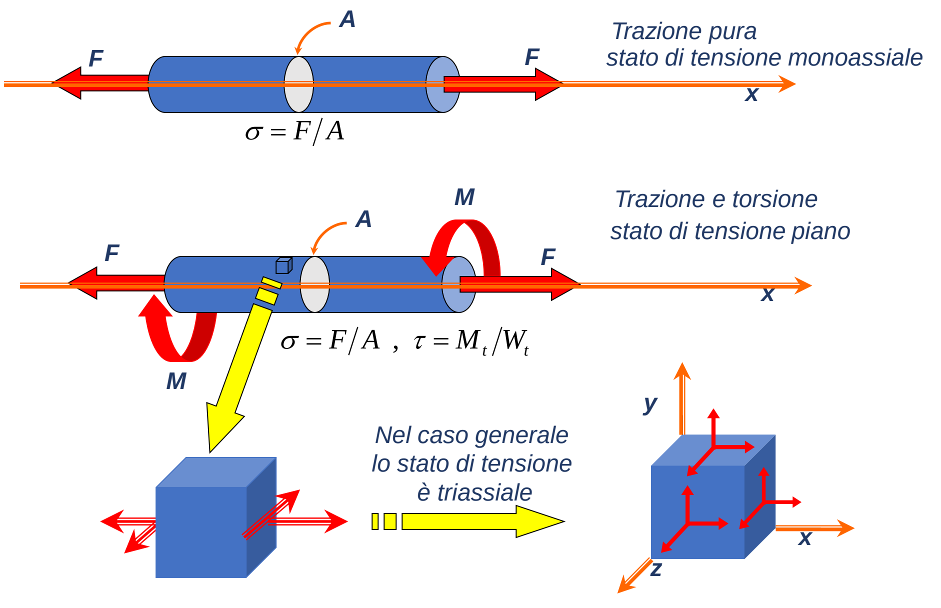
Stato di tensione

- Stato di tensione triassiale
- Stato di tensione piano
- Cerchio di Mohr

1

Stato di tensione



2

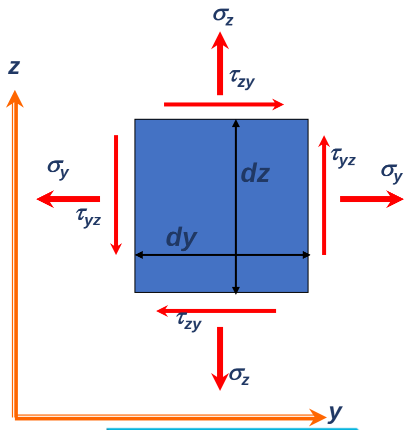
Stato di tensione in un punto

Dall'equilibrio alla rotazione si ha:

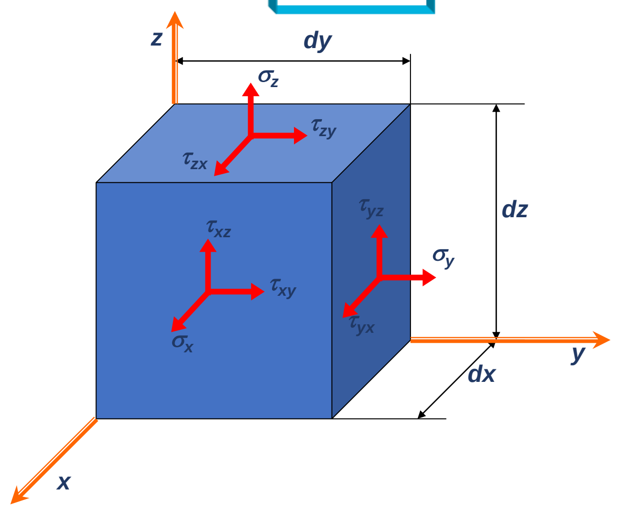
$$\tau_{yz}\left(dz\,dx\right)dy-\tau_{zy}\left(dy\,dx\right)dz=0 \qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$
$$\tau_{xz}=\tau_{zx}$$
$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$

6 componenti indipendenti

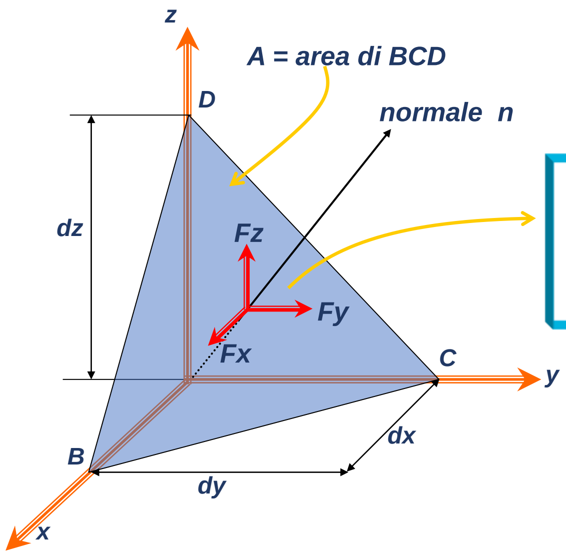


9 componenti



3

Stato di tensione in un punto

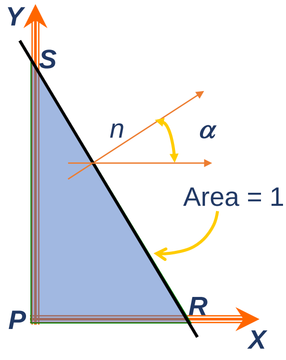


σ_n = componente normale della tensione sulla faccia obliqua

τ = componente tangenziale della tensione sulla faccia obliqua

4

Stato di tensione piano



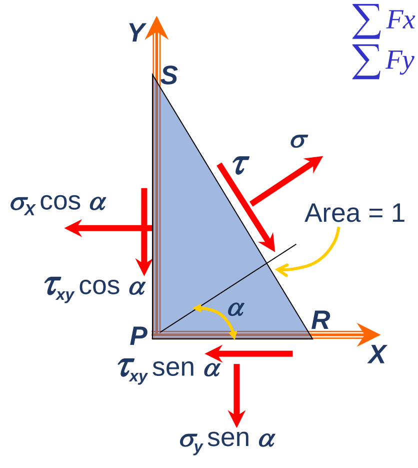
Si consideri il piano RS parallelo all’asse *z* e con la normale *n* inclinata di α rispetto all’asse *x*

Ipotesi: stato piano di tensione

Si immagini ora di spostare il punto di vista sull’asse *z*

5

Stato di tensione piano



Si consideri lo stato tensionale sul piano RS

Dall’equilibrio alla traslazione si ha:

$$\sum Fx \rightarrow \quad -\sigma_x \cos\alpha - \tau_{xy}\sin\alpha + \sigma\cos\alpha + \tau\sin\alpha = 0$$

$$\sum Fy \rightarrow \quad -\sigma_y \sin\alpha - \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma\sin\alpha - \tau\cos\alpha = 0$$

moltiplicando la prima per $-\cos\alpha$ e la seconda per $-\sin\alpha$ si ha:

$$\sigma_x \cos^2\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma\cos^2\alpha - \tau\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha - \sigma\sin^2\alpha + \tau\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

sommando le due equazioni si ottiene:

$$\sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha = \sigma$$

6

Stato di tensione piano

$$\sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha = \sigma$$

ricordando che: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

l'equazione precedente può essere riscritta nella forma seguente:

$$\frac{1}{2}\left[\sigma_x(1+\cos 2\alpha)+\sigma_y(1-\cos 2\alpha)\right]+\tau_{xy}\sin 2\alpha = \sigma$$

che equivale a:

$$\boxed{\sigma = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha}$$

7

Stato di tensione piano

tornando ora alle due equazioni di equilibrio:

$$\sum Fx \longrightarrow \quad -\sigma_x\cos\alpha - \tau_{xy}\sin\alpha + \sigma\cos\alpha + \tau\sin\alpha = 0$$

$$\sum Fy \longrightarrow \quad -\sigma_y\sin\alpha - \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma\sin\alpha - \tau\cos\alpha = 0$$

moltiplicando questa volta la prima per - *sin* α e la seconda per - *cos* α si ha:

$$\sigma_x\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\sin^2\alpha - \sigma\sin\alpha\cos\alpha - \tau\sin^2\alpha = 0$$

$$\sigma_y\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\cos^2\alpha - \sigma\sin\alpha\cos\alpha + \tau\cos^2\alpha = 0$$

sottraendo le due equazioni si ottiene:

$$(\sigma_x-\sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-\tau = 0$$

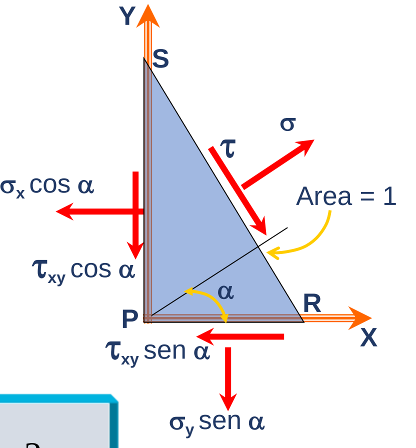
che equivale a:

$$\boxed{\tau = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha}$$

8

Stato di tensione piano

Le componenti della tensione σ e τ sul piano RS e possono dunque essere espresse in funzione delle componenti σ_x, σ_y, τ_{xy} e dell'angolo α mediante le seguenti relazioni:



$$\sigma(\alpha) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau(\alpha) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

9

Stato di tensione piano

L'angolo α che individua i piani principali può essere ricavato cercando il massimo della funzione $\sigma(\alpha)$:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

ovvero, uguagliando a 0 la derivata $d\sigma/d\alpha$

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = -2\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha \quad \Rightarrow 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha = 2\tau_{xy} \cos 2\alpha$$

e quindi

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

10

Il cerchio di Mohr

Interpretando le espressioni di σ e τ come le equazioni di una curva parametrica rispetto al parametro α, si possono legare σ e τ quadrando e sommando le due relazioni in modo da eliminare α.

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha\right)^2$$

$$\tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha\right)^2$$

Posto:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \delta$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \rho$$

$$(\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$

11

Il cerchio di Mohr

Similmente, nel sistema di riferimento orientato secondo le direzioni principali le equazioni di equilibrio si possono scrivere come segue:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\beta$$

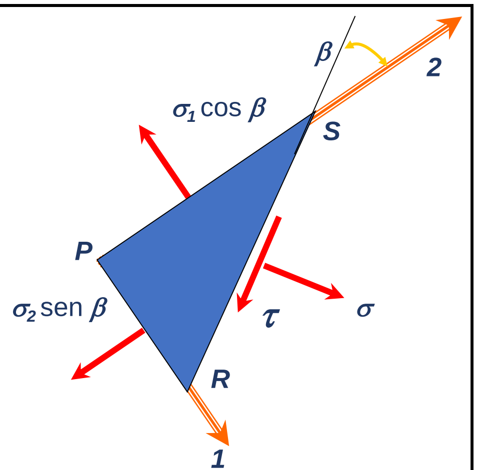
$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\beta$$

Posto:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \delta$$

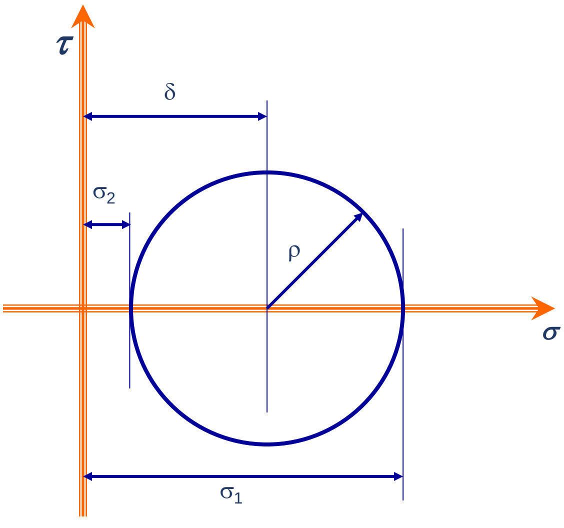
$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \rho$$

$$(\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$



12

Il cerchio di Mohr



$$(\sigma-\delta)^2+\tau^2=\rho^2$$

questa è l'equazione di un cerchio nel piano σ-τ con:

$$\delta=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2},\quad \rho=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

poichè δ e ρ possono anche essere espresse in funzione di σ_x, σ_y e τ_{xy}:

$$\delta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},\quad \rho=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

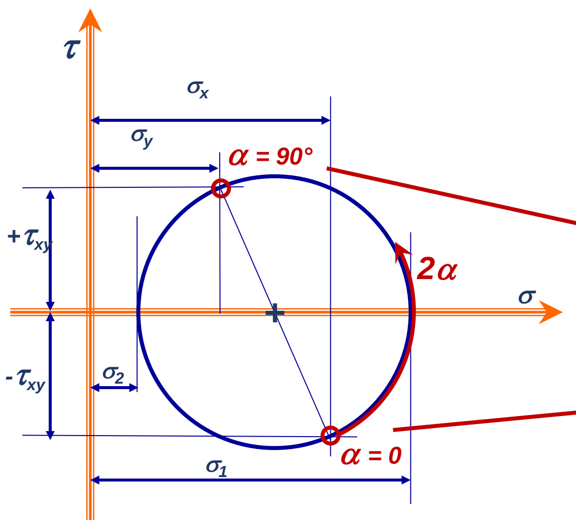
otteniamo le espressioni di σ_1 e σ_2 in funzione di σ_x, σ_y e τ_{xy} :

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

13

Il cerchio di Mohr

$$\begin{cases}\sigma(\alpha)=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha+\tau_{xy}\sin 2\alpha\\ \tau(\alpha)=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha-\tau_{xy}\cos 2\alpha\end{cases}$$



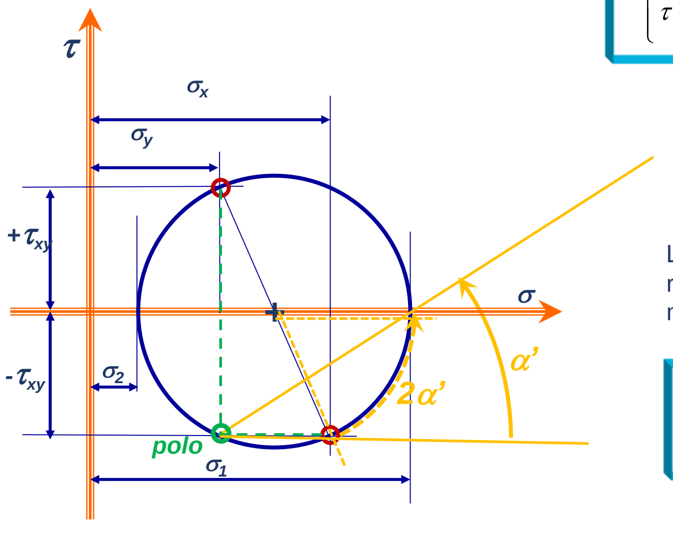
$$\begin{cases}\sigma(\alpha)\big|_{\alpha=\pi/2}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos\pi+\tau_{xy}\sin\pi & =\sigma_y\\ \tau(\alpha)\big|_{\alpha=\pi/2}=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin\pi-\tau_{xy}\cos\pi & =\tau_{xy}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma(\alpha)\big|_{\alpha=0}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 0+\tau_{xy}\sin 0 & =\sigma_x\\ \tau(\alpha)\big|_{\alpha=0}=\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 0-\tau_{xy}\cos 0 & =-\tau_{xy}\end{cases}$$

14

Il cerchio di Mohr

$$\begin{cases} \sigma(\alpha) = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau(\alpha) = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{cases}$$

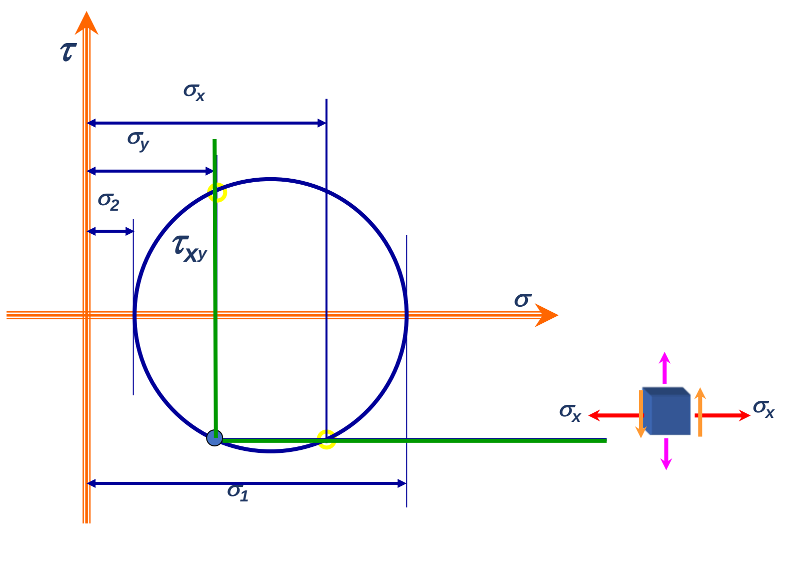


L'angolo ***α'*** che individua prima *direzione principale* rispetto alla direzione ***x*** è individuabile come mostrato a lato ed è valutabile dalla relazione:

$$\tan 2\alpha' = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

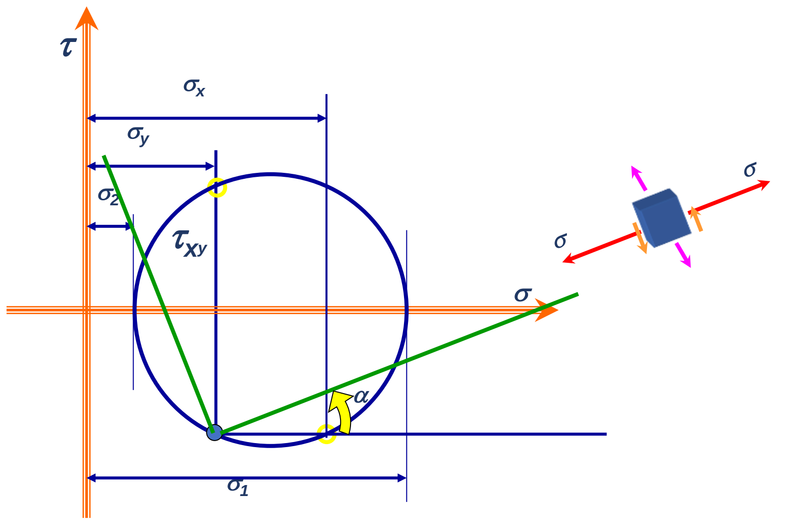
15

Il cerchio di Mohr



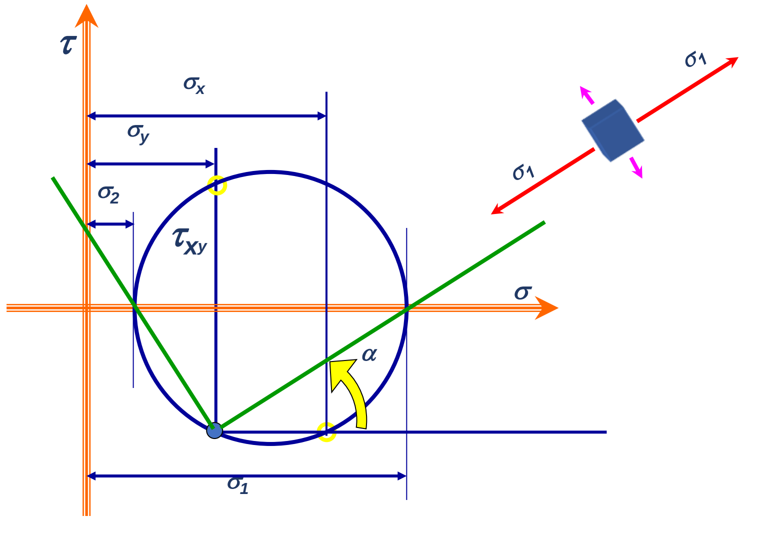
16

Il cerchio di Mohr



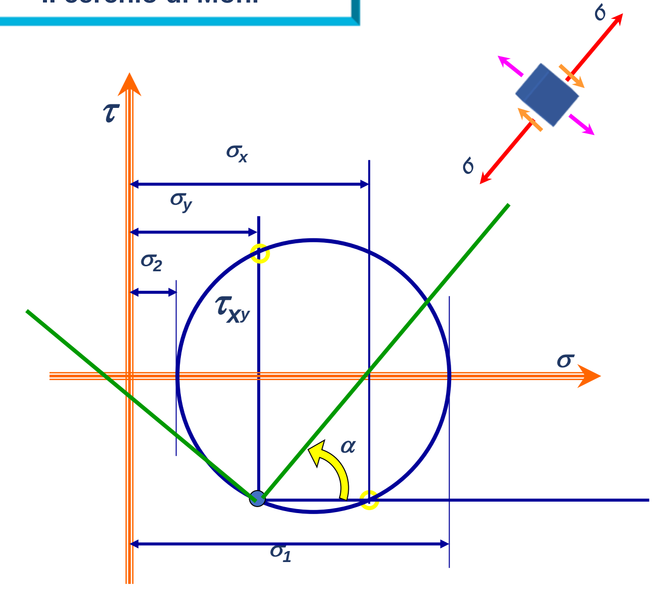
17

Il cerchio di Mohr



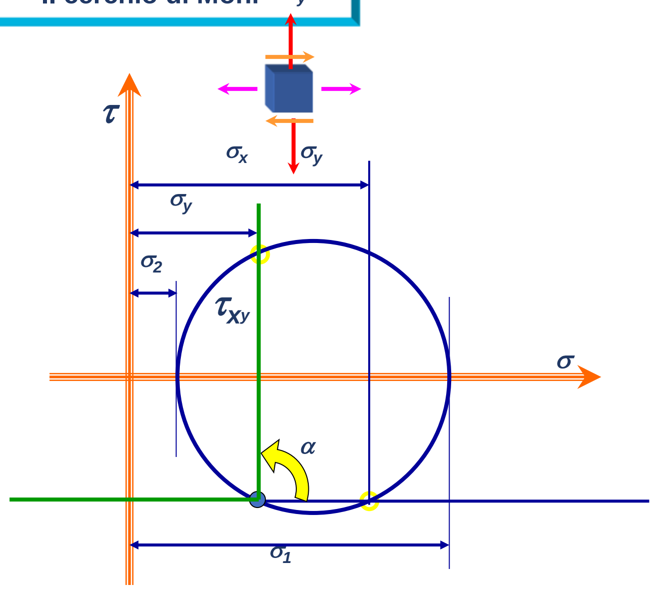
18

Il cerchio di Mohr



19

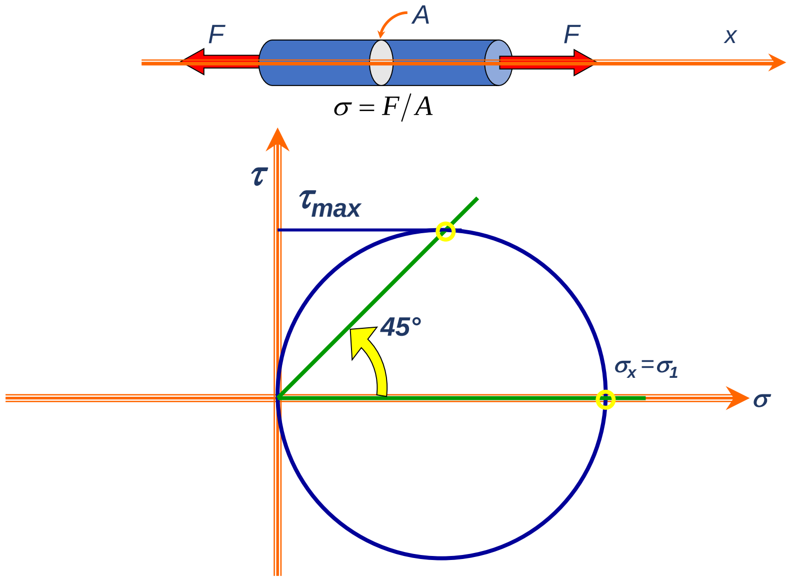
Il cerchio di Mohr



20

Il cerchio di Mohr

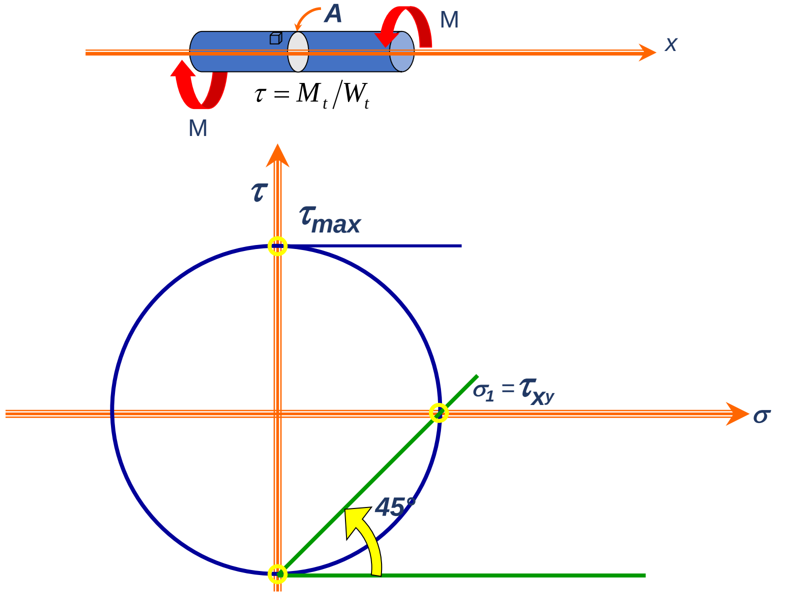
Caso della trazione pura



21

Il cerchio di Mohr

Caso della torsione pura

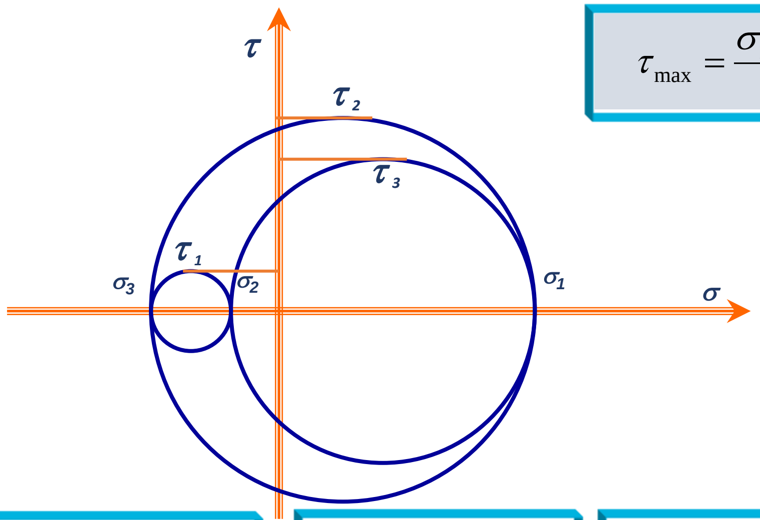


22

Il cerchio di Mohr

Stato di tensione triassiale

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



$$\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_2 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

23