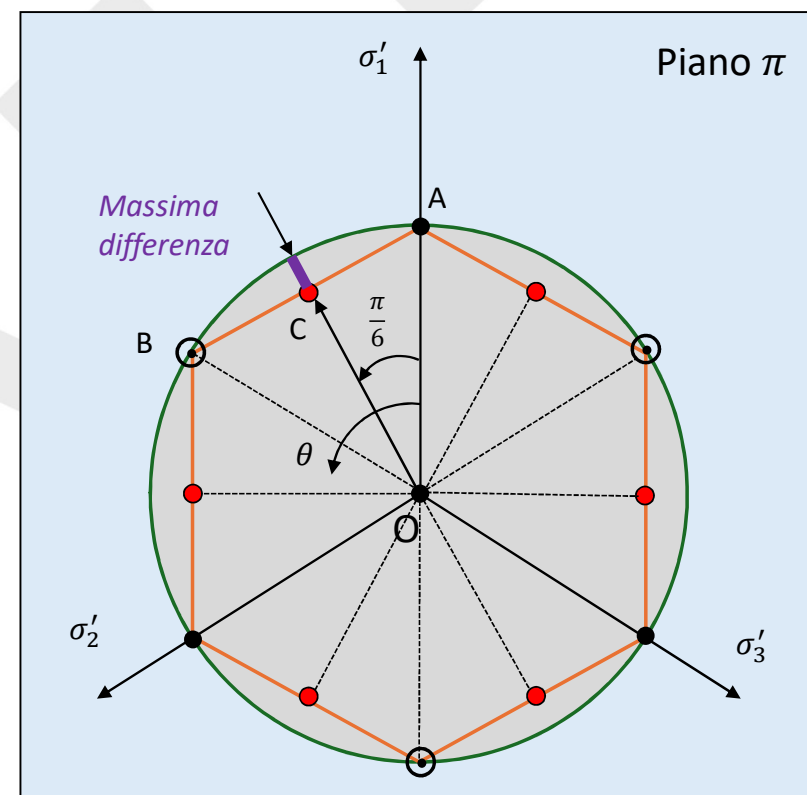
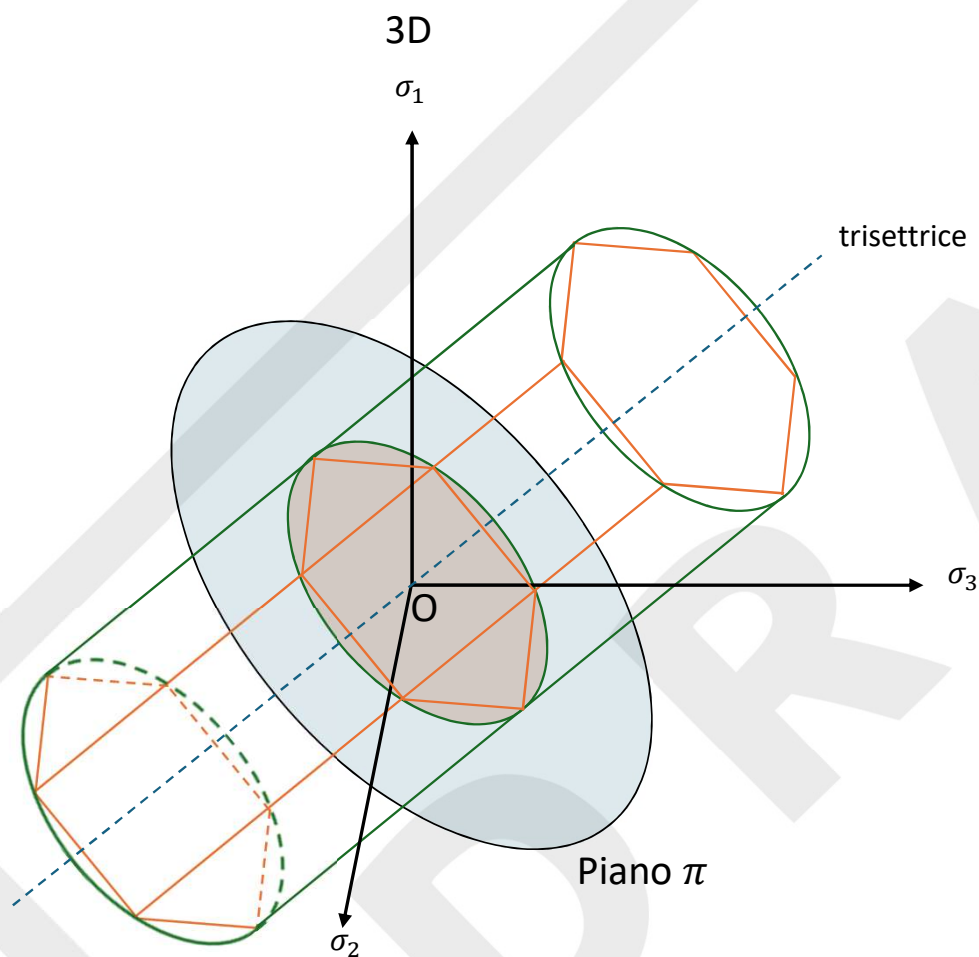
L'angolo di Lode θ
non conta nel
criterio di Von
Mises:
 $\forall \theta$ si ha lo stesso ρ

$$\rho = \sqrt{2J_2} \longrightarrow \text{ricordando che: } \sigma_{eq}^{VM} = \sqrt{3J_2} = \sigma_0 \longrightarrow J_2 = \frac{\sigma_0^2}{3} \longrightarrow \rho = \sqrt{2 \frac{\sigma_0^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$$

➡ Tutti gli stati tensionali con $\rho = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$ si trovano in condizione di incipiente snervamento.

Criteri di snervamento: superficie di snervamento

2D **Tresca: esagono regolare** ; **Von Mises: cerchio**



- Trazione pura $\theta = 0 \rightarrow X = 1$
- ⊙ Compressione pura $\theta = \pi/3 \rightarrow X = -1$
- Taglio puro $\theta = \pi/6 \rightarrow X = 0$

Criteri di snervamento: superficie di snervamento

Esistono degli stati limite del criterio di Von Mises coincidenti con alcuni stati limite del criterio di Tresca.

Stati monoassiali: trazione (A), compressione (B)

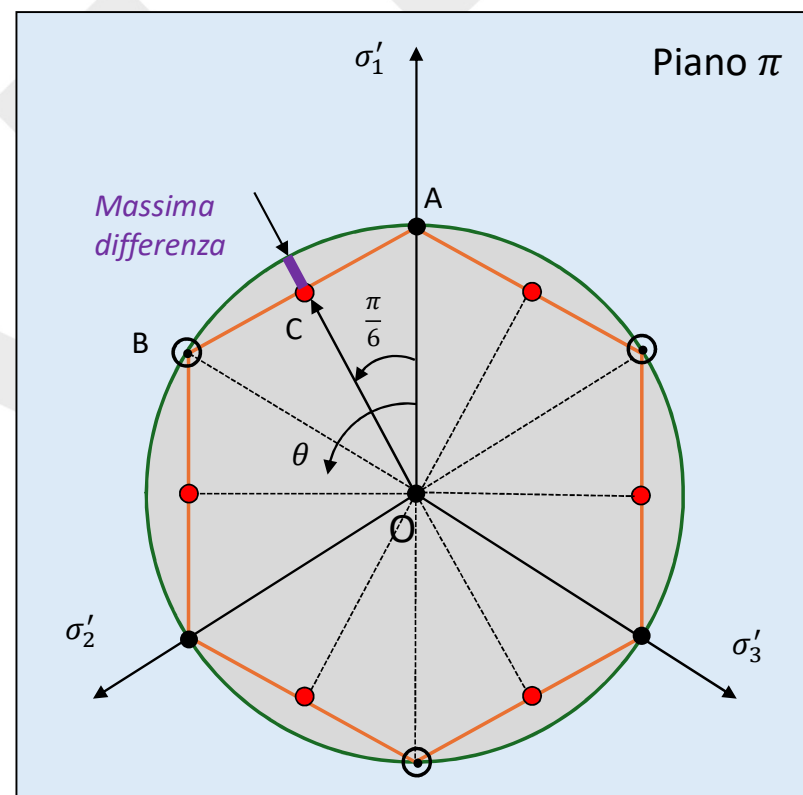
$$\rho_{max}^{TR} = \rho^{VM} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0$$

Secondo il criterio di Tresca c'è dipendenza dall'angolo di Lode θ , ovvero è funzione di J_2 e J_3

Condizione di massima differenza tra VM e TR: $\rho_{max}^{TR} - \rho_{min}^{TR}$

Stato di taglio puro (C)

2D Tresca: esagono regolare ; Von Mises: cerchio



- Trazione pura $\theta = 0 \rightarrow X = 1$
- ⊙ Compressione pura $\theta = \pi/3 \rightarrow X = -1$
- Taglio puro $\theta = \pi/6 \rightarrow X = 0$

Criteri di snervamento: superficie di snervamento

Condizione di massima differenza tra VM e TR: $\rho_{max}^{TR} - \rho_{min}^{TR}$



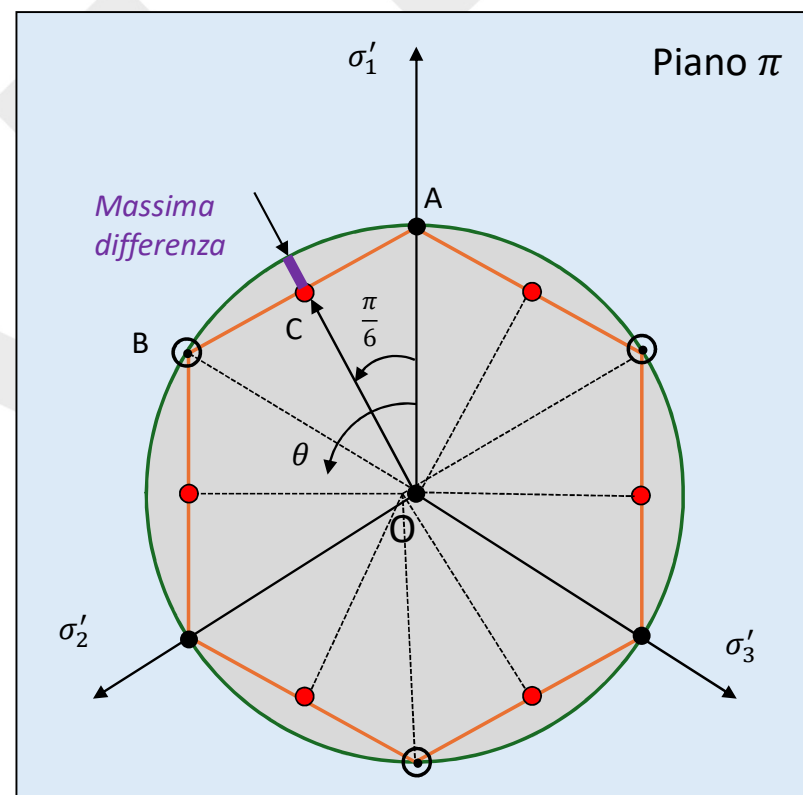
Stato di taglio puro (C)

$$\rho_{min}^{TR} = \rho^{VM} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}$$

Comportamento periodico ogni 60°: $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

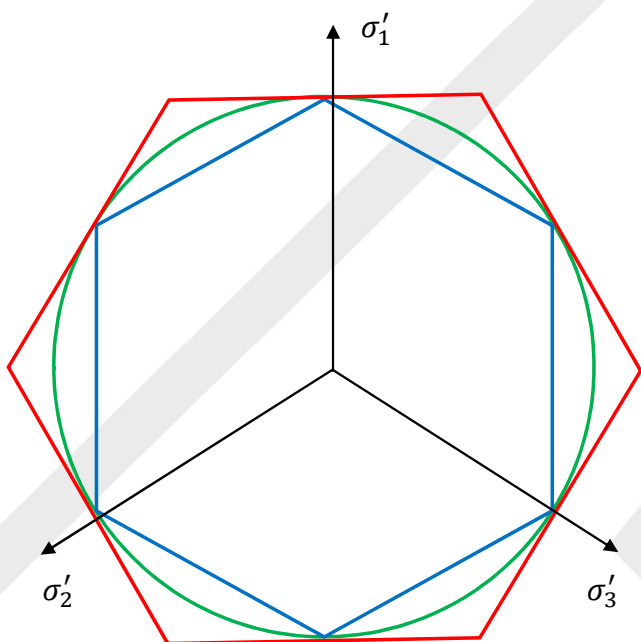
$$\frac{\rho_{min}^{TR}}{\rho^{VM}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.866$$

2D Tresca: esagono regolare ; Von Mises: cerchio



- Trazione pura $\theta = 0 \rightarrow X = 1$
- ⊙ Compressione pura $\theta = \pi/3 \rightarrow X = -1$
- Taglio puro $\theta = \pi/6 \rightarrow X = 0$

Criteri di snervamento: superficie di snervamento



È dimostrabile che tutti i criteri di snervamento che si possono teorizzare devono essere compresi tra l'esagono (in blu) interno al cerchio di Von Mises (in verde) e l'esagono esterno (in rosso) al cerchio di Von Mises.

Ordinando le tensioni tali per cui ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), si può definire il parametro μ (parametro di Lode):

$$\mu = \frac{-2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

Comportamento materiale: snervamento & danneggiamento

Snervamento:

- Dipendenza da ρ e/o θ , ovvero da J_2 e/o J_3 (VM solo J_2 ; Tresca J_2, J_3)
- Non dipendenza dalla componente idrostatica $\xi = \sqrt{3}\sigma_m$

Dal punto di vista fisico, la componente deviatorica muove le dislocazioni ed è responsabile della plasticizzazione.

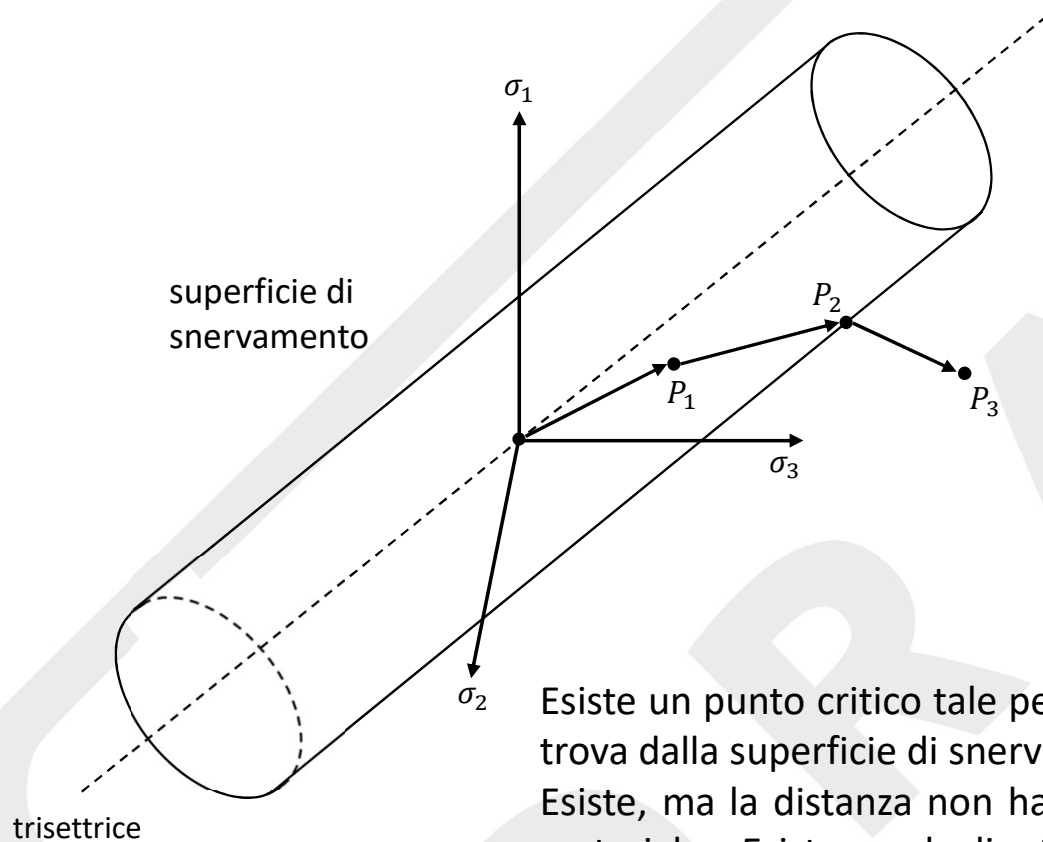
Danneggiamento:

- Dipendenza da ξ , ρ e θ , ovvero da I_1, J_2 e J_3 , quindi dalla triassialità T e dal parametro deviatorico X
- Maggiore è la componente idrostatica (triassialità), più critiche sono le condizioni di rottura

Dal punto di vista fisico, la triassialità è responsabile della nucleazione e crescita dei microvuoti, mentre il parametro deviatorico governa lo scorrimento dei piani cristallini, il movimento delle dislocazioni e il cedimento a taglio.

Il parametro deviatorico X può essere espresso come angolo di Lode θ , o anche tramite il parametro di Lode μ . Sono tutte forme equivalenti per esprimere lo stesso concetto.

Comportamento materiale: cosa succede superato σ_y ?



Sollecitazione multiassiale generica:

$P_1 : f'(\sigma_{ij}) < 0$ interno alla superficie, campo elastico

$P_2 : f'(\sigma_{ij}) = 0$ giacente sulla superficie, incipiente snervamento

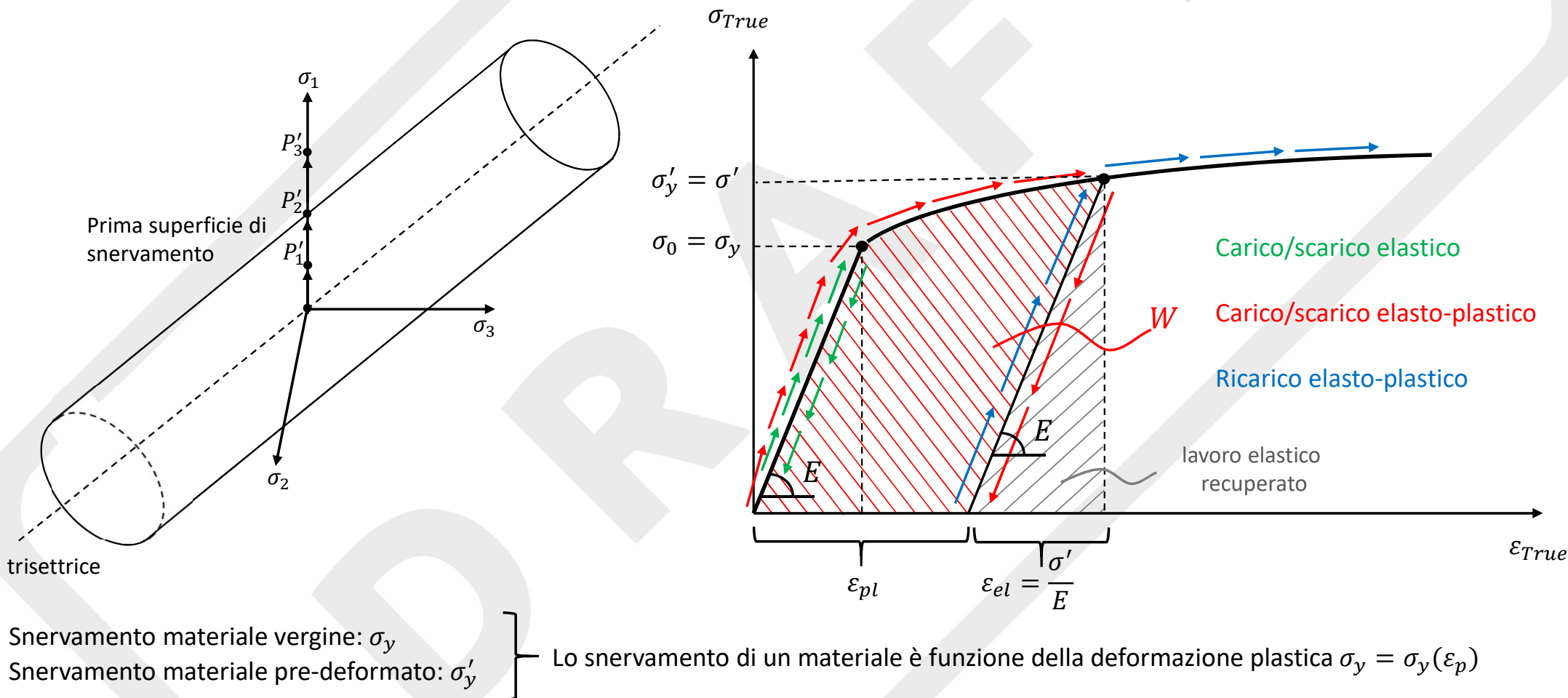
$P_3 : f'(\sigma_{ij}) ?$ esterno alla superficie di snervamento "iniziale", deformazione plastica governata dalle *leggi di flusso plastico*, danneggiamento irreversibile. Tanto più lontano è P_3 , tanto maggiore sarà la deformazione plastica e più critico sarà il danneggiamento.

Esiste un punto critico tale per cui il materiale arriva a cedimento plastico? A che distanza si trova dalla superficie di snervamento?

Esiste, ma la distanza non ha un valore fisso: dipende dal tipo di sollecitazione imposto al materiale. Esistono degli strumenti matematici, i **modelli di danno**, che forniscono un'indicazione di quanta ε_p il materiale può accumulare prima di arrivare a rottura.

Comportamento materiale: cosa succede superato σ_y ?

Sollecitazione monoassiale di trazione: $P'_1 \rightarrow P'_2 \rightarrow P'_3$



Comportamento materiale: ε_p equivalente

Considerando un materiale sottoposto a sollecitazione multiassiale, il criterio di Von Mises σ_{eq}^{VM} consente di riportare lo stato di tensione multiassiale nel suo equivalente monoassiale ugualmente critico:

$$\sigma_{eq}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Riguarda solo le tensioni: $\bar{\sigma} \rightarrow \sigma_{eq}^{VM}$

➡ $\bar{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon_{eq,p}$ **esiste?**

Ovvero, esiste una relazione che permette di associare la deformazione plastica del caso multiassiale, gestita da $\bar{\varepsilon}_p$, ad una deformazione plastica equivalente a quella del caso uniassiale?

Come nel caso uniassiale la deformazione plastica fa variare la tensione di snervamento, quindi anche nel caso multiassiale sarà la deformazione plastica l'unica responsabile della variazione di snervamento.

Comportamento materiale: ε_p equivalente

Obiettivo: trovare la relazione $\bar{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon_{eq,p}$

Ipotesi di partenza: lavoro speso W per deformare plasticamente il materiale

Caso monoassiale: $W = \int_0^{\varepsilon_p} dW$ in cui $dW = \sigma_x \cdot d\varepsilon_{p_x} = dW^{uni}$

L'obiettivo è verificare la seguente uguaglianza: $dW^{uni} = \sigma_x \cdot d\varepsilon_{p_x} = \sigma_{eq}^{VM} \cdot d\varepsilon_{p,eq} = dW^{multi}$

incremento di deformazione
plastica equivalente

Tale incremento vale:

$$d\varepsilon_{p,eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{pl_x} - d\varepsilon_{pl_z})^2 + (d\varepsilon_{pl_y} - d\varepsilon_{pl_z})^2 + (d\varepsilon_{pl_z} - d\varepsilon_{pl_x})^2 + 6 \left[(d\varepsilon_{pl_{xy}})^2 + (d\varepsilon_{pl_{yz}})^2 + (d\varepsilon_{pl_{zx}})^2 \right]}$$

Comportamento materiale: ε_p equivalente

$$d\varepsilon_{p,eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{pl_x} - d\varepsilon_{pl_z})^2 + (d\varepsilon_{pl_y} - d\varepsilon_{pl_z})^2 + (d\varepsilon_{pl_z} - d\varepsilon_{pl_x})^2 + 6 \left[(d\varepsilon_{pl_{xy}})^2 + (d\varepsilon_{pl_{yz}})^2 + (d\varepsilon_{pl_{zx}})^2 \right]}$$

componenti incrementali del tensore della deformazione plastica

È necessario ragionare in termini incrementali in quanto la relazione tra tensione-deformazione non è lineare in campo plastico

E' possibile ridurre al caso uniassiale $d\varepsilon_{p,eq}$, e controllare l'uguaglianza con $d\varepsilon_{pl_x}$ (a titolo di esempio si è scelta la componente x)

Caso uniassiale per un materiale isotropo:

in termini di σ :

$$\begin{cases} \sigma_x \neq 0 \\ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

in termini di ε :

$$\begin{cases} d\varepsilon_{pl_x} \neq 0 \\ d\varepsilon_{pl_y} = d\varepsilon_{pl_z} = -\nu_p d\varepsilon_{pl_x} \neq 0 \\ d\varepsilon_{pl_{xy}} = d\varepsilon_{pl_{yz}} = d\varepsilon_{pl_{zx}} = 0 \end{cases}$$



Comportamento materiale: ε_p equivalente

Coefficiente di Poisson in campo elastico: $\nu = 0.3$

Coefficiente di Poisson in campo plastico: $\nu_p = 0.5$

In campo plastico il materiale si deforma senza variazione di volume (trasformazione isocora), cosa non vera in campo elastico dove il materiale si espande.

$$\Delta V = 0 \quad \text{ovvero} \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \quad \rightarrow \quad \nu_p = 0.5$$

Quindi riducendo $d\varepsilon_{p,eq}$ al caso uniassiale si ottiene:

$$d\varepsilon_{p,eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{pl_x} - d\varepsilon_{pl_z})^2 + (d\varepsilon_{pl_y} - d\varepsilon_{pl_z})^2 + (d\varepsilon_{pl_z} - d\varepsilon_{pl_x})^2 + 6 \left[(d\varepsilon_{pl_{xy}})^2 + (d\varepsilon_{pl_{yz}})^2 + (d\varepsilon_{pl_{zx}})^2 \right]} =$$

$$= d\varepsilon_{pl,eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_{pl_x} + 0.5 d\varepsilon_{pl_x})^2 + 0 + (d\varepsilon_{pl_x} + 0.5 d\varepsilon_{pl_x})^2 + 6 \cdot 0} =$$

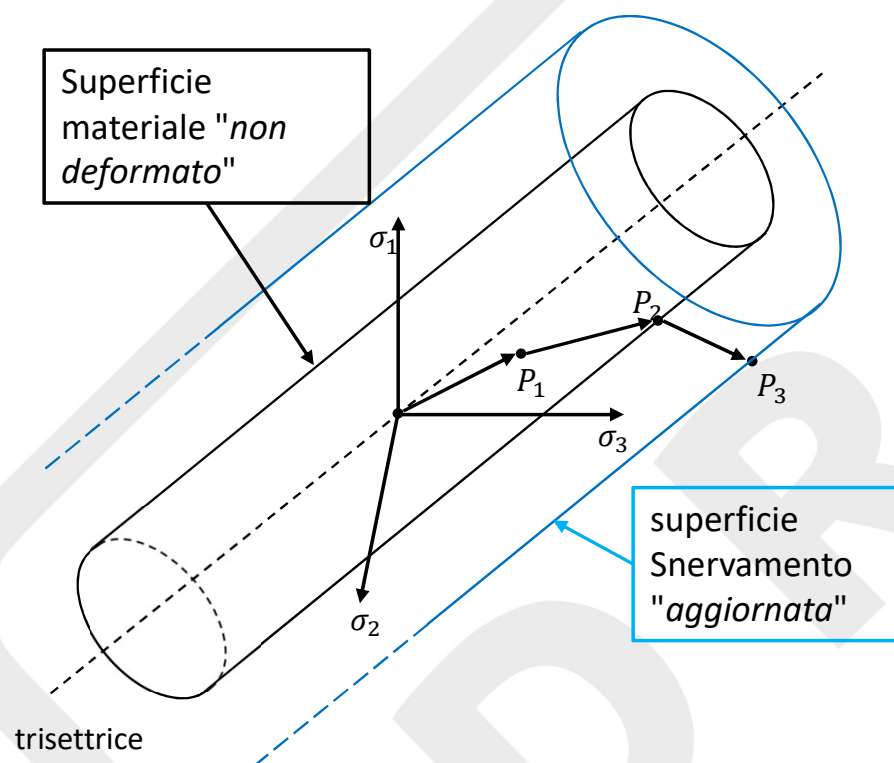
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{9}{4} (d\varepsilon_{pl_x})^2 + \frac{9}{4} (d\varepsilon_{pl_x})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{9}{2} (d\varepsilon_{pl_x})^2} = d\varepsilon_{pl_x}$$

Quindi è valida l'affermazione:

$$dW^{uni} = dW^{multi}$$

Comportamento materiale: cosa succede superato σ_y ?

Sollecitazione multiassiale generica (che include anche il caso monoassiale): $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$



In P_1 il materiale è in campo elastico. Da P_2 a P_3 , il materiale incrudisce e la superficie di snervamento evolve in funzione dello stato tensionale.

Nella figura è riportata l'evoluzione della superficie di snervamento, che consiste in un'espansione.

Possibili trasformazioni della superficie di snervamento:

- Espansione
- Traslazione
- Combinazione di espansione-traslazione

Superficie di snervamento "iniziale":

$$\sqrt{3J_2} - \sigma_0 = 0$$

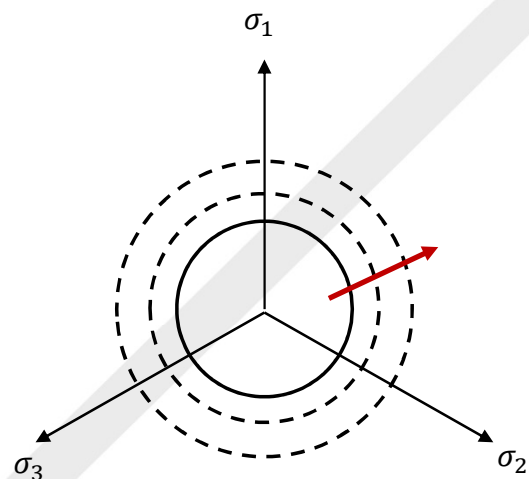
"Nuova" superficie di snervamento:

$$\sqrt{3J_2} - \sigma_y(\epsilon_{pl}) = 0$$

Snervamento attualizzato, aggiornato post deformazione plastica

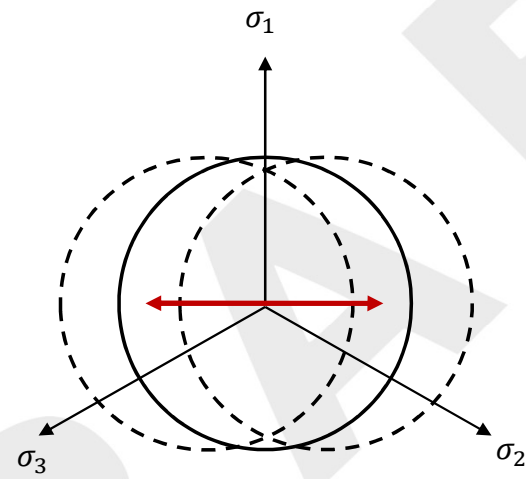
Comportamento materiale: modelli di incrudimento

Esistono diversi modelli per descrivere l'evoluzione della superficie di snervamento quando il materiale incrudisce, e si diversificano in funzione delle condizioni di carico.



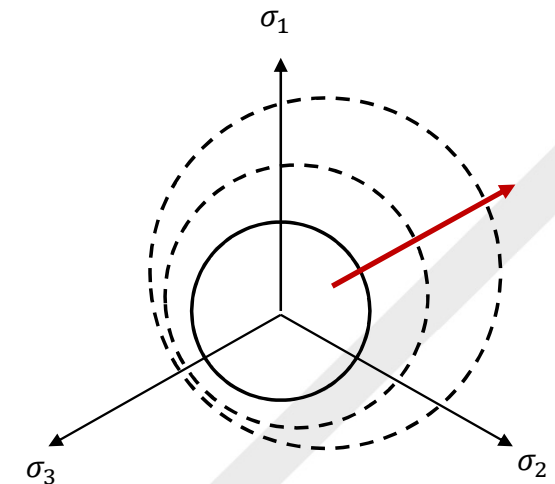
Incrudimento isotropico
(*Espansione*)

Materiale sottoposto
ad una sollecitazione
monotona crescente



Incrudimento cinematico
(*Traslazione*)

Materiale sottoposto
ad un carico ciclico
(es. carico-scarico)

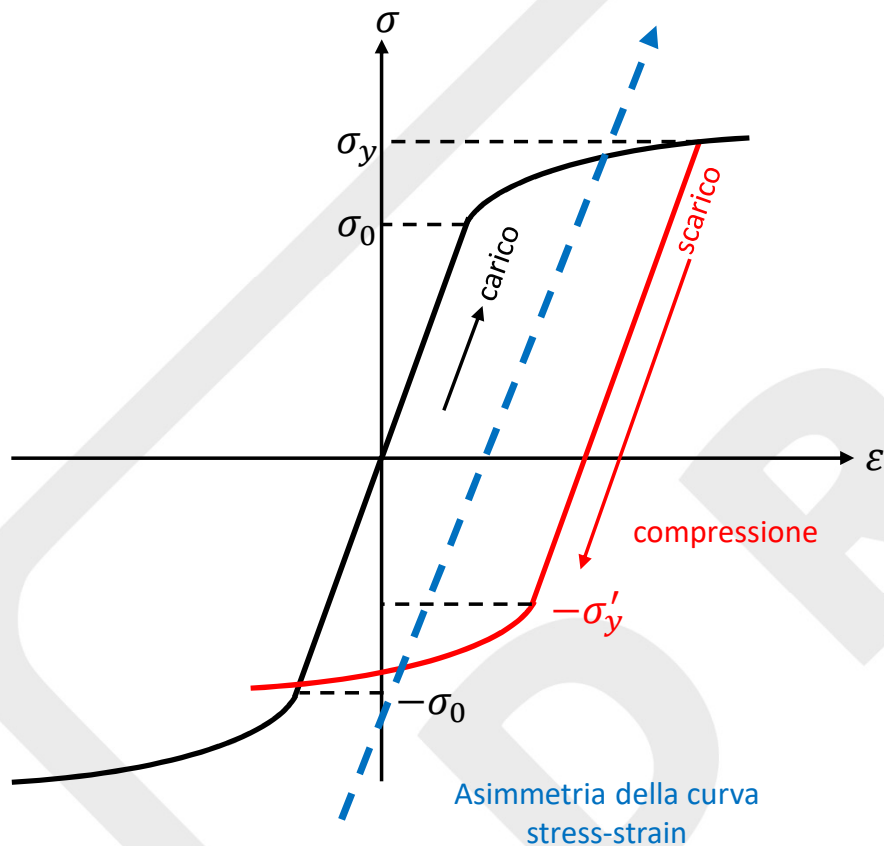


Incrudimento misto
isotropico-cinematico
(*Espansione-traslazione*)

effetto Bauschinger

Comportamento materiale: effetto Bauschinger

Nel caso di carichi ciclici, l'incrudimento cinematico puro e misto funziona meglio perché tiene conto dell' *Effetto Bauschinger* → **asimmetria della curva tensione-deformazione ciclica**



Materiale indeformato:

- Snervamento a trazione $+\sigma_0$
- Snervamento a compressione $-\sigma_0$

Superamento del limite elastico a trazione:

- Nuovo snervamento a trazione σ_y ,
- Si ha un nuovo snervamento a compressione $\neq -\sigma_y$ ed assume un valore pari a $-\sigma'_y$ tale per cui $|\sigma'_y| < |\sigma_y|$

Comportamento materiale

$f(\sigma_{ij}) - K = 0$ ovvero $f'(\sigma_{ij}) = 0$ generica funzione di snervamento che assume i valori:

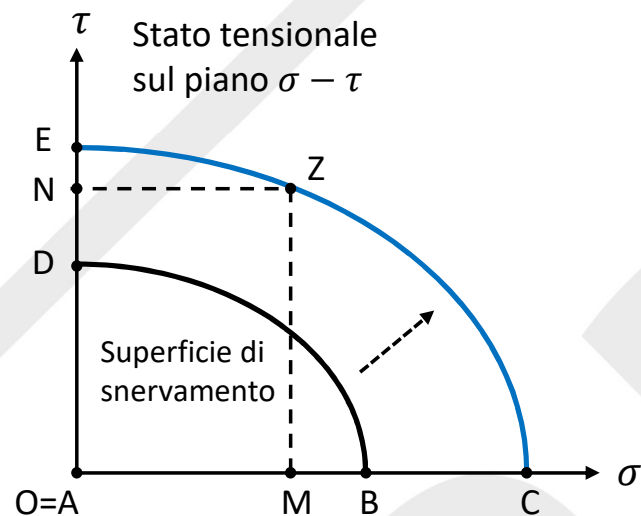
- $f'(\sigma_{ij}) < 0$ campo elastico (punto interno alla superficie);
- $f'(\sigma_{ij}) = 0$ incipiente snervamento (punto sulla superficie);
- **Superato lo snervamento iniziale**, $f'(\sigma_{ij})$ non sarà **mai maggiore di zero** in quanto la superficie si espande/trasla contemporaneamente alla posizione che assume il nuovo punto che ne descrive lo stato tensionale. Quindi il punto non potrà mai oltrepassare la superficie di snervamento, ma si muove con essa nel mentre che quest'ultima evolve in funzione della deformazione plastica accumulata.

$$f'(\sigma_{ij}) = 0 \left\{ \begin{array}{ll} df' = \frac{\partial f'}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 & \text{scarico elastico} \longrightarrow \text{punto sulla superficie di snervamento, ma si sposta verso la parte interna tornando in campo elastico} \\ df' = \frac{\partial f'}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 & \text{carico neutro} \longrightarrow \text{mantenimento delle condizioni di incipiente plasticizzazione, il punto rimane sulla superficie} \\ df' = \frac{\partial f'}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 & \text{carico plastico} \longrightarrow \text{punto sulla superficie, ma si sposta verso la parte esterna insieme alla superficie che sta espandendo/traslando, ulteriore plasticizzazione} \end{array} \right.$$

Comportamento materiale: non linearità stress-strain

In campo plastico è doveroso ragionare in termini di incremento di deformazione plastica ($d\varepsilon$) in quanto non esiste più la linearità tra tensione e deformazione tipica del campo elastico, definita dalle leggi di Hooke. La relazione tra tensione e deformazione non è più univoca.

Esempio: materiale sottoposto ad uno stato multiassiale di trazione e di torsione, (sollecitazione mista $\sigma - \tau$)



Due storie di carico:

- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow Z$
- $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow Z$

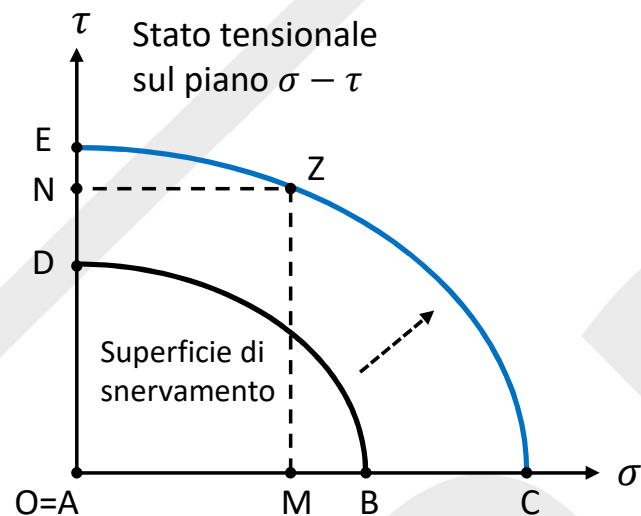
$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow Z$ (ipotesi di incrudimento isotropico)

- $A \rightarrow B$: carico monoassiale σ_x fino alle condizioni di snervamento
- $B \rightarrow C$: aumento della sollecitazione con plasticizzazione del materiale (evoluzione della superficie)
- $C \rightarrow M$: scarico
- $M \rightarrow Z$: sollecitazione elastica di taglio τ_{xy}
- Deformazione plastica risultante pari a ε_{pl_x} ottenuta nel passaggio $B \rightarrow C$

Comportamento materiale: non linearità stress-strain

In campo plastico è doveroso ragionare in termini di incremento di deformazione plastica ($d\varepsilon$) in quanto non esiste più la linearità tra tensione e deformazione tipica del campo elastico, definita dalle leggi di Hooke. La relazione tra tensione e deformazione non è più univoca.

Esempio: materiale sottoposto ad uno stato multiassiale di trazione e di torsione, (sollecitazione mista $\sigma - \tau$)



Due storie di carico:

- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow Z$
- $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow Z$

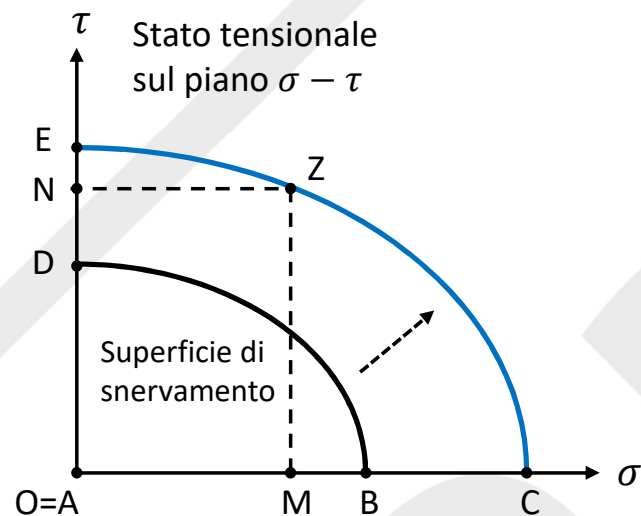
$A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow Z$ (ipotesi di incrudimento isotropico)

- $A \rightarrow D$: sollecitazione elastica di taglio τ_{xy} fino alle condizioni di snervamento
- $D \rightarrow E$: aumento della sollecitazione plasticizzando il materiale (evoluzione della superficie)
- $E \rightarrow N$: scarico (stessa quota di Z)
- $N \rightarrow Z$: sollecitazione σ fino in Z
- Deformazione plastica risultante pari a $\varepsilon_{pl_{xy}}$ ottenuta nel passaggio $D \rightarrow E$

Comportamento materiale: non linearità stress-strain

In campo plastico è doveroso ragionare in termini di incremento di deformazione plastica ($d\varepsilon$) in quanto non esiste più la linearità tra tensione e deformazione tipica del campo elastico, definita dalle leggi di Hooke. La relazione tra tensione e deformazione non è più univoca.

Esempio: materiale sottoposto ad uno stato multiassiale di trazione e di torsione, (sollecitazione mista $\sigma - \tau$)



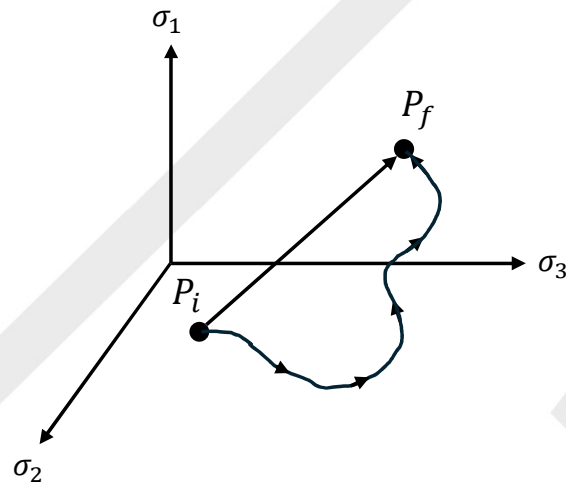
Due storie di carico:

- $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow Z$
- $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow Z$

- Diverse storie di carico che hanno stessi stati tensionali iniziale-finale hanno deformazioni plastiche diverse. Quindi è falso affermare che ad uno stato di sollecitazione è associato un solo stato di deformazione.
- Lo stato di deformazione è funzione della storia di carico applicata. Questo è la ragione per cui è necessario ragionare in termini di incrementi di deformazione in campo plastico.
- Superato il limite elastico, le deformazioni accumulate in funzione dello stato tensionale calcolano tramite le *leggi di flusso plastico*, le quali consentono di associare alle tensioni le deformazioni incrementali che si accumulano in campo plastico.

Comportamento materiale: carico proporzionale

Unica condizione in cui decade la dipendenza dalla storia di carico: ipotesi di carico proporzionale (*proportional loading*, P.L.)



$P_i = (\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0)$ stato tensionale iniziale (eventualmente nullo)

$P_f = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ stato tensionale finale

Da P_i a P_f due strade: una generica e una lineare

Per il percorso lineare si possono definire le seguenti relazioni tra lo stato iniziale e finale:

$$\begin{cases} \sigma_1 = K \sigma_1^0 \\ \sigma_2 = K \sigma_2^0 \\ \sigma_3 = K \sigma_3^0 \end{cases}$$

- Percorso lineare = percorso di carico proporzionale
C'è proporzionalità tra le tensioni iniziali e quelle finali
- K funzione monotona crescente
- Il percorso curvilineo non è un percorso proporzionale

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1^0}{\sigma_2^0} ; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{\sigma_2^0}{\sigma_3^0} ; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\sigma_3^0}{\sigma_1^0} \rightarrow \sigma_{eq}^{VM} = K \sigma_{eq}^{o,VM}$$



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

MODELLI DI DANNEGGIAMENTO DUTTILE

Danneggiamento duttile

Per leghe metalliche duttili il danneggiamento dipende dallo stato tensionale e dalla deformazione plastica accumulata.

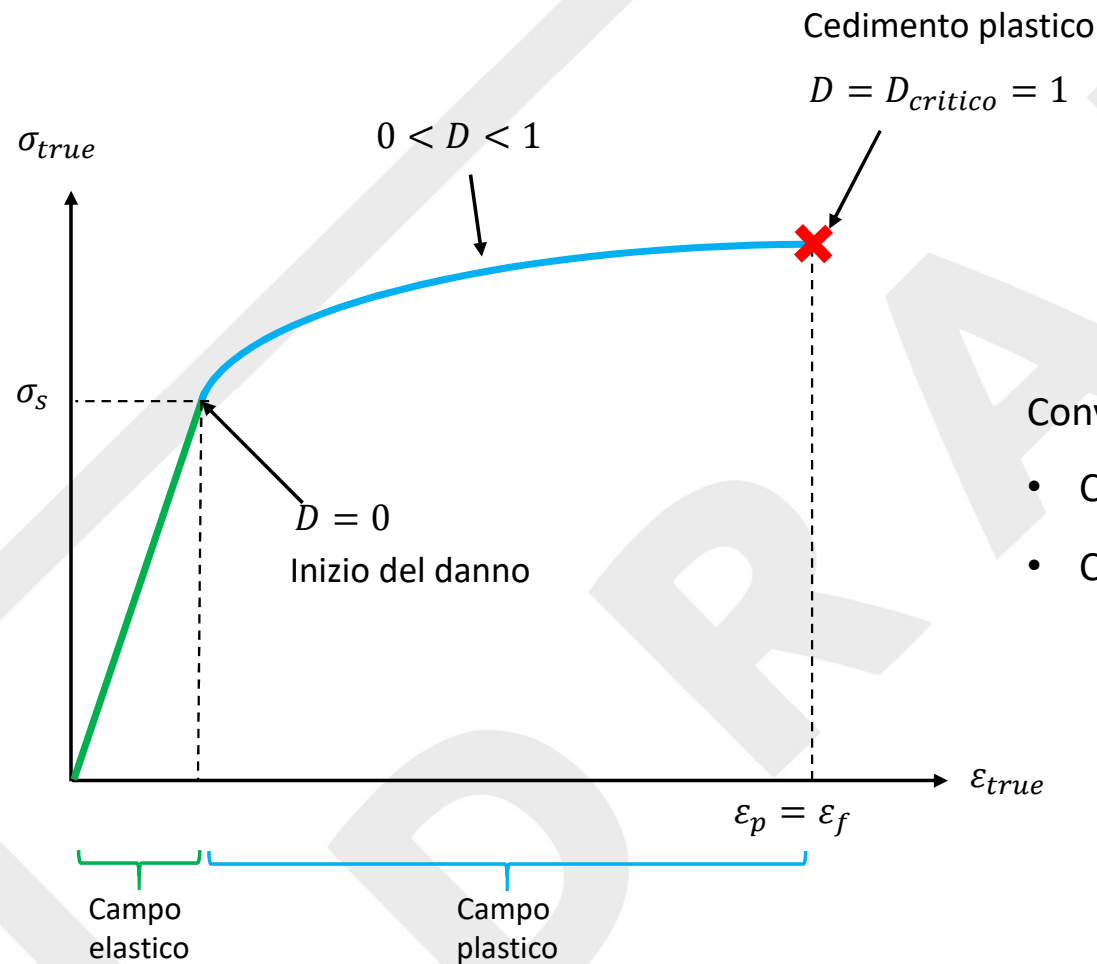
I modelli di danneggiamento duttile, sono modelli matematici che consentono di:

stimare quanta deformazione plastica può accumulare il materiale sottoposto ad uno specifico stato tensionale prima di arrivare a cedimento plastico. Ovvero permettono di predire le condizioni di incipiente collasso plastico. Ciò equivale a stimare la **duttilità** del materiale.

Il danneggiamento (***D***) ha le seguenti caratteristiche:

- incrementa proporzionalmente con la deformazione plastica equivalente accumulata ε_p^{eq} (da ora in avanti identificata con ε_p);
- dipende dalle leggi di flusso plastico;
- dipende dalla storia di carico, ovvero dal tensore delle tensioni $\bar{\sigma}$;
- è irreversibile

Danneggiamento duttile: sollecitazione monoassiale



Convenzione assunta:

- Condizione materiale sano $D = 0$
- Condizione di incipiente rottura $D = 1$ quando $\epsilon_p = \epsilon_f$

N.b: considerazioni valide per sollecitazione mantenuta monoassiale fino all'istante di rottura

Modelli di danno duttile: classificazione

1° classificazione: basata sull'accoppiamento del comportamento plastico

Modelli accoppiati (*coupled*): le grandezze che governano l'accumulo del danno influenzano il comportamento plastico e viceversa

Modelli disaccoppiati (*uncoupled*): le grandezze che governano l'accumulo del danno sono indipendenti dal comportamento plastico. La grandezza D risulta uno scalare che si può ricavare in fase di post-processing

2° classificazione: basata sul principio ispiratore

Modelli micromeccanici: analizzano il danno D in funzione della microstruttura, ovvero analizzando l'evoluzione dei microvuoti (nucleazione, crescita, coalescenza) e la presenza dei siti di inclusione; (modelli GTN, etc.)

Modelli Continuum Damage Mechanics (CDM): si basano su principi termodinamici; (modelli Lemaitre, Bonora, etc.)

Modelli empirici: definiscono una legge empirica basata su dati sperimentali, la quale descrive l'accumulo del danno D in funzione della deformazione plastica accumulata; (modelli Wierzbicki, Mohr, Coppola, etc.)

Modelli di danno duttile: empirici

Espressione generale dei modelli empirici:

$$D = \int_0^{\varepsilon_p} \Gamma(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) d\varepsilon_p \quad D \in [0,1]$$

Il danno D è una grandezza scalare che aumenta proporzionalmente con la deformazione plastica accumulata ε_p pesata rispetto ad una funzione dello stato tensionale in quanto stati tensionali diversi portano a diversi livelli di danno a parità di incremento di deformazione plastica. Quando il danneggiamento raggiunge un valore critico (normalizzato a $D=1$) il materiale cede. Questo avviene per un livello di deformazione plastica equivalente pari a $\varepsilon_p = \varepsilon_f$

Lo stato tensionale si può descrivere tramite la triassialità T e il parametro deviatorico X (legato all'angolo di Lode), ovvero tramite la parte idrostatica e deviatorica del tensore delle tensioni



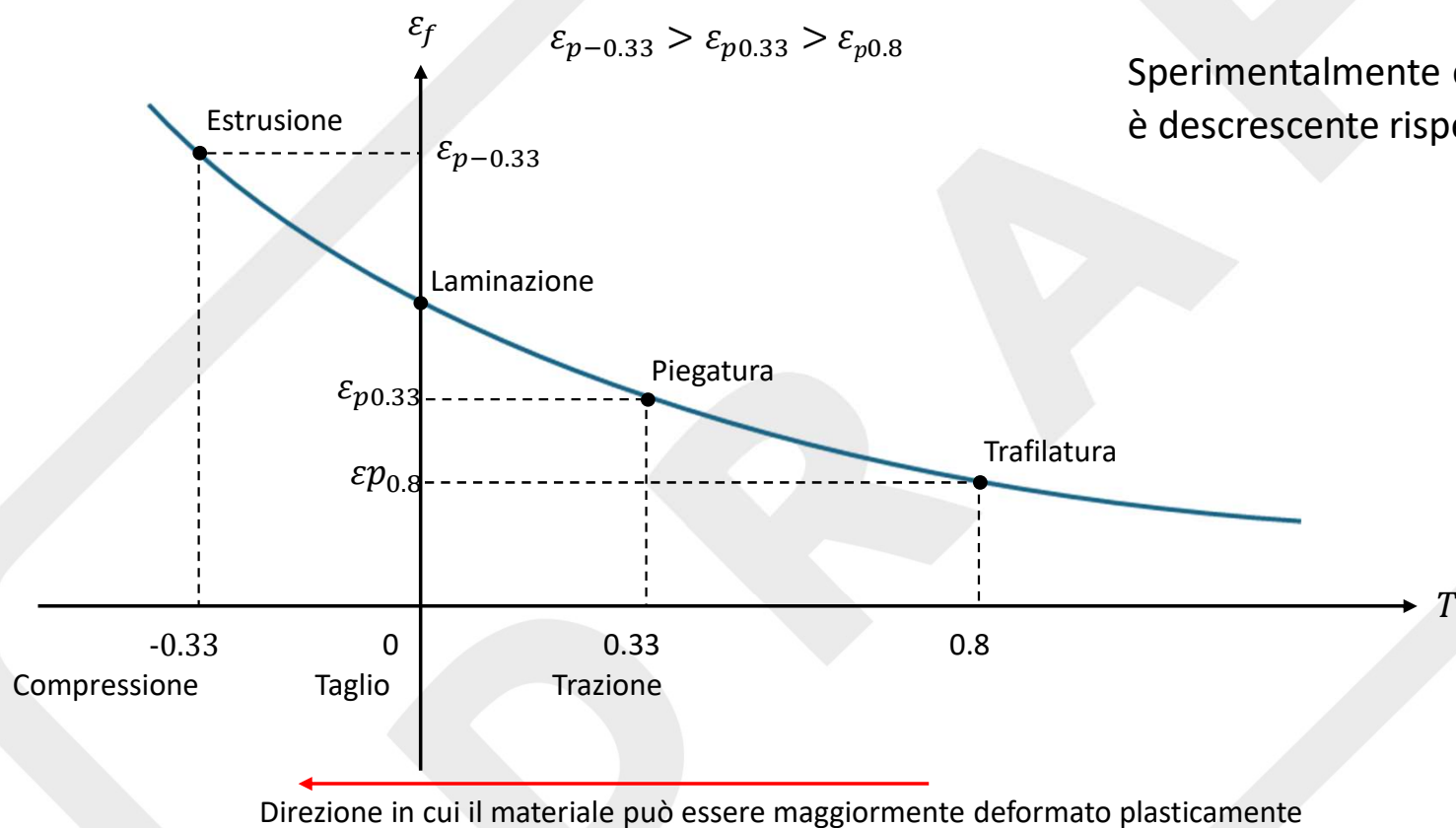
$$D = \int_0^{\varepsilon_p} \Gamma(T, X) d\varepsilon_p$$

$$T = \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}^{VM}}$$

$$X = \frac{27}{2} \frac{J_3}{(\sigma_{eq}^{VM})^3} \quad X \in [-1,1]$$

Modelli di danno duttile

Triassialità T e deformazione plastica accumulabile dal materiale:



Sperimentalmente è noto che l'andamento della ε_p è decrescente rispetto alla triassialità T .

Nel grafico si riportano come esempio alcuni processi produttivi di deformazione a freddo e i valori tipici della triassialità T associati ad essi

Modelli di danno duttile

Modelli empirici classici: il danno è funzione solo della triassialità T . Questi modelli sono ormai superati in quanto nuovi studi hanno dimostrato che l'evoluzione del danno dipende anche dalla componente deviatorica dello stato tensionale, ovvero anche da X .

$$D = \int_0^{\varepsilon_p} \Gamma(T) d\varepsilon_p$$



Modelli empirici recenti: dipendenza sia da T che da X . In particolare si è osservato sperimentalmente che al decrescere del modulo del parametro deviatorico $|X|$ è associata una minore quantità di deformazione plastica accumulabile, ovvero una minore duttilità.

$$D = \int_0^{\varepsilon_p} \Gamma(T, X) d\varepsilon_p$$

Riassumendo:

$\uparrow T \rightarrow \downarrow \varepsilon_f$ (minore duttilità)

$\downarrow |X| \rightarrow \downarrow \varepsilon_f$ (minore duttilità)

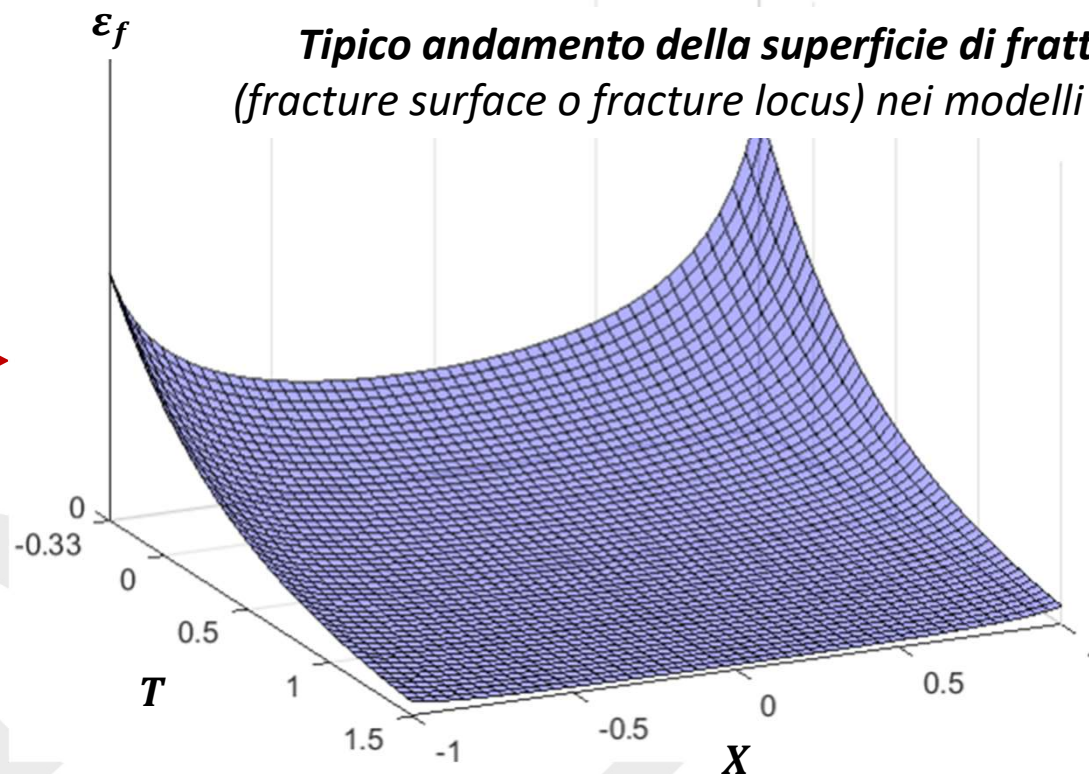
Modelli di danno duttile (P.L.) : superficie di frattura

Ipotesi di carico proporzionale (*proportional loading, P.L.*) $\rightarrow T$ e X costanti, ovvero Γ costante $\rightarrow D = \Gamma(T, X) \int_0^{\varepsilon_p} d\varepsilon_p$

Considerando la condizione critica di inizio rottura ($\varepsilon_p = \varepsilon_f$, $D = 1$) si ottiene: $D = \Gamma(T, X) \cdot \varepsilon_f = 1$ ovvero:

$$\varepsilon_f = \Gamma^{-1}(T, X)$$

Tipico andamento della superficie di frattura
(*fracture surface o fracture locus*) nei modelli recenti

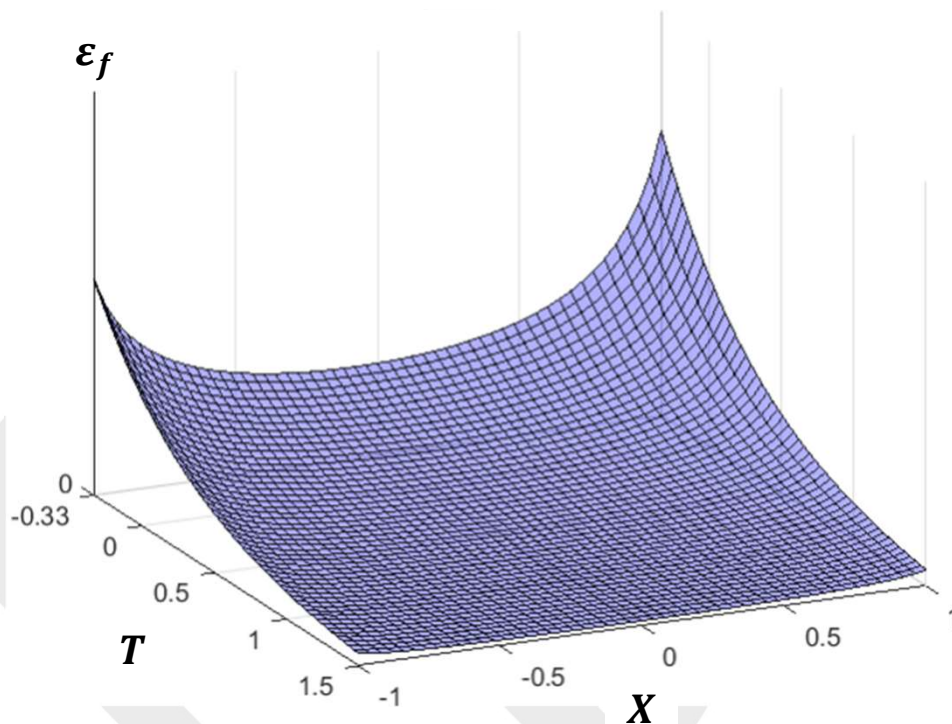


Modelli di danno duttile (P.L.) : superficie di frattura

$$\varepsilon_f = \Gamma^{-1}(T, X)$$

- Un punto generico di coordinate (T, X, ε_p) individua uno specifico stato tensionale (T, X) a cui è associato il corrispondente valore di deformazione plastica accumulata (ε_p)

Superficie di frattura

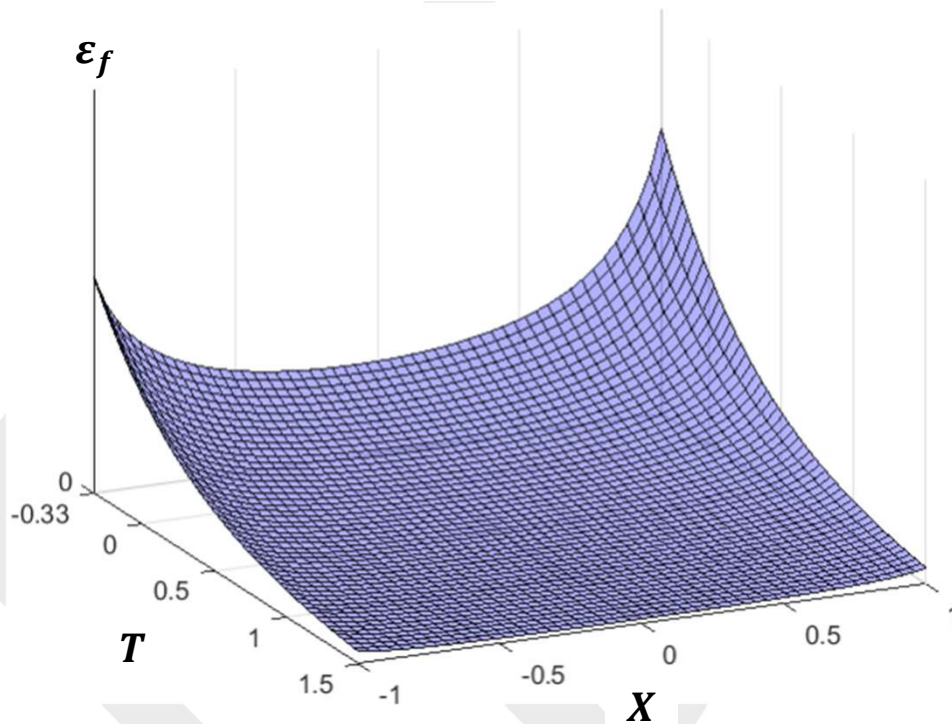


- I punti appartenenti alla superficie sono definiti per $D = 1$, quindi hanno coordinate $(T, X, \varepsilon_p \equiv \varepsilon_f)$
- La superficie di frattura associa ad uno specifico stato tensionale (T, X) il corrispondente valore di deformazione plastica a rottura ε_f
- La superficie fornisce una stima della duttilità
- Il danno parziale accumulato si può esprimere anche come: $D = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_f}$
- Punti sulla superficie: $D = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_f} = 1$
- Punti al di sotto della superficie $0 < D = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_f} < 1$

Modelli di danno duttile (P.L.) : superficie di frattura

$$\varepsilon_f = \Gamma^{-1}(T, X)$$

Superficie di frattura



In caso di **quasi-carico proporzionale** (*quasi-proportional loading*), in cui le grandezze T e X variano leggermente, si assumono i valori medi T_{avg} e X_{avg} come rappresentativi dell'intera storia di carico, pesati sulla deformazione plastica accumulata. In questo modo è possibile considerare un solo valore di T e X al fine di rendere la funzione Γ nuovamente costante, portarla fuori dall'integrale e ricavare ε_f .

Quasi-proportional loading

$$T_{avg} = \frac{1}{\varepsilon_f} \int_0^{\varepsilon_f} T(\varepsilon) d\varepsilon_p$$

$$X_{avg} = \frac{1}{\varepsilon_f} \int_0^{\varepsilon_f} X(\varepsilon) d\varepsilon_p$$

Modelli di danno duttile (P.L.) : procedura di calibrazione

Test sperimentali: prove di trazione, di torsione, deformazione piana, biassiali trazione-taglio, compressione, etc. Misurazione curve globali (forza-spostamento)



Round Bar (RB)



Round Notched Bar (RNB)



Plane Strain (PS)



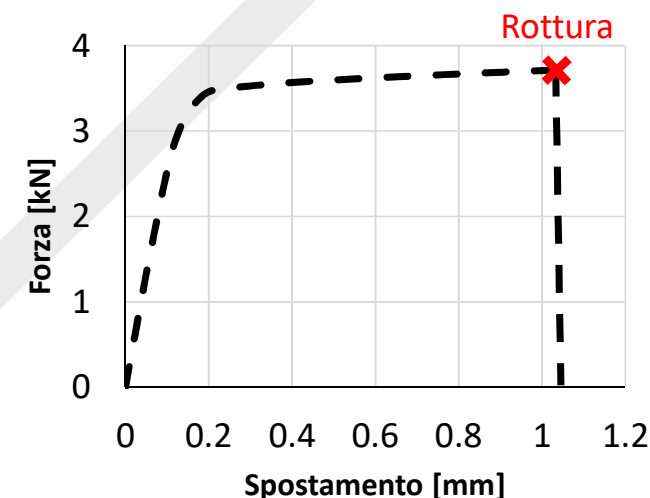
Torsion (Tors)

Esempio di provini convenzionali

Simulazioni numeriche dei test sperimentali: metodo agli elementi finiti (FEM)

Stima grandezze locali nel punto critico nelle condizione di inizio rottura per ogni test: deformazione plastica a rottura ϵ_f , triassialità T e parametro deviatorico X

Ottenimento della superficie di frattura tramite un algoritmo di minimizzazione, utilizzando i punti critici (T, X, ϵ_f) dei singoli test



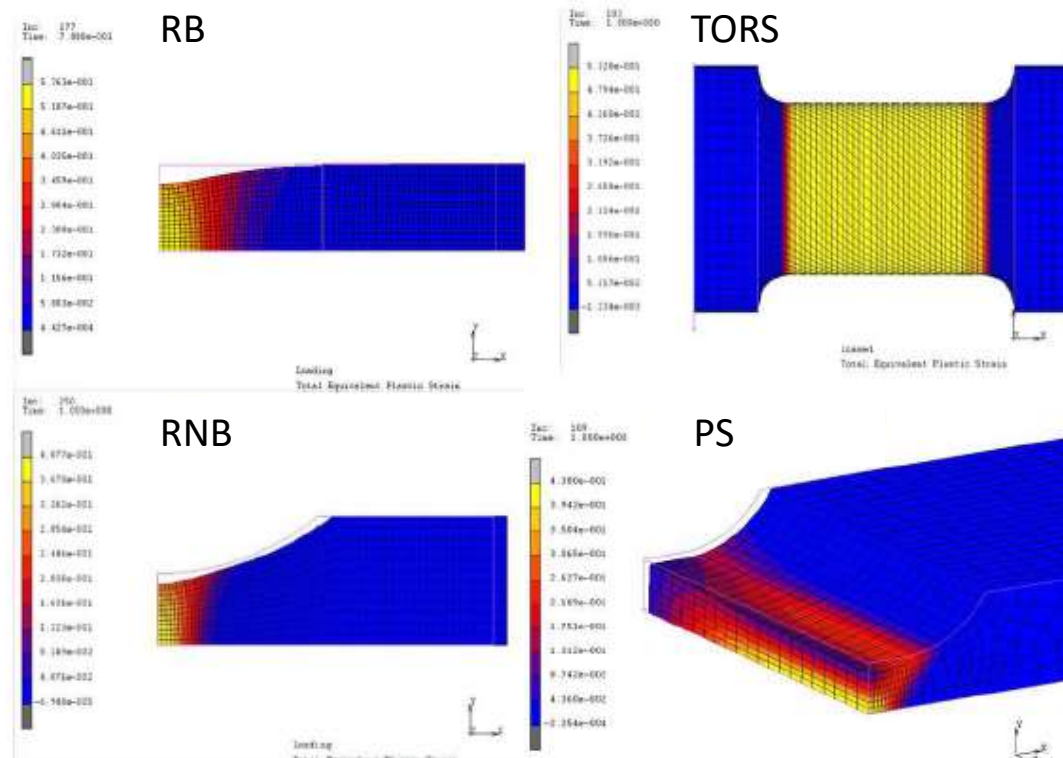
Modelli di danno duttile (P.L.) : procedura di calibrazione

Test sperimentali: prove di trazione, di torsione, deformazione piana, biassiali trazione-taglio, compressione, etc. Misurazione curve globali (forza-spostamento)

Simulazioni numeriche dei test sperimentali: metodo agli elementi finiti (FEM)

Stima grandezze locali nel punto critico nelle condizione di inizio rottura : deformazione plastica a rottura ϵ_f , triassialità T e parametro deviatorico X

Ottenimento della superficie di frattura tramite un algoritmo di minimizzazione, utilizzando i punti critici (T, X, ϵ_f) dei singoli test



Per ogni test, nel punto critico del provino, si ricava l'evoluzione di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \epsilon_p$ e in particolare ϵ_f imponendo lo spostamento a rottura sperimentale

Modelli di danno duttile (P.L.) : procedura di calibrazione

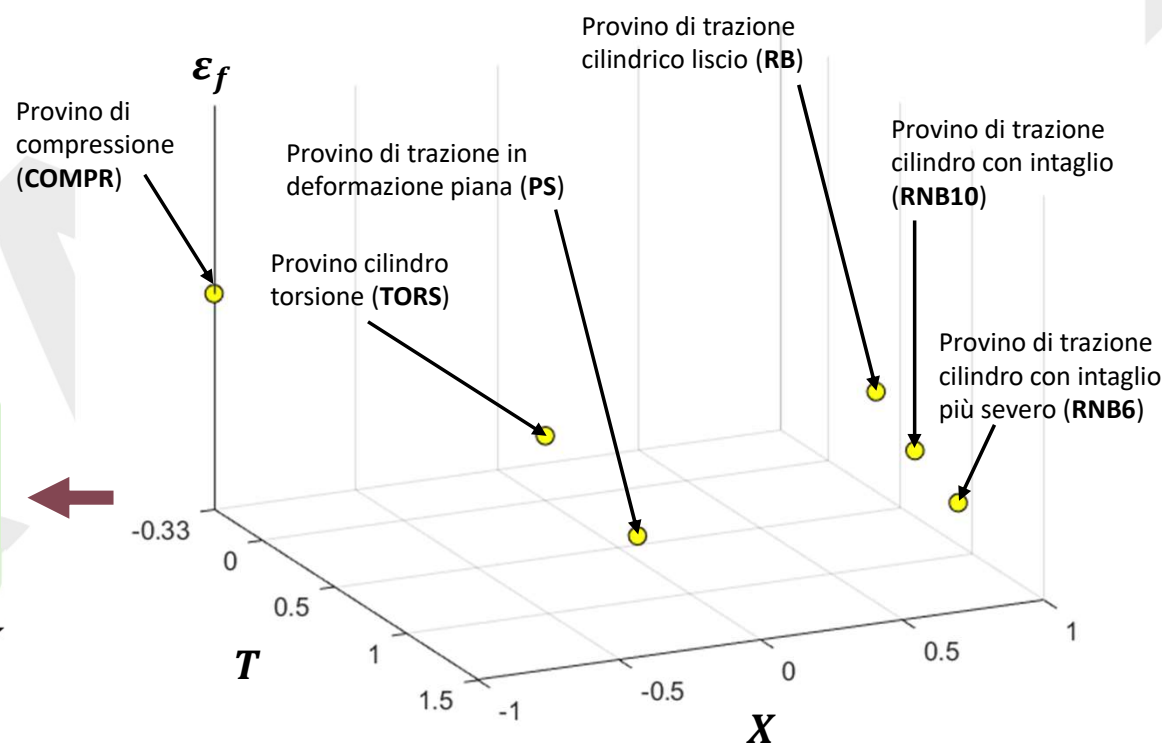
Test sperimentali: prove di trazione, di torsione, deformazione piana, biassiali trazione-taglio, compressione, etc. Misurazione curve globali (forza-spostamento)

Per ogni test/simulazione ottiene la terna (T, X, ε_f)

Simulazioni numeriche dei test sperimentali: metodo agli elementi finiti (FEM)

Stima grandezze locali nel punto critico nelle condizione di inizio rottura : deformazione plastica a rottura ε_f , triassialità T e parametro deviatorico X

Ottenimento della superficie di frattura tramite un algoritmo di minimizzazione



Modelli di danno duttile (P.L.) : procedura di calibrazione

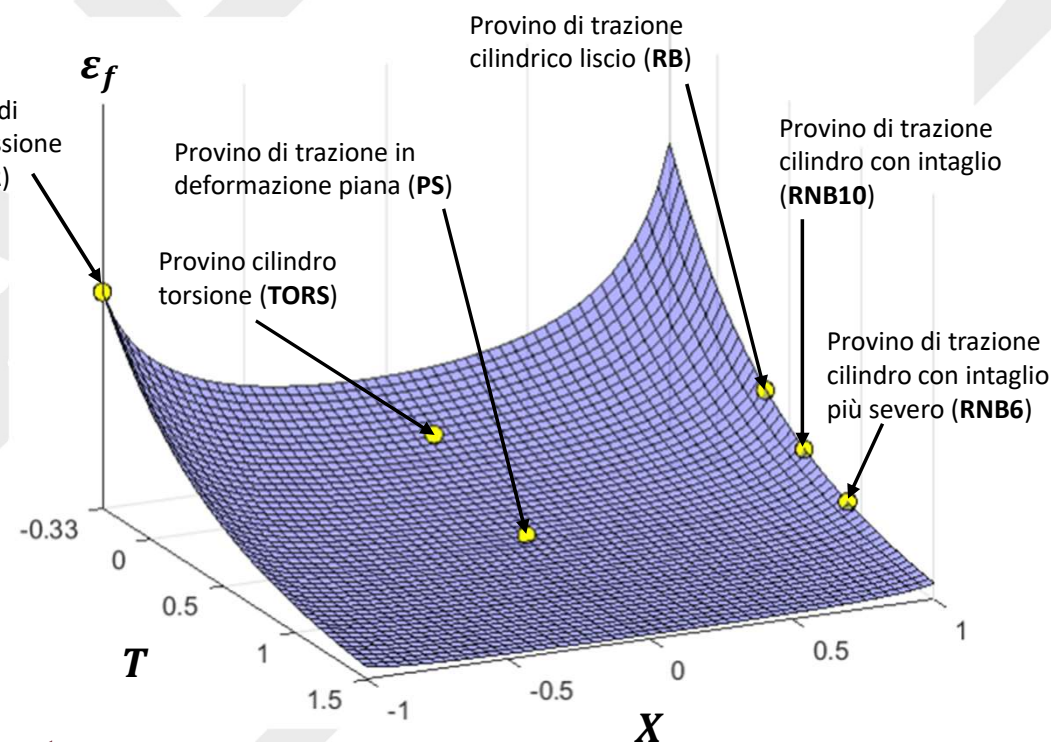
Test sperimentali: prove di trazione, di torsione, deformazione piana, biassiali trazione-taglio, compressione, etc. Misurazione curve globali (forza-spostamento)

Simulazioni numeriche dei test sperimentali: metodo agli elementi finiti (FEM)

Grandezze locali nel punto critico nelle condizione di inizio rottura : deformazione plastica a rottura ϵ_f , triassialità T e parametro deviatorico X

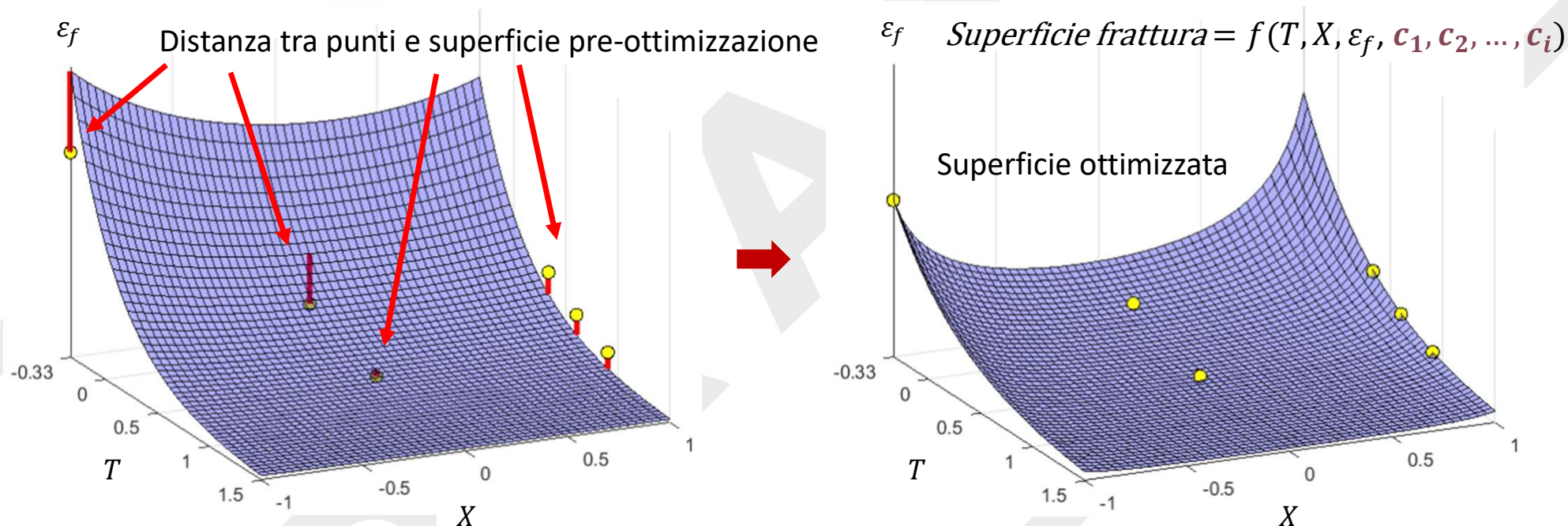
Ottenimento della superficie di frattura tramite un algoritmo di minimizzazione

La procedura di calibrazione va eseguita per ogni materiale di cui si vuole stimare la duttilità



Modelli di danno duttile (P.L): costanti di calibrazione

La superficie è identificata dalle costanti (c_1, c_2, \dots, c_i) specifiche del modello adottato, oltre che essere funzione di T e X . Tali costanti assumono valori diversi in base al materiale scelto e governano sia la forma che la «quota» della superficie di frattura nello spazio (T, X, ε_f) . Si ricavano nell'ultima fase della procedura di calibrazione (algoritmo di minimizzazione).



Tramite un algoritmo matematico di minimizzazione, immettendo dei valori di primo tentativo delle costanti, si trova il valore delle costanti tali per cui la superficie di rottura risulta il più vicino possibile ai punti sperimentali (minimizzazione distanza), quest'ultimi individuati ciascuno dalla propria terna (T, X, ε_f) .

Modelli di danno duttile: funzione Γ

Esistono diverse funzioni Γ in base al modello di danno scelto. I primi modelli di danno sviluppati erano funzione della sola T , mentre recentemente si è dimostrato che il danneggiamento duttile dipende sia dalla triassialità T , sia dal parametro deviatorico X (angolo di Lode).

Modelli datati: $\varepsilon_f = \Gamma^{-1}(T) \longrightarrow$ Il luogo dei punti è il piano (T, ε_f)

Modelli più recenti: $\varepsilon_f = \Gamma^{-1}(T, X) \longrightarrow$ Il luogo dei punti è lo spazio (T, X, ε_f)

Di seguito si riportano alcuni modelli dipendenti dalla sola T e altri modelli funzione di T e X

Modelli di danno duttile: modelli $\Gamma(T)$

Maximum equivalent strain

$$D = \int_0^{\varepsilon_f} \frac{1}{\varepsilon_f} d\varepsilon_p \quad \varepsilon_f = \text{costante}$$

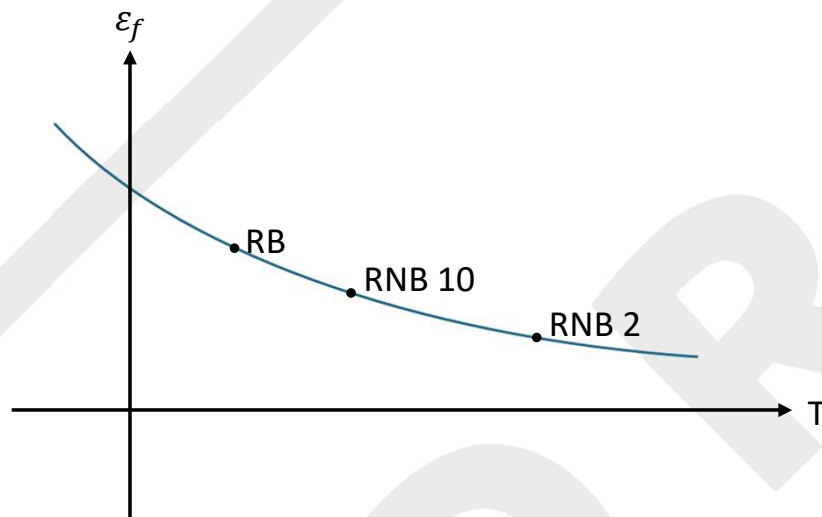
Il materiale arriva a cedimento ($D = 1$) quando la deformazione plastica accumulata raggiunge il valore critico di rottura ε_f .

Si calibra attraverso l'esecuzione di una sola prova meccanica, generalmente **RB**, da cui si ricava ε_f .

Modelli di danno duttile: modelli $\Gamma(T)$

Rice and Tracey (RT)

$$D = \int_0^{\varepsilon_f} c_1 e^{(c_2 T)} d\varepsilon_p \quad \text{In condizioni di carico proporzionale (P.L.)} \longrightarrow \varepsilon_f(T) = c_1 e^{-c_2 T}$$



I termini c_1 e c_2 sono le costanti del materiale che si ricavano tramite la procedura di calibrazione. Per ricavarle è necessario eseguire almeno due prove meccaniche: **RB** e **RNB**

Il numero affianco alla dicitura **RNB** indica il raggio dell'intaglio. Più severo è l'intaglio e maggiore sarà la triassialità, ciò significa una minore capacità di accumulare deformazione plastica.

Modelli di danno duttile: modelli $\Gamma(T)$

Johnson – Cook (JC)

Ipotesi di P.L.

$$\varepsilon_f(T) = [c_1 + c_2 e^{-c_3 T}] \underbrace{\left[1 + c_4 \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right]}_{\text{effetto velocità di deformazione}} \underbrace{\left[1 + c_5 \frac{T - T_0}{T_{melt} - T_0} \right]}_{\text{effetto temperatura}}$$

- $\dot{\varepsilon}_p$ velocità di deformazione (strain rate)
- $\dot{\varepsilon}_0$ strain rate di riferimento
- T_{melt} temperatura di fusione
- T_0 temperatura di riferimento

Il modello JC è costituito da tre blocchi: la prima parentesi contiene la formulazione di Rice and Tracey. La seconda parentesi tiene conto dell'effetto di sollecitazioni dinamiche (che variano molto velocemente nel tempo). La terza parentesi tiene conto dell'effetto della temperatura.

In condizioni statiche e a temperatura ambiente la formulazione si riduce a: $\varepsilon_f = [c_1 + c_2 e^{-c_3 T}]$

Costanti di calibrazione: c_1, c_2, c_3, c_4, c_5

Prove meccaniche: **RB** e **RNB** condotte a diversa velocità di deformazione e diversa temperatura

Modello usato per gestire condizioni di crash test, impatto o processi di stampaggio veloce

Modelli di danno duttile: modelli $\Gamma(T, X)$

Wierzbicki-Bao

$$\varepsilon_f(T, X) = c_1 e^{-c_2 T} - (c_1 e^{-c_2 T} - c_3 e^{-c_4 T}) \left(1 - X^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

Per valori di $X=1$ la formulazione si riduce al modello di Rice and Tracey

Costanti di calibrazione: c_1, c_2, c_3, c_4

Il termine n è un parametro del materiale legato alla legge costitutiva del materiale: $\sigma = K \varepsilon^n$

Prove meccaniche: **RB, RNB, TORS, PS**, etc. È importante che vengano eseguite prove in cui si possa osservare sia l'effetto della triassialità (RB, RNB), sia l'effetto del parametro deviatorico (TORS, PS). Si possono eseguire anche prove multiassiali trazione-torsione, compressione-torsione, trazione-taglio, compressione-taglio.

Modelli di danno duttile: modelli $\Gamma(T, X)$

Wierzbicki-Bai (Modified Mohr-Coulomb MMC)

$$\varepsilon_f(T, X) = \left\{ \frac{K}{c_2} \left[\sqrt{\frac{1 + c_1^2}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos(X)\right) + c_1 \left(T + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos(X)\right)\right) \right] \right\}^{-\frac{1}{n}}$$

A volte il modello è espresso tramite il parametro di Lode θ anziché esplicitare il parametro deviatorico X .
Si ricordano le espressioni di conversione tra le due grandezze:

$$X = \cos 3\theta \quad ; \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos(X)$$

Costanti di calibrazione: c_1, c_2

Parametri legge costitutiva del materiale: K, n ($\sigma = K \varepsilon^n$)

Prove meccaniche: **RB, RNB, TORS, PS**, prove multiassiali, etc.

Modelli di danno duttile: modelli $\Gamma(T, X)$

Coppola-Cortese (CC)

$$\varepsilon_f(T, X) = \left(\frac{1}{c_1} e^{-c_2 T} \right) \left(\frac{\cos \left[\beta \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos(\gamma) \right]}{\cos \left[\beta \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arccos(\gamma X) \right]} \right)^{\frac{1}{n}}$$

La prima parentesi gestisce l'effetto della triassialità, mentre la seconda parentesi tiene conto dell'effetto del parametro deviatorico.

Costanti di calibrazione: c_1, c_2, β, γ

Parametri legge costitutiva del materiale: n ($\sigma = K \varepsilon^n$)

Prove meccaniche: **RB, RNB, TORS, PS**, prove multiassiali, etc.