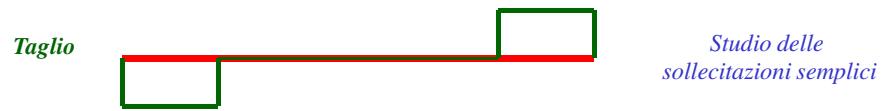
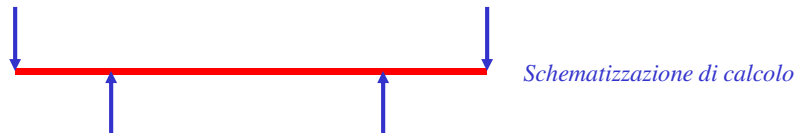
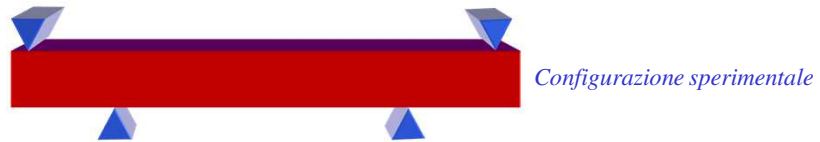


# Flessione plastica e tensioni residue

## Flessione su 4 punti



Momento flettente



Tratto sollecitato da flessione pura: la sua deformata è un arco di cerchio

**Deformazioni**

$b < h$

$\epsilon(y) = \frac{l(y) - l_0}{l_0} = \frac{(R + y)\theta - R\theta}{R\theta} = \frac{y}{R}$

$\epsilon_{\max} = \frac{h/2}{R}$

*La deformazione non dipende dal comportamento elastico o plastico del materiale, ma solo dalla curvatura imposta alla trave.*

**Deformazioni e tensioni elastiche**

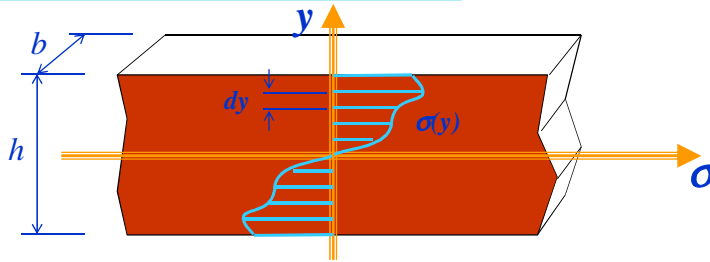
*In campo elastico, tensioni e deformazioni sono legate dalla legge di Hooke:  $\sigma = E\epsilon$*

$\sigma(y) = E\epsilon(y) = E\frac{y}{R}$

$\sigma_{\max} = E\epsilon_{\max} = E\frac{h/2}{R}$

$\sigma(y) = \frac{\sigma_{\max}}{h/2} y$

### Condizione di equilibrio sulla sezione

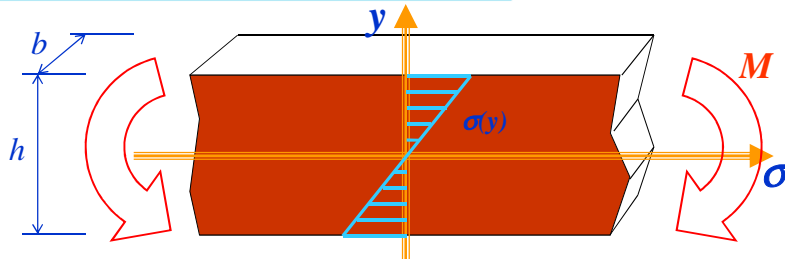


Qualsiasi sia l'andamento  $\sigma(y)$  delle tensioni nella sezione, esso è legato al momento flettente applicato  $M$  dalla seguente relazione di equilibrio:

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} y \underbrace{\sigma(y) b}_{\text{areola}} dy$$

↓ braccio      forza infinitesima

### Comportamento elastico



Nel caso di comportamento elastico del materiale, l'andamento  $\sigma(y)$  delle tensioni nella sezione ha l'espressione trovata in precedenza:  $\sigma(y) = \frac{\sigma_{\max}}{h/2} y$

Quindi potremo scrivere:

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} y \sigma(y) b dy = \frac{\sigma_{\max}}{h/2} b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \frac{\sigma_{\max}}{h/2} \left( \frac{bh^3}{12} \right) = \sigma_{\max} \frac{bh^2}{6}$$

Ⓜ W

Seguono immediatamente le note relazioni:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

essendo:  $\sigma_{\max} = E \frac{h/2}{R}$

4-10

### Comportamento elastico-plastico

Il comportamento elastico della trave ha termine quando il valore della  $\sigma_{\max}$  raggiunge la tensione di snervamento  $\sigma_s$ . Si ha allora il massimo momento elastico  $M_e$  che può opporre la sezione:

$$M_e = \sigma_s \frac{b h^2}{6}$$

In questa situazione limite, la curvatura varrà:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{M_e}{EI} \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{E}{\sigma_s} h/2$$

Esempio:

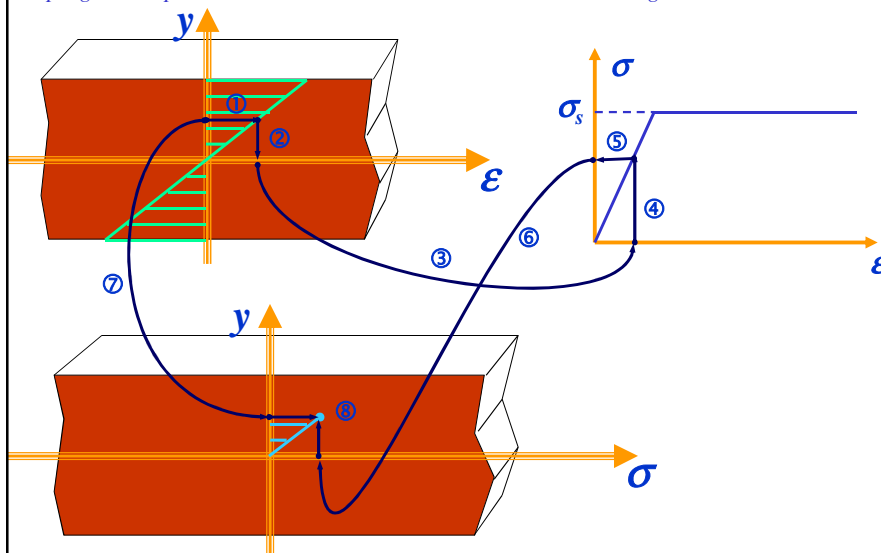
$h = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_s = 400 \text{ MPa}$

$$\Rightarrow M_e = 66.7 \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow R_e = 2.5 \text{ m}$$

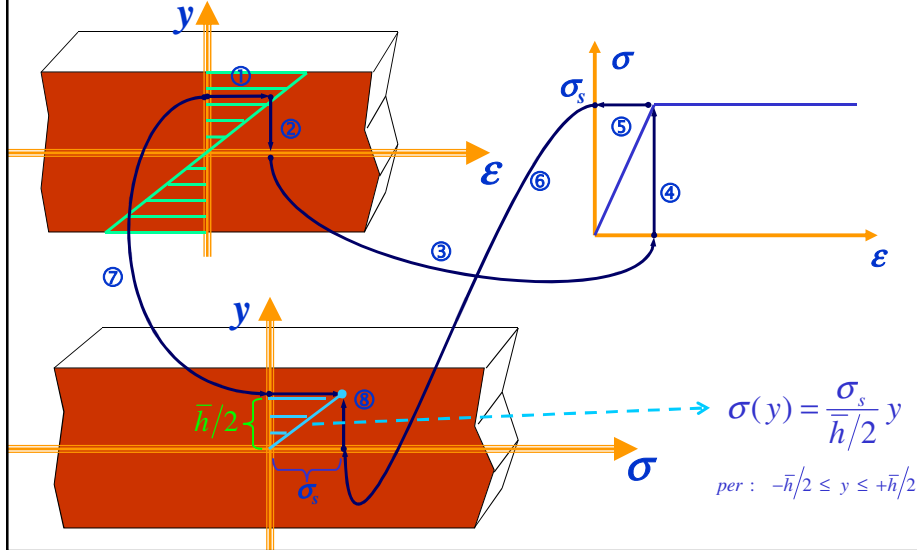
### Comportamento elastico-plastico

Imponendo alla trave una curvatura superiore ad  $1/R_e$  ed ipotizzando valido per il materiale il modello elastico-plastico perfetto, si avrà una progressiva plasticizzazione della sezione descrivibile come segue:



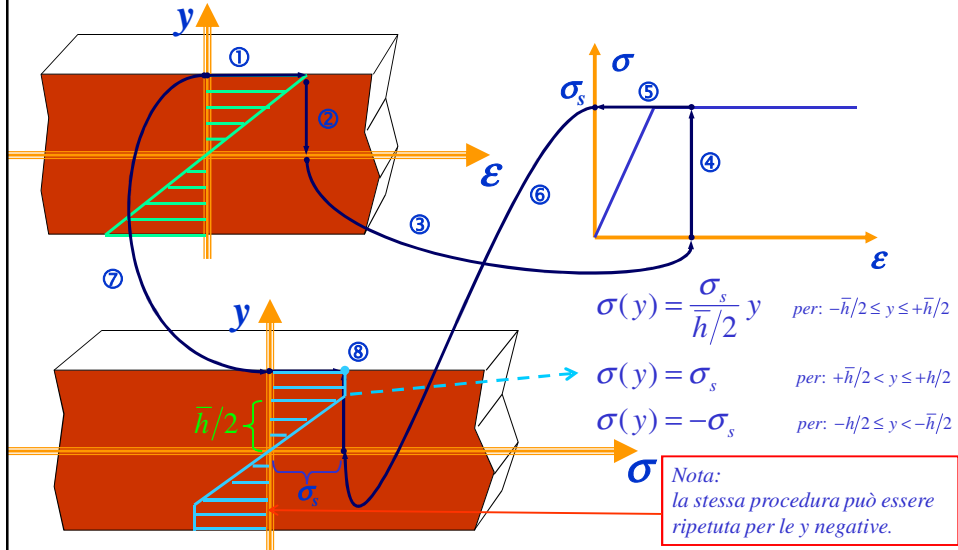
**Comportamento elastico-plastico**

Imponendo alla trave una curvatura superiore ad  $1/R_e$  ed ipotizzando valido il modello elastico-plastico perfetto per il materiale, si avrà una progressiva plasticizzazione della sezione descrivibile come segue:

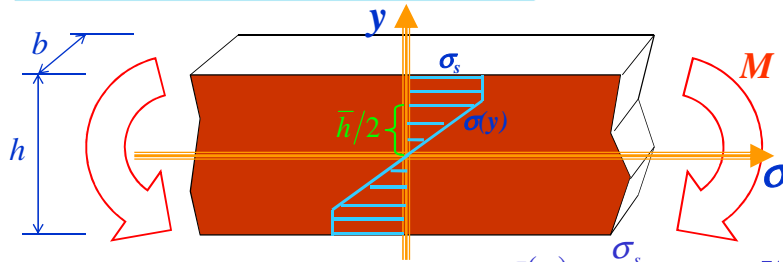


**Comportamento elastico-plastico**

Imponendo alla trave una curvatura superiore ad  $1/R_e$  ed ipotizzando valido il modello elastico-plastico perfetto per il materiale, si avrà una progressiva plasticizzazione della sezione descrivibile come segue:



### Comportamento elastico-plastico



Nel caso di comportamento del materiale elastico-plastico perfetto, l'andamento  $\sigma(y)$  delle tensioni nella sezione ha l'espressione:

$$\sigma(y) = \frac{\sigma_s}{\bar{h}/2} y \quad \text{per: } -\bar{h}/2 \leq y \leq +\bar{h}/2$$

$$\sigma(y) = \sigma_s \quad \text{per: } +\bar{h}/2 < y \leq +h/2$$

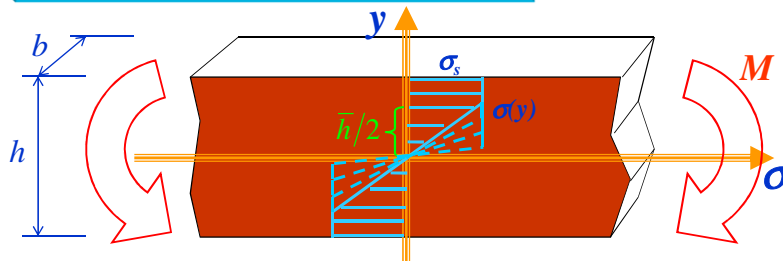
$$\sigma(y) = -\sigma_s \quad \text{per: } -h/2 \leq y < -\bar{h}/2$$

Quindi potremo scrivere:

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} y \sigma(y) b dy = \frac{\sigma_s}{\bar{h}/2} b \int_{-\bar{h}/2}^{+\bar{h}/2} y^2 dy + 2 \left( \sigma_s b \int_{+\bar{h}/2}^{+h/2} y dy \right)$$

$$= \sigma_s \frac{b \bar{h}^2}{6} + 2 \left[ \frac{\sigma_s b}{8} (h^2 - \bar{h}^2) \right] = \sigma_s \frac{b h^2}{4} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\bar{h}}{h} \right)^2 \right]$$

### Comportamento elastico-plastico



Nel tratto elastico vale la relazione trovata in precedenza:  $\sigma(y) = E \frac{y}{R}$

Nel punto di passaggio tra comportamento elastico e plastico potremo scrivere:

$$\sigma_s = E \frac{\bar{h}/2}{R}$$

Quindi, all'aumentare della curvatura (=diminuzione del raggio di curvatura R) la fascia centrale della trave a comportamento elastico tende a scomparire:

$$\bar{h}/2 = R \frac{\sigma_s}{E}$$

### Completa plasticizzazione

Nella condizione limite in cui  $R \rightarrow 0$ , tutta la sezione è plasticizzata (metà a trazione e metà a compressione)

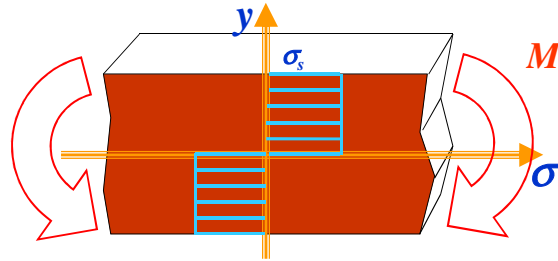
ed il momento resistente massimo che potrà essere offerto dalla trave varrà:

$$M_{pl} = \lim_{h \rightarrow 0} M$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_s \frac{b h^2}{4} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{h}{h} \right)^2 \right] = \sigma_s \frac{b h^2}{4} \quad \Rightarrow \quad M_{pl} = \frac{3}{2} M_e$$

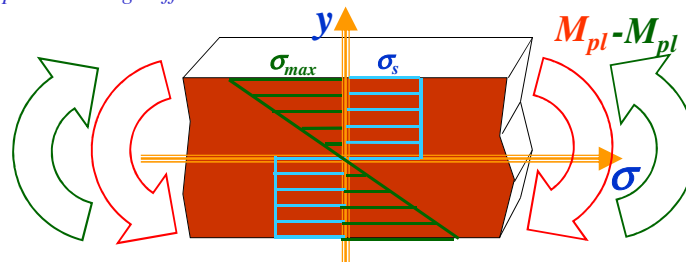
Sebbene questa sia una condizione limite, è sufficiente che venga plasticizzata il 90% della sezione perché si abbia un momento resistente massimo molto vicino a quello di completa plasticizzazione:

$$M_{90\%} = \frac{b h^2}{4} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{0.1h}{h} \right)^2 \right] = 0.997 M_{pl}$$



### Tensioni residue: ritorno elastico

Lo studio di quel che succede togliendo il momento flettente applicato  $M_{pl}$  (dopo aver raggiunto la condizione di completa plasticizzazione) può essere affrontato immaginando di applicare un momento uguale e contrario, e ragionando per sovrapposizione degli effetti.



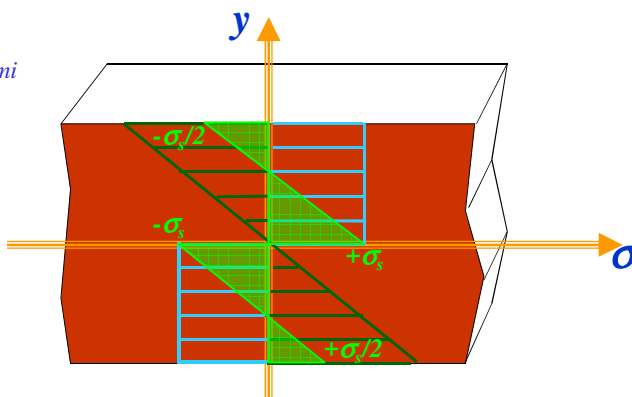
Si noti che le tensioni indotte dal momento contrario ( $-M_{pl}$ ) variano linearmente nella sezione perché sono di tipo elastico. Infatti, si avrebbe nuova plasticizzazione solo se queste tensioni, sommate alle precedenti, avessero valori al di fuori dell'intervallo  $-\sigma_s, +\sigma_s$ .

Poiché vale il legame elastico tra  $\sigma_{max}$  ed  $M$ , avremo:

$$M = \sigma_{max} \frac{b h^2}{6} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = -M_{pl} \frac{6}{b h^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{max} = -\frac{3}{2} \sigma_s$$

### Tensioni residue: ritorno elastico

Sommando i due diagrammi delle tensioni relativi alle fasi di carico e scarico si ottiene il diagramma delle tensioni residue:



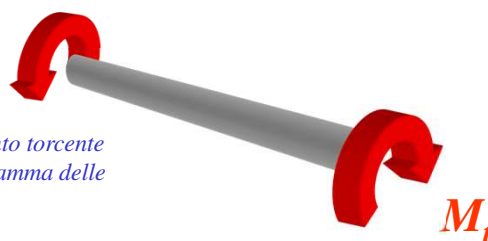
Il sistema di tensioni residue ottenute può essere utilmente sfruttato per modificare le capacità di carico della trave: infatti, per portare nuovamente la sezione considerata ad incipiente plasticizzazione è ora necessario applicare un momento pari a  $+1.5 M_e$ .

Al contrario, se si applica un momento flettente di segno opposto è sufficiente che esso valga  $-0.5 M_e$  perché le fibre superiori ed inferiori raggiungano rispettivamente la tensione di snervamento negativa e positiva.

### Esercizio 1

Si ripeta lo studio effettuato per una barra cilindrica piena sollecitata a torsione oltre il limite elastico.

In particolare si calcoli il valore del momento torcente di totale plasticizzazione e si tracci il diagramma delle tensioni tangenziali residue.



### Esercizio 2

Se per l'analisi fatta si considerasse una trave di larghezza  $b$  molto maggiore dello spessore  $h$ , cioè se si introducesse il vincolo di "contrazione laterale impedita", cosa cambierebbe nella trattazione effettuata?

