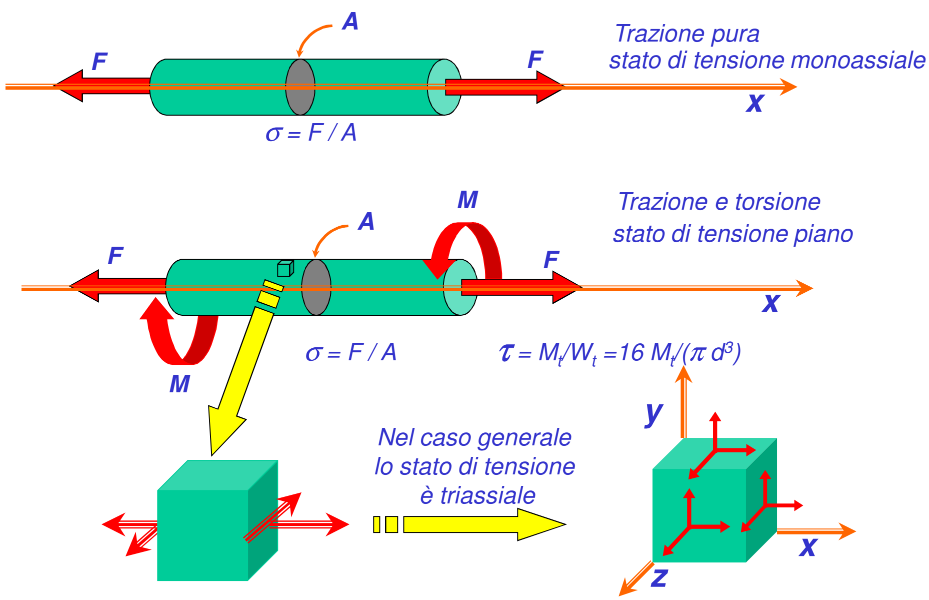
Stato di tensione

- Stato di tensione triassiale
- Stato di tensione piano
- Cerchio di Mohr

Stato di tensione



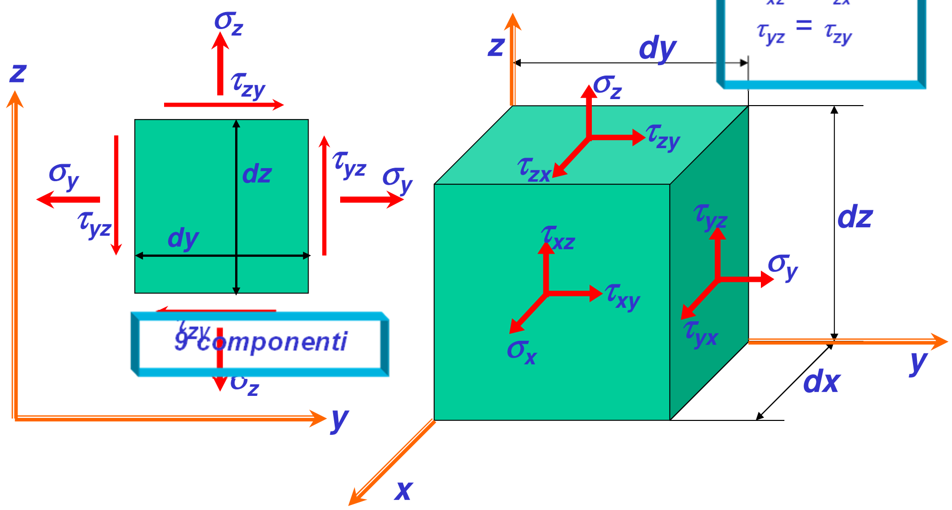
Stato di tensione in un punto

6 componenti indipendenti

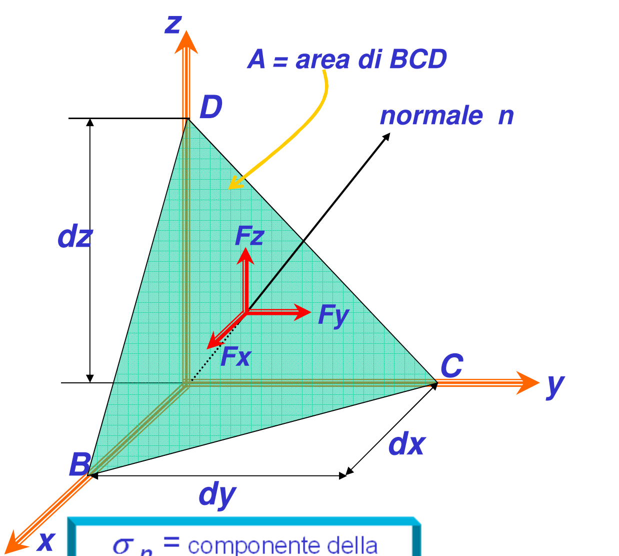
Dall'equilibrio alla rotazione si ha:

$\tau_{yz}\,(dz\,dx)\,dy - \tau_{zy}\,(dy\,dx)\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \Rightarrow$

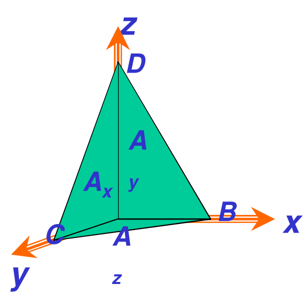
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$
$\tau_{xz} = \tau_{zx}$
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$



Stato di tensione in un punto



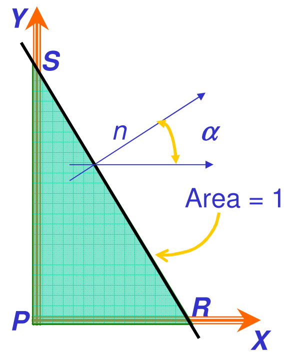
σ_n = componente della tensione normale al piano



$\cos\alpha = l$
$\cos\beta = m$
$\cos\gamma = n$

$A_x = A\,l$
$A_y = A\,m$
$A_z = A\,n$

Stato di tensione piano



Si consideri il piano RS
parallelo all'asse *z*
e con la normale *n* inclinata di α
rispetto all'asse *x*

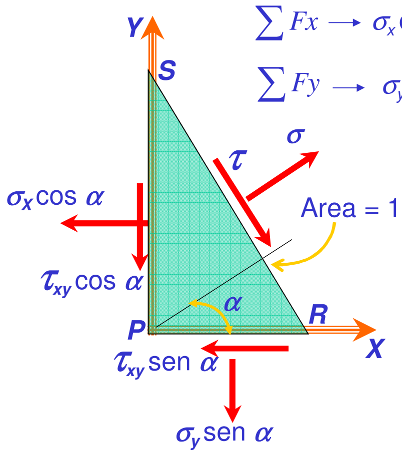
Ipotesi: stato piano di tensione

Si immagini ora di spostare il punto di vista sull'asse *z*

Stato di tensione piano

Si consideri lo stato tensionale sul piano RS

Dall'equilibrio alla traslazione si ha:



$$\sum Fx \longrightarrow \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen}\alpha - \sigma\cos\alpha - \tau \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\sum Fy \longrightarrow \sigma_y \sin\alpha + \tau_{xy}\cos\alpha - \sigma\sin\alpha + \tau\cos\alpha = 0$$

moltiplicando la prima per $\cos\alpha$
e la seconda per $\sin\alpha$ si ha:

$$\sigma_x\cos^2\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma\cos^2\alpha +$$
$$-\ \tau\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\sigma_y\sin^2\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma\sin^2\alpha +$$
$$+\ \tau\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

sommando le due equazioni si ottiene:

$$\sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha = \sigma$$

Stato di tensione piano

$$\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma$$

ricordando che: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2$
$\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha) / 2$

l'equazione precedente può essere riscritta nella forma seguente:

$$1/2\, [\sigma_x (1+ \cos 2\alpha) + \sigma_y (1- \cos 2\alpha)] + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma$$

che equivale a:

$$\boxed{\sigma = ½\, (\sigma_x + \sigma_y) + ½\, (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy}\, \text{sen}\, 2\alpha}$$

Stato di tensione piano

tornando ora alle due equazioni di equilibrio:

$$\sum Fx \longrightarrow \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy}\, \text{sen}\, \alpha - \sigma \cos \alpha - \tau\, \text{sen}\, \alpha = 0$$

$$\sum Fy \longrightarrow \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma \sin \alpha + \tau \cos \alpha = 0$$

moltiplicando questa volta la prima per $\sin \alpha$ e la seconda per $\cos \alpha$ si ha:

$$\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \sin^2 \alpha - \sigma \sin \alpha \cos \alpha - \tau \sin^2 \alpha = 0$$

$$\sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha - \sigma \sin \alpha \cos \alpha + \tau \cos^2 \alpha = 0$$

sottraendo le due equazioni si ottiene:

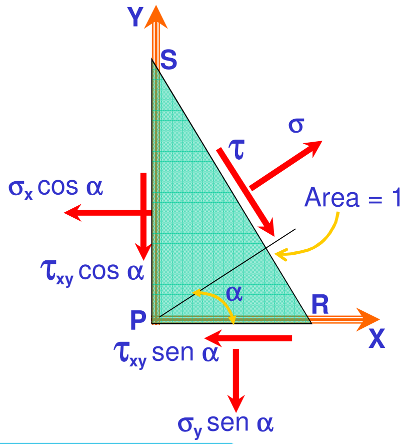
$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) - \tau = 0$$

che equivale a:

$$\boxed{\tau = ½\, (\sigma_x - \sigma_y)\, \text{sen}\, 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha}$$

Stato di tensione piano

Le componenti della tensione σ e τ sul piano RS e possono dunque essere espresse in funzione delle componenti σ_x e σ_y e dell'angolo α mediente le seguenti relazioni:



$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\,\mathrm{sen}\,2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

Stato di tensione piano

L'angolo α che individua i piani principali può essere ricavato cercando il massimo della funzione $\sigma(\alpha)$:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$

ovvero, uguagliando a 0 la derivata $d\sigma/d\alpha$

$$d\sigma/d\alpha = -2\cdot\tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + 2\,\tau_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

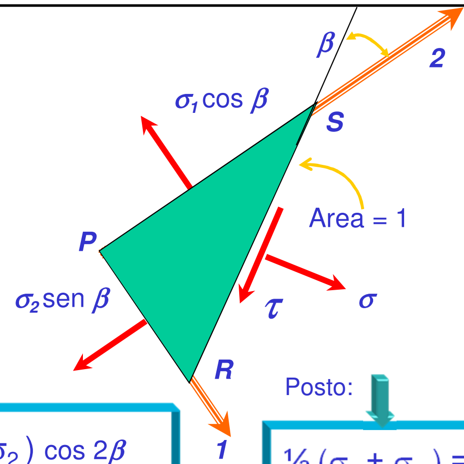
$$(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha = 2\,\tau_{xy}\cos 2\alpha$$

e quindi

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Il cerchio di Mohr

Nel sistema di riferimento orientato secondo le direzioni principali le equazioni di equilibrio si possono scrivere come segue:



$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\beta$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\ \text{sen}\ 2\beta$$

Posto:

$$\tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \delta$$

$$\tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \rho$$

$$(\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$

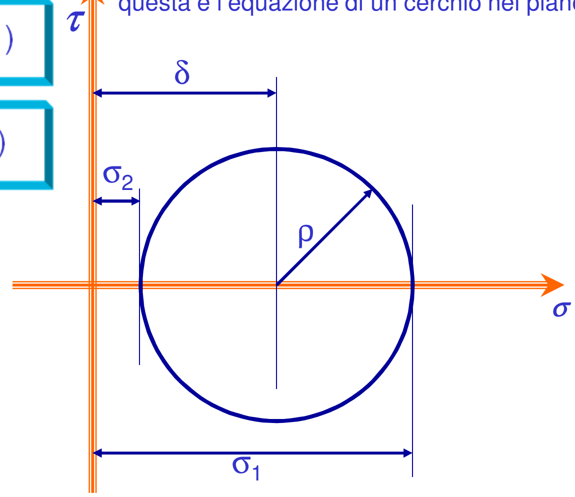
Il cerchio di Mohr

$$(\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$

questa è l'equazione di un cerchio nel piano σ - τ

$$\delta = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$\rho = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$



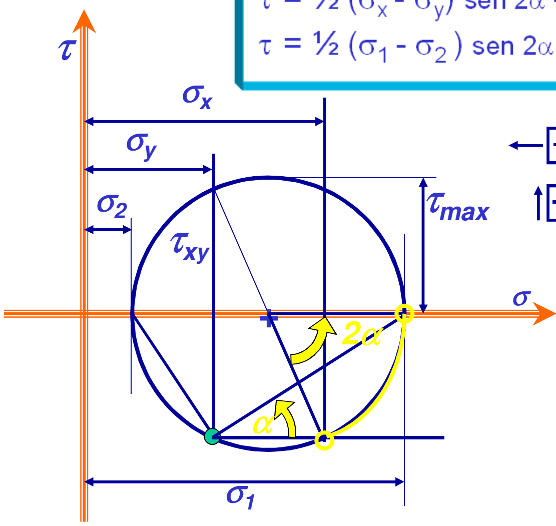
Il cerchio di Mohr

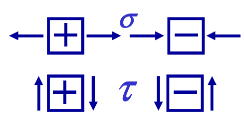
$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\alpha$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\,\text{sen}\,2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\,\text{sen}\,2\alpha$$





convenzione sui segni delle tensioni

L'angolo α che individua il piano principale rispetto alla direzione ***x*** è dato dalla relazione:

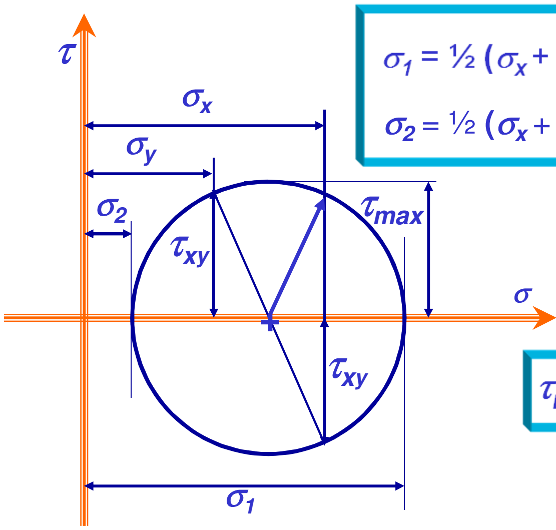
$$tg\,2\alpha = \frac{2\,\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Il cerchio di Mohr

Le tensioni principali possono essere ricavate geometricamente dal cerchio di Mohr se sono note le componenti di tensione nel sistema ***xy***:

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2\}}$$

$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2\}}$$



e il massimo valore del taglio è dato da:

$$\tau_{max} = \sqrt{\{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2\}}$$

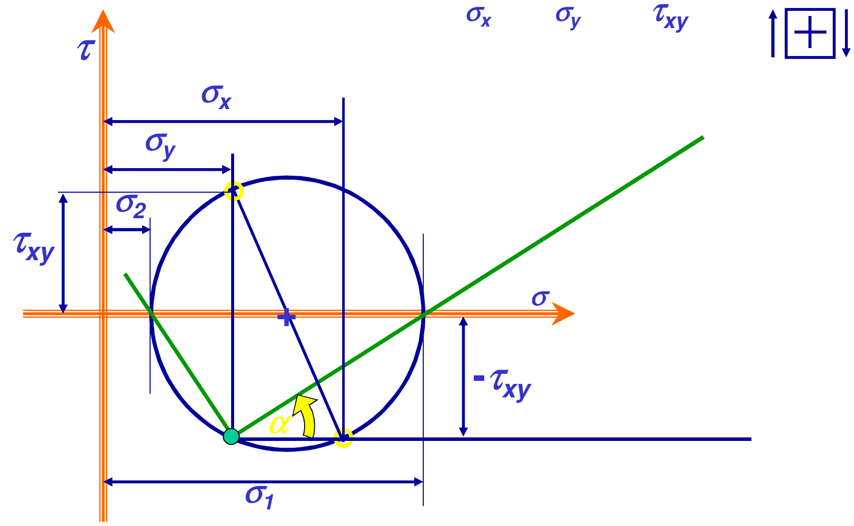
$$\tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$$

Il cerchio di Mohr

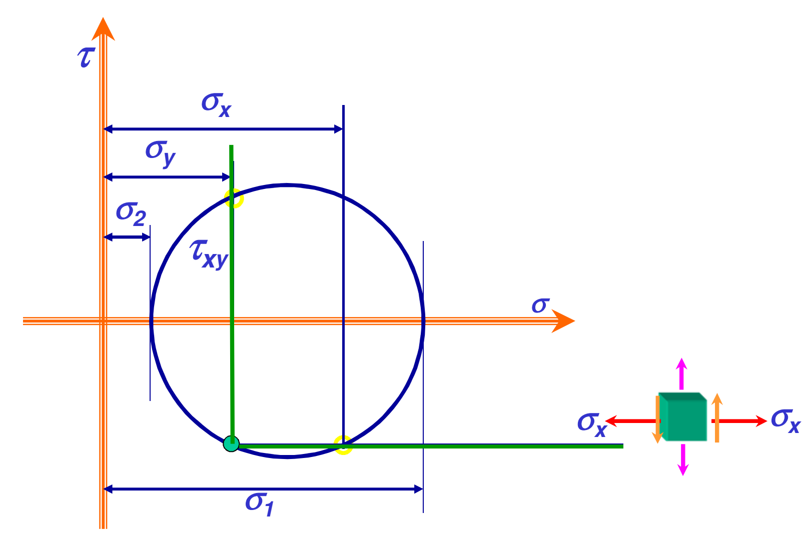
Costruzione del cerchio di Mohr

Dati:

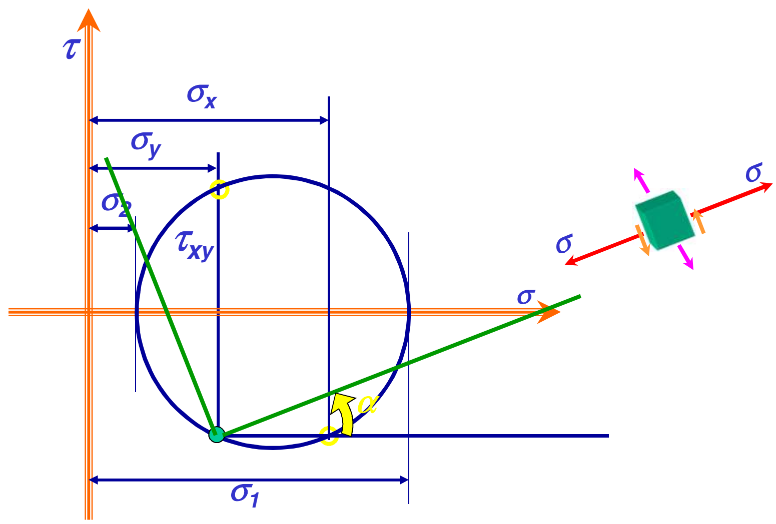
σ_x σ_y τ_{xy}



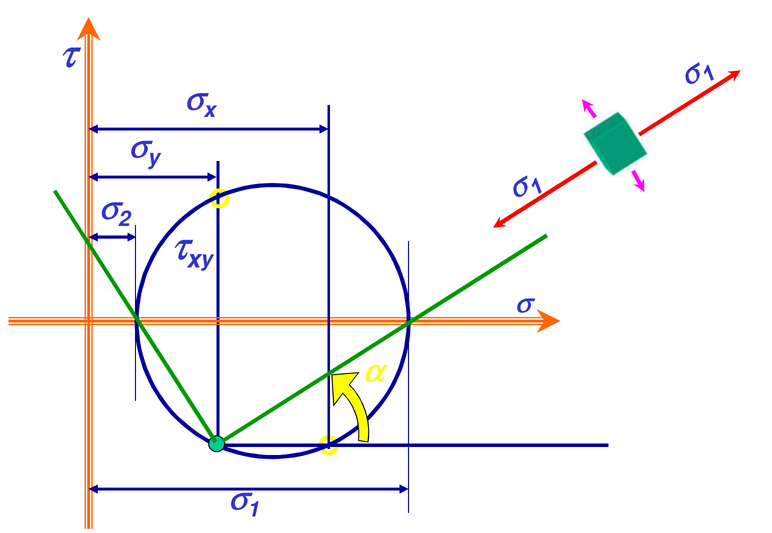
Il cerchio di Mohr



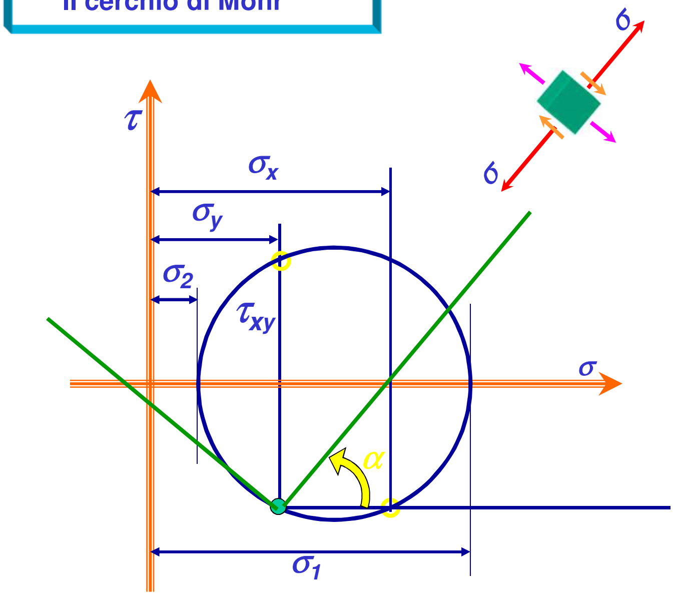
Il cerchio di Mohr



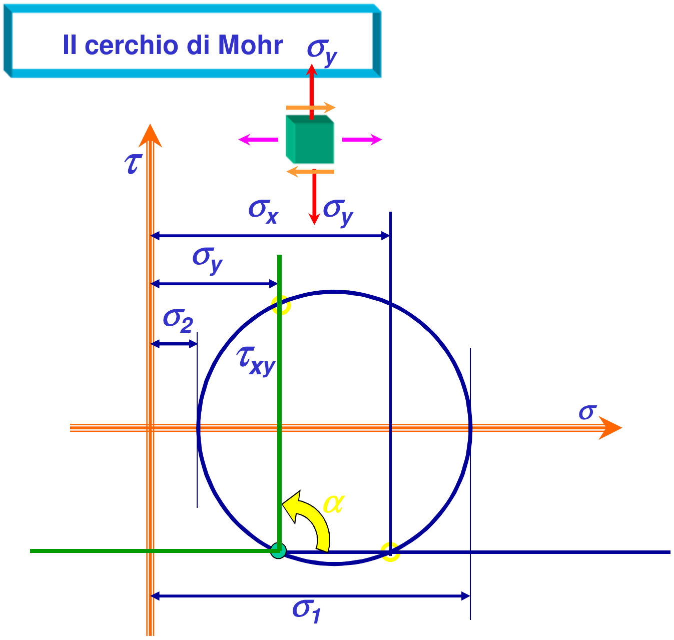
Il cerchio di Mohr



Il cerchio di Mohr

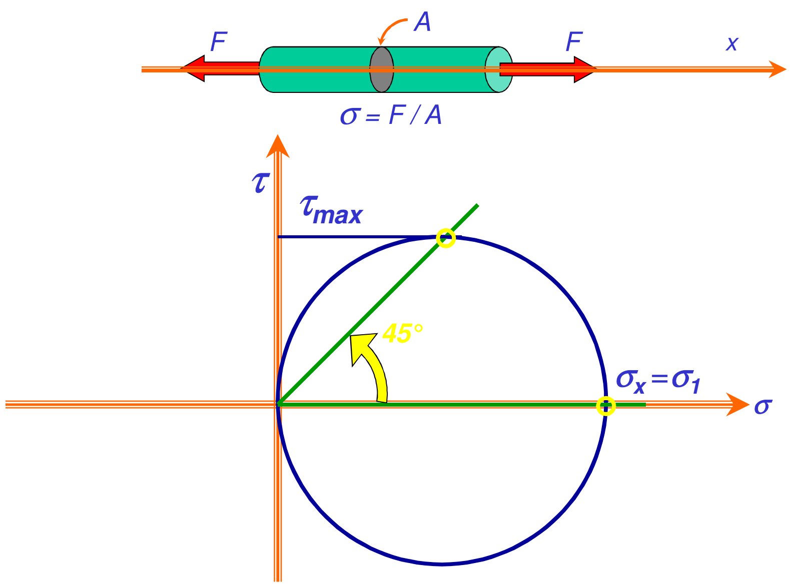


Il cerchio di Mohr



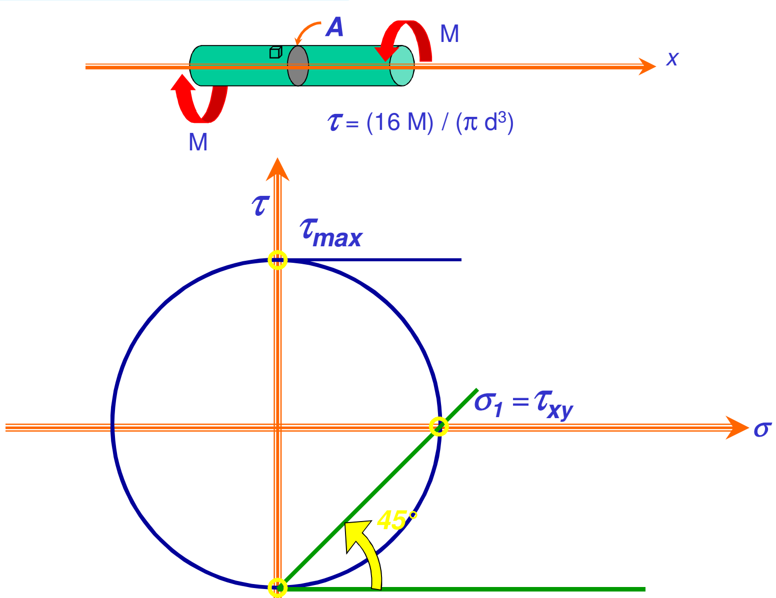
Il cerchio di Mohr

Caso della trazione pura



Il cerchio di Mohr

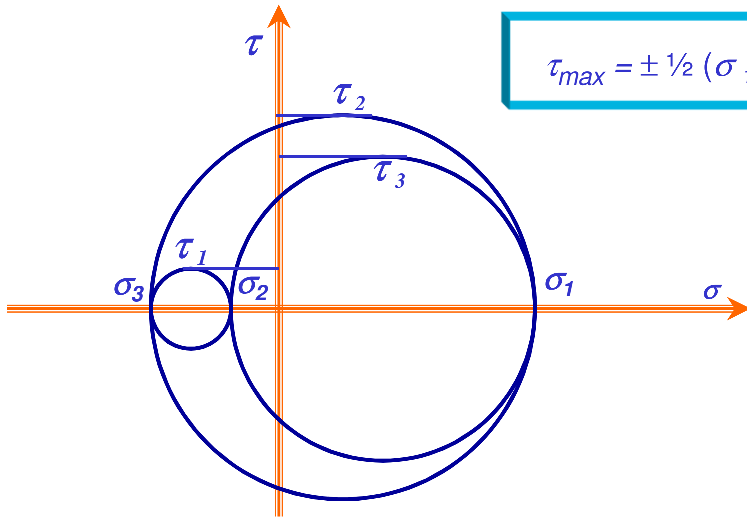
Caso della torsione pura



Il cerchio di Mohr

Stato di tensione triassiale

$$\tau_{max} = \pm \tfrac{1}{2}\,(\sigma_1 - \sigma_3)$$



$$\tau_1 = \pm \tfrac{1}{2}\,(\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\tau_2 = \pm \tfrac{1}{2}\,(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\tau_3 = \pm \tfrac{1}{2}\,(\sigma_1 - \sigma_2)$$