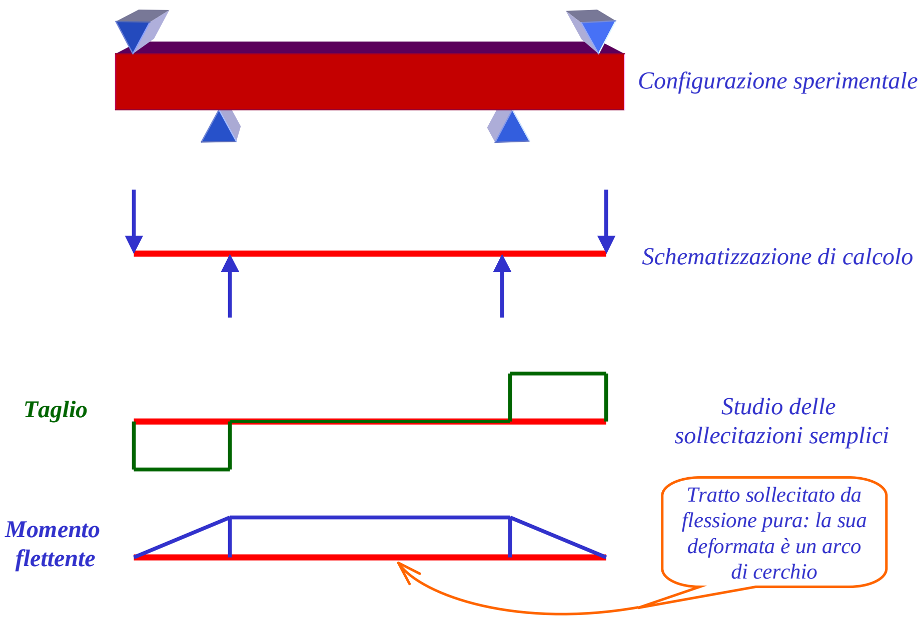
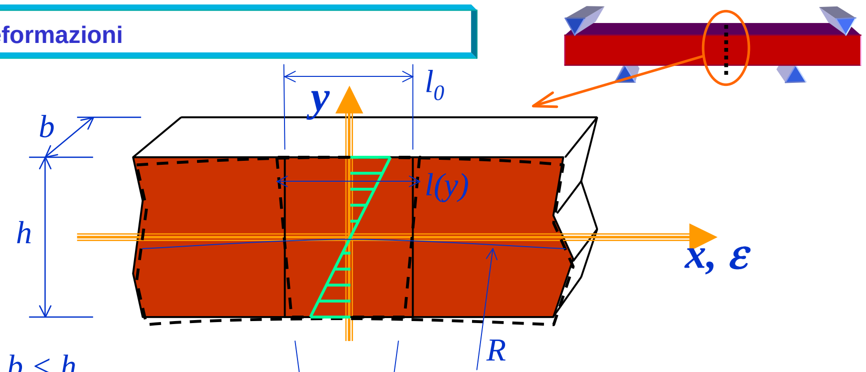
Flessione plastica
e tensioni residue

Flessione su 4 punti



Deformazioni



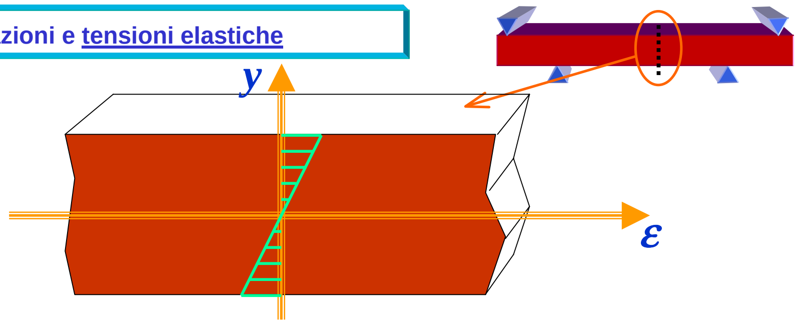
$$\varepsilon(y) = \frac{l(y) - l_0}{l_0} = $$

$$= \frac{(R + y)\theta - R\theta}{R\theta} = \frac{y}{R}$$

La deformazione non dipende dal comportamento elastico o plastico del materiale, ma solo dalla curvatura imposta alla trave.

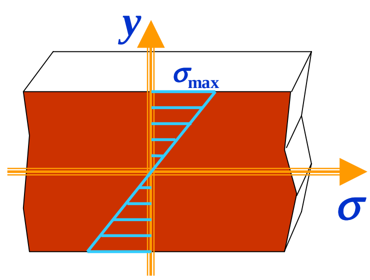
$$\varepsilon(y) = \frac{y}{R} \qquad \varepsilon_{\max} = \frac{h/2}{R}$$

Deformazioni e tensioni elastiche

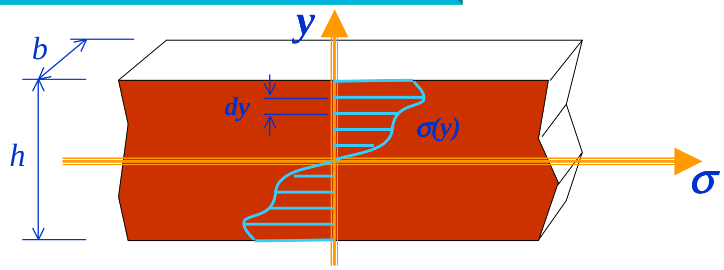


In campo elastico, tensioni e deformazioni sono legate dalla legge di Hooke: $\sigma = E\varepsilon$

$$\left.\begin{aligned} \sigma(y) &= E\,\varepsilon(y) = E\,\frac{y}{R} \\ \sigma_{\max} &= E\,\varepsilon_{\max} = E\,\frac{h/2}{R} \end{aligned}\right\} \quad \sigma(y) = \frac{\sigma_{\max}}{h/2}\,y$$



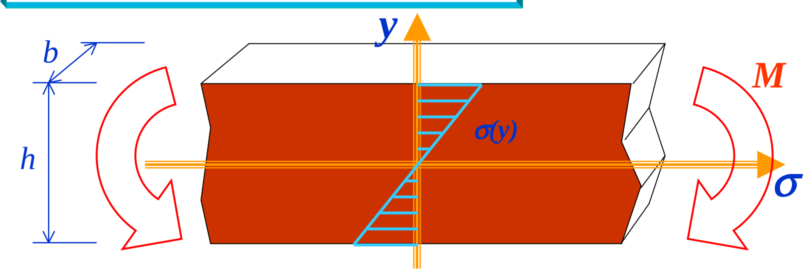
Condizione di equilibrio sulla sezione



*Qualsiasi sia l'andamento σ(y) delle tensioni nella sezione, esso è legato al momento flettente applicato **M** dalla seguente relazione di equilibrio:*

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} \underbrace{y}_{\text{braccio}}\ \underbrace{\sigma(y)\ \underbrace{b\,dy}_{\text{areola}}}_{\text{forza infinitesima}}$$

Comportamento elastico



Nel caso di comportamento elastico del materiale, l'andamento σ(y) delle tensioni nella sezione ha l'espressione trovata in precedenza: $\sigma(y) = \dfrac{\sigma_{max}}{h/2}\, y$

Quindi potremo scrivere:

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} y\,\sigma(y)\ b\,dy \;=\; \frac{\sigma_{max}}{h/2}\, b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy \;=\; \underbrace{\frac{\sigma_{max}}{h/2}\ \underbrace{\frac{b\,h^3}{12}}_{I}}_{W} = \sigma_{max}\,\frac{b\,h^2}{6}$$

Seguono immediatamente le note relazioni:

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M}{W}} \qquad \boxed{\frac{1}{R} = \frac{M}{E\,I}}$$

essendo: $\sigma_{max} = E\,\dfrac{h/2}{R}$

4-10

Comportamento elastico-plastico

Il comportamento elastico della trave ha termine quando il valore della σ_{max} raggiunge la tensione di snervamento σ_s. Si ha allora il massimo momento elastico M_e che può opporre la sezione:

$$M_e = \sigma_s \frac{b\,h^2}{6}$$

In questa situazione limite, la curvatura varrà:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{M_e}{E\,I} \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{E}{\sigma_s} h/2$$

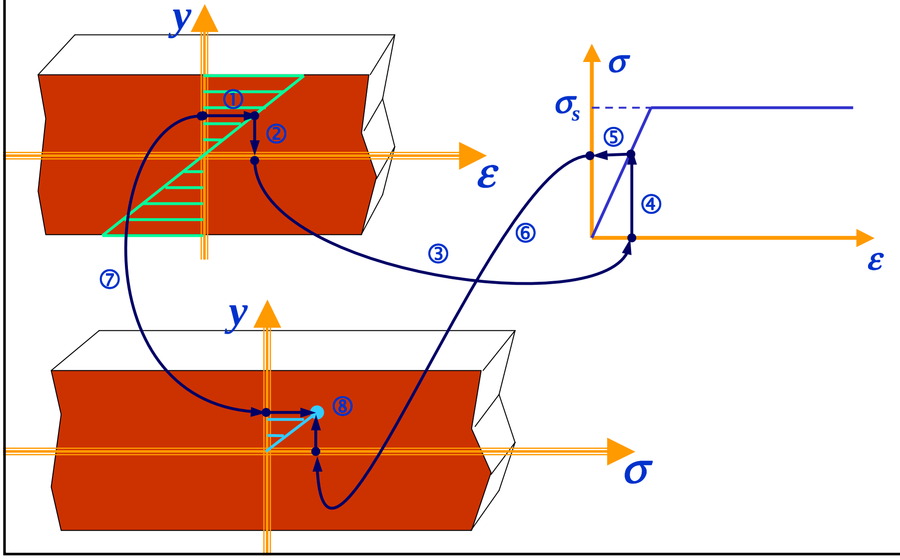
Esempio:

h = 10 mm, b = 10 mm, E = 200 GPa, σ_s = 400 MPa

- M_e = 66.7 Nm
- R_e = 2.5 m

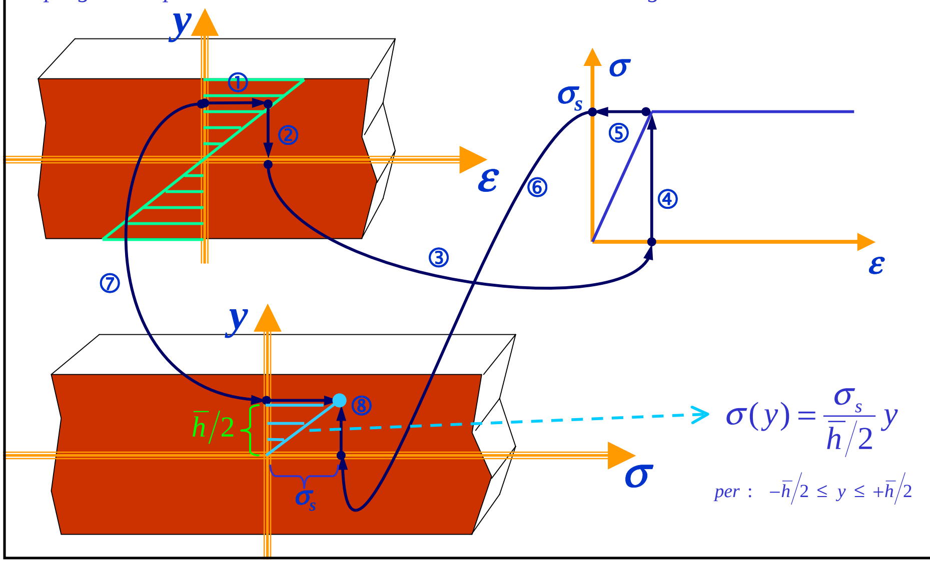
Comportamento elastico-plastico

Imponendo alla trave una curvatura superiore ad $1/R_e$ ed ipotizzando valido per il materiale il modello elastico-plastico perfetto, si avrà una progressiva plasticizzazione della sezione descrivibile come segue:



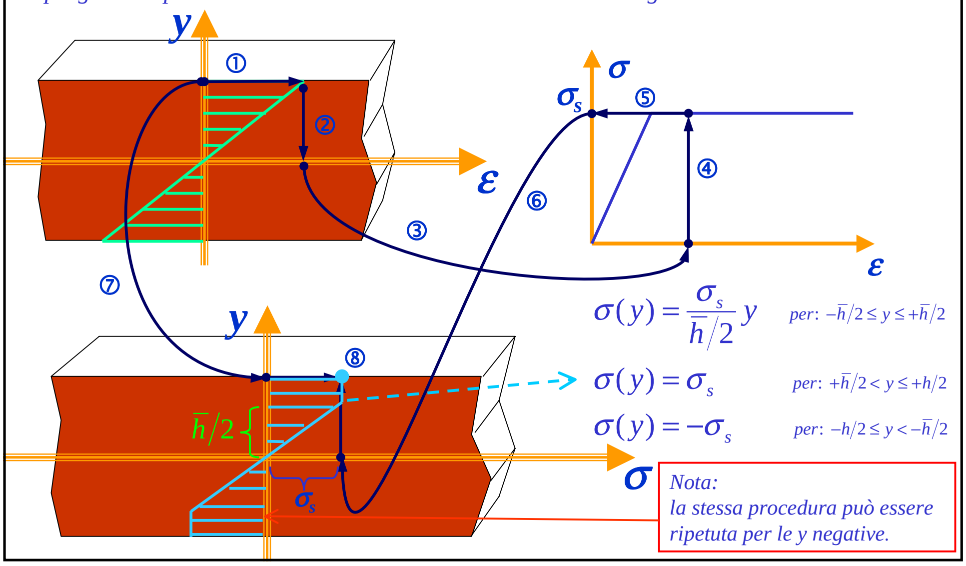
Comportamento elastico-plastico

Imponendo alla trave una curvatura superiore ad $1/R_e$ ed ipotizzando valido il modello elastico-plastico perfetto per il materiale, si avrà una progressiva plasticizzazione della sezione descrivibile come segue:

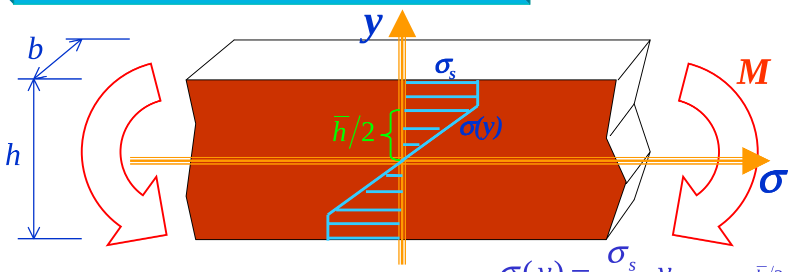


Comportamento elastico-plastico

Imponendo alla trave una curvatura superiore ad $1/R_e$ ed ipotizzando valido il modello elastico-plastico perfetto per il materiale, si avrà una progressiva plasticizzazione della sezione descrivibile come segue:



Comportamento elastico-plastico



Nel caso di comportamento del materiale elastico-plastico perfetto, l'andamento σ(y) delle tensioni nella sezione ha l'espressione:

$$\sigma(y) = \frac{\sigma_s}{\bar{h}/2}\, y \qquad per: -\bar{h}/2 \le y \le +\bar{h}/2$$

$$\sigma(y) = \sigma_s \qquad per: +\bar{h}/2 < y \le +h/2$$

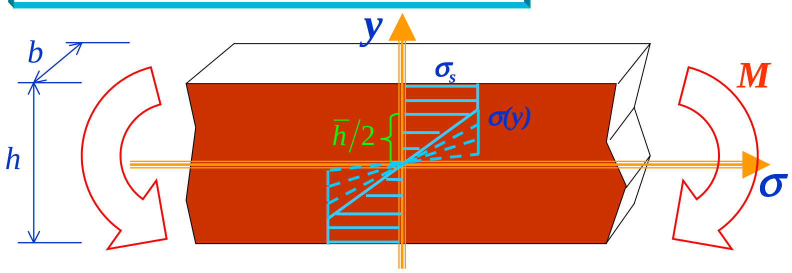
$$\sigma(y) = -\sigma_s \qquad per: -h/2 \le y < -\bar{h}/2$$

Quindi potremo scrivere:

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} y\, \sigma(y)\; b\, dy \;= \frac{\sigma_s}{\bar{h}/2}\, b \int_{-\bar{h}/2}^{+\bar{h}/2} y^2 dy + 2\left(\sigma_s\, b \int_{+\bar{h}/2}^{+h/2} y\, dy\right)$$

$$= \sigma_s \frac{b\,\bar{h}^2}{6} + 2\left[\frac{\sigma_s\, b}{8}\left(h^2 - \bar{h}^2\right)\right] \;= \sigma_s \frac{b\,h^2}{4}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\bar{h}}{h}\right)^2\right]$$

Comportamento elastico-plastico



Nel tratto elastico vale la relazione trovata in precedenza: $\sigma(y) = E\,\dfrac{y}{R}$

Nel punto di passaggio tra comportamento elastico e plastico potremo scrivere:

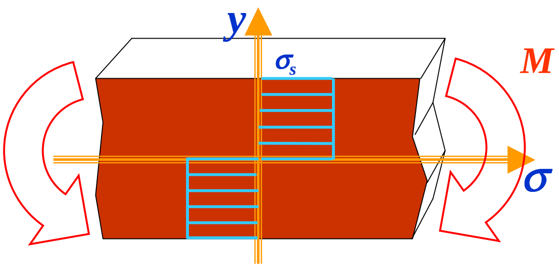
$$\sigma_S = E\,\frac{\bar{h}/2}{R}$$

Quindi, all'aumentare della curvatura (=diminuzione del raggio di curvatura R) la fascia centrale della trave a comportamento elastico tende a scomparire:

$$\bar{h}/2 = R\,\frac{\sigma_S}{E}$$

Completa plasticizzazione

Nella condizione limite in cui $R \to 0$, tutta la sezione è plasticizzata (metà a trazione e metà a compressione)



ed il momento resistente massimo che potrà essere offerto dalla trave varrà:

$$M_{pl} = \lim_{\bar{h} \to 0} M$$

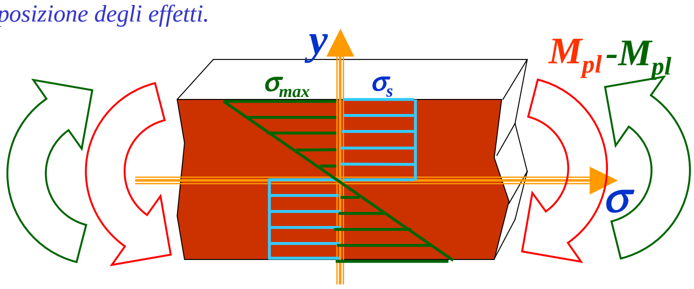
$$= \lim_{\bar{h} \to 0} \sigma_s \frac{b\,h^2}{4}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\bar{h}}{h}\right)^2\right] = \sigma_s \frac{b\,h^2}{4} \quad \Rightarrow \quad M_{pl} = \frac{3}{2} M_e$$

Sebbene questa sia una condizione limite, è sufficiente che venga plasticizzata il 90% della sezione perché si abbia un momento resistente massimo molto vicino a quello di completa plasticizzazione:

$$M_{90\%} = \frac{b\,h^2}{4}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{0.1h}{h}\right)^2\right] = 0.997\, M_{pl}$$

Tensioni residue: ritorno elastico

Lo studio di quel che succede togliendo il momento flettente applicato M_{pl} (dopo aver raggiunto la condizione di completa plasticizzazione) può essere affrontato immaginando di applicare un momento uguale e contrario, e ragionando per sovrapposizione degli effetti.



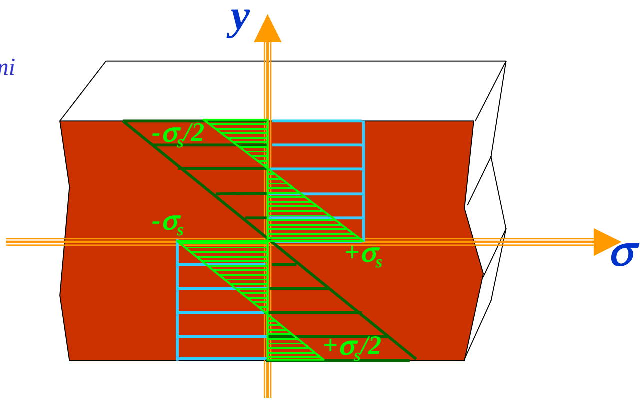
Si noti che le tensioni indotte dal momento contrario ($-M_{pl}$) variano linearmente nella sezione perché sono di tipo elastico. Infatti, si avrebbe nuova plasticizzazione solo se queste tensioni, sommate alle precedenti, avessero valori al di fuori dell'intervallo $-\sigma_s$, $+\sigma_s$.

Poiché vale il legame elastico tra σ_{max} ed M, avremo:

$$M = \sigma_{\max} \frac{b\,h^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\max} = -M_{pl} \frac{6}{b\,h^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\max} = -\frac{3}{2}\sigma_s$$

Tensioni residue: ritorno elastico

Sommando i due diagrammi delle tensioni relativi alle fasi di carico e scarico si ottiene il diagramma delle tensioni residue:



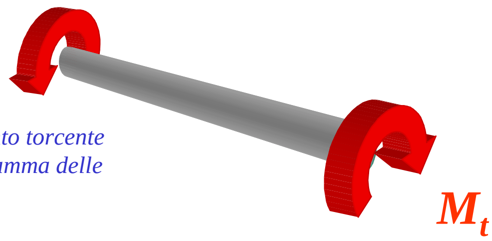
Il sistema di tensioni residue ottenute può essere utilmente sfruttato per modificare le capacità di carico della trave: infatti, per portare nuovamente la sezione considerata ad incipiente plasticizzazione è ora necessario applicare un momento pari a +1.5 M_e.

Al contrario, se si applica un momento flettente di segno opposto è sufficiente che esso valga –0.5 M_e perché le fibre superiori ed inferiori raggiungano rispettivamente la tensione di snervamento negativa e positiva.

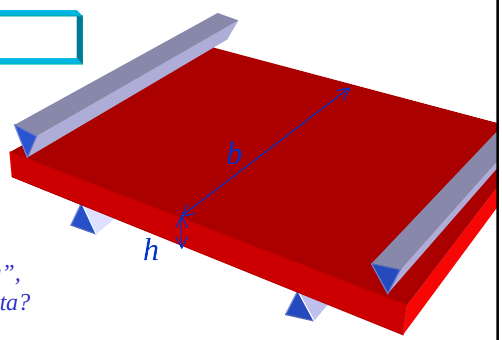
Esercizio 1

Si ripeta lo studio effettuato per una barra cilindrica piena sollecitata a torsione oltre il limite elastico.

In particolare si calcoli il valore del momento torcente di totale plasticizzazione e si tracci il diagramma delle tensioni tangenziali residue.



Esercizio 2



Se per l'analisi fatta si considerasse una trave di larghezza b molto maggiore dello spessore h, cioè se si introducesse il vincolo di "contrazione laterale impedita", cosa cambierebbe nella trattazione effettuata?