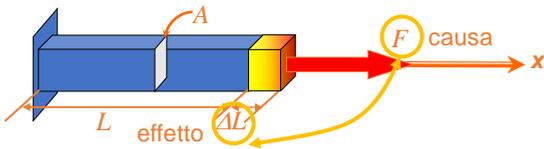


Relazione tensione-deformazione

1

Relazione tensione-deformazione

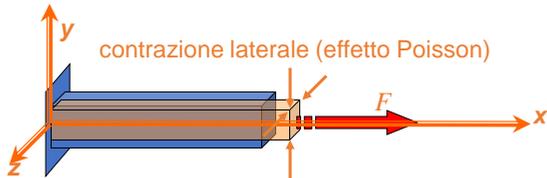
Relazioni costitutive in campo elastico



$$F = K \Delta L \quad \text{dove} \quad K = \frac{E A}{L}$$

$$\text{quindi} \quad F = \frac{E A}{L} \Delta L$$

$$\text{da cui} \quad \frac{\sigma_x F}{A} = E \left(\frac{\Delta L}{L} \right) \varepsilon_x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$



$$\text{ugualmente, nelle altre direzioni} \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

nel caso generale di stato di tensione triassiale la deformazione ε_x è data dalla somma di tre contributi dovuti a σ_x , σ_y e σ_z :

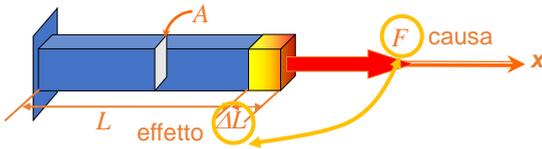
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

3-8

2

Relazione tensione-deformazione

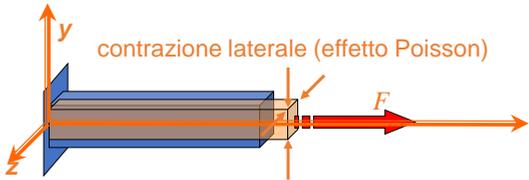
Relazioni costitutive in campo elastico



$$F = K \Delta L \quad \text{dove} \quad K = \frac{E A}{L}$$

$$\text{quindi} \quad F = \frac{E A}{L} \Delta L$$

$$\text{da cui} \quad \frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$



$$\text{ugualmente, nelle altre direzioni} \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

In modo analogo si possono ottenere le ε_y ed ε_z :

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

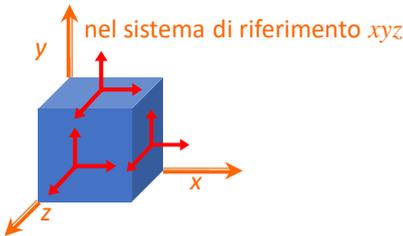
3-8

3

Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico

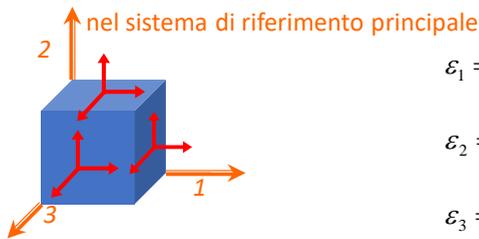
Legame costitutivo in campo elastico per uno stato di tensione triassiale:
relazioni di Hooke generalizzate



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

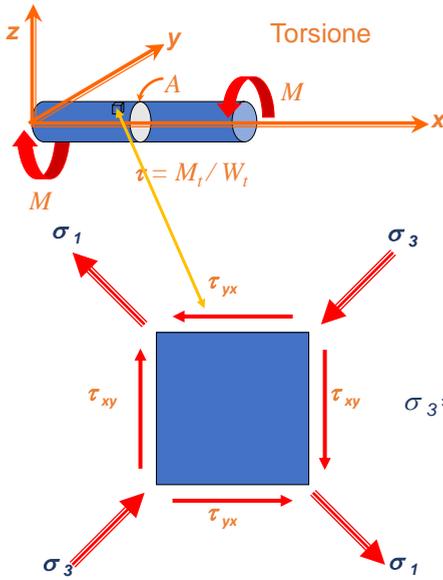
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

4

Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico



Nel caso di torsione pura, con la disposizione degli assi scelta, si ha:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{xy} \neq 0$$

Ne segue che: (si pensi anche al cerchio di Mohr nel caso di torsione pura)

$$\sigma_1 = \tau_{xy}$$

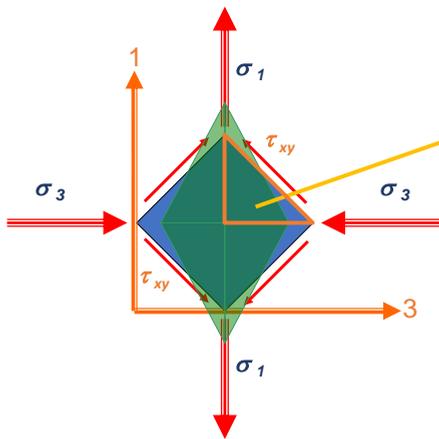
$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\tau_{xy}$$

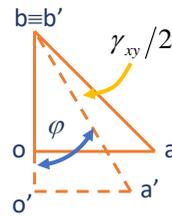
5

Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico



$$\varphi = \pi/4 - \gamma_{xy}/2$$



$$\tan \varphi = \tan(\pi/4 - \gamma_{xy}/2) = \frac{\overline{o'a'}}{\overline{o'b'}}$$

$$\frac{\overline{o'a'}}{\overline{o'b'}} = \frac{\overline{oa}(1 + \varepsilon_3)}{\overline{oa}(1 + \varepsilon_1)} \quad \frac{\overline{oa}}{\overline{ob}} = 1$$

$$\tan(\pi/4 - \gamma_{xy}/2) = \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_1}$$

$$\tan(\pi/4 - \gamma_{xy}/2) = \frac{\tan \pi/4 - \tan \gamma_{xy}/2}{1 + \tan \pi/4 \tan \gamma_{xy}/2}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \Rightarrow$$

6

Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico

$$\tan(\pi/4 - \gamma_{xy}/2) = \frac{\overset{=1}{\tan \pi/4} + \overset{\cong \gamma_{xy}/2}{\tan \gamma_{xy}/2}}{1 + \tan \pi/4 \tan \gamma_{xy}/2} \Rightarrow \frac{1 - \gamma_{xy}/2}{1 + \gamma_{xy}/2} = \frac{1 + \varepsilon_3}{1 + \varepsilon_1}$$

$$\sigma_3 = -\sigma_1 \Rightarrow \varepsilon_3 = -\varepsilon_1 \Rightarrow \frac{1 - \gamma_{xy}/2}{1 + \gamma_{xy}/2} = \frac{1 - \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}$$

essendo: $\sigma_1 = \tau_{xy}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau_{xy}$ $\leftarrow \gamma_{xy}/2 = \varepsilon_1$

dalla relazione: $\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

si ottiene: $\gamma_{xy}/2 = \frac{1}{E} [\tau_{xy} - \nu(0 - \tau_{xy})]$

da cui: $\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ avendo indicato con G il **modulo di elasticità tangenziale**:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

7

Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico

Sollecitazione di taglio:

$$\begin{array}{llll} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} & \gamma_1 = \frac{\tau_1}{G} & \gamma_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2G} & \gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} & \gamma_2 = \frac{\tau_2}{G} & \gamma_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2G} & \gamma_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} & \gamma_3 = \frac{\tau_3}{G} & \gamma_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2G} & \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{array}$$

8

Relazione tensione-deformazione

Relazioni costitutive in campo elastico

valida in campo elastico (per i materiali isotropi)

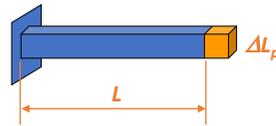
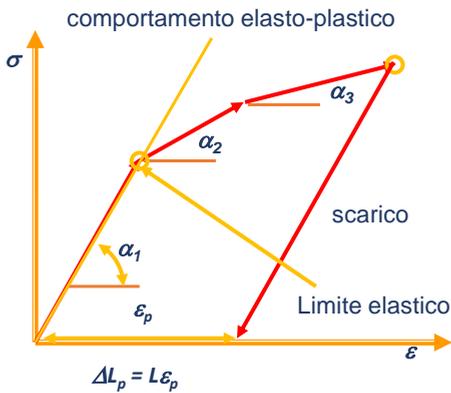
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$$

Le sottomatrici nulle indicano che non c'è accoppiamento tra componenti normali della tensione e distorsione

9

Relazione tensione-deformazione

Come si comporta il materiale oltre il limite elastico?

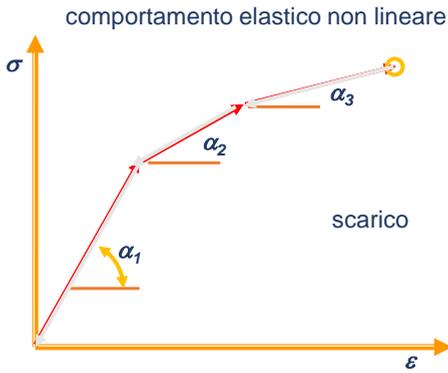


Rimuovendo la forza applicata rimane un allungamento residuo permanente

10

Relazione tensione-deformazione

Come si comporta il materiale oltre il limite elastico?

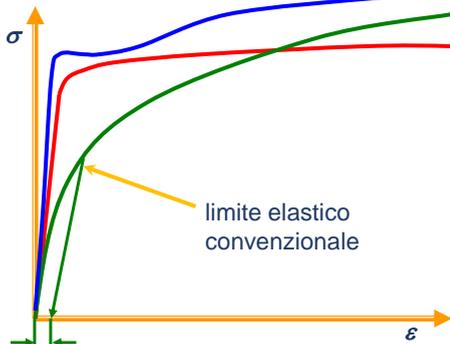


Al termine del ciclo di carico non rimane alcuna deformazione permanente

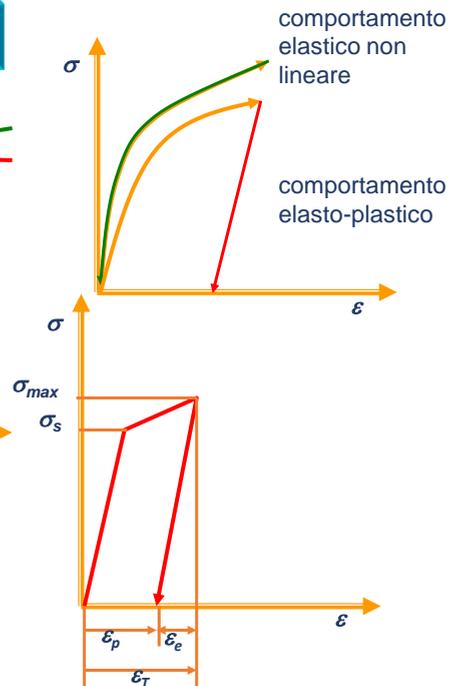
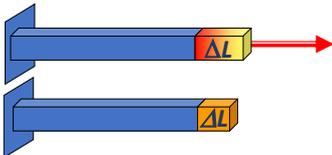
11

Relazione tensione-deformazione

La curva σ - ϵ del materiale



$\epsilon_r = 0.002 = 0.2\%$

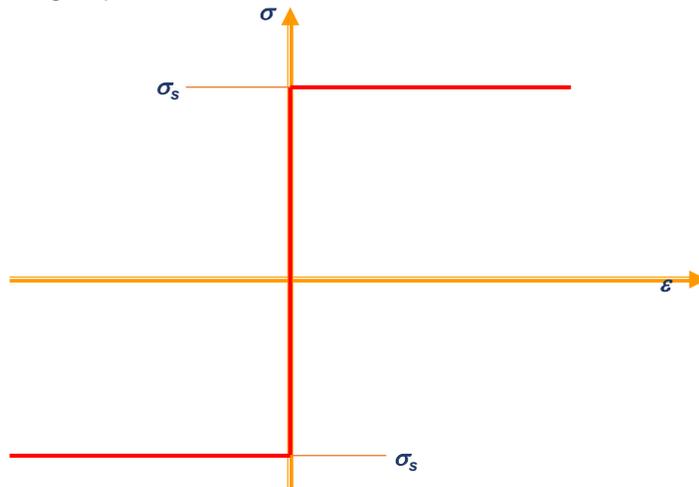


12

Relazione tensione-deformazione

La curva $\sigma - \varepsilon$

Modello bilineare: rigido-plastico

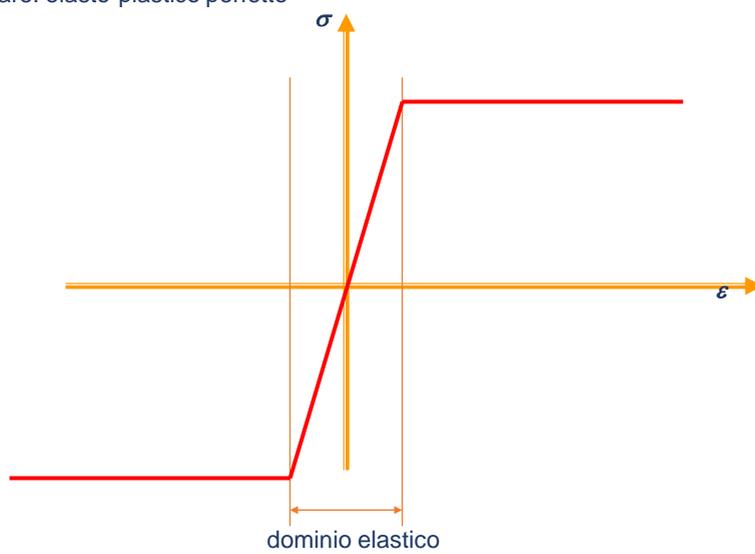


13

Relazione tensione-deformazione

La curva $\sigma - \varepsilon$

Modello bilineare: elasto-plastico perfetto

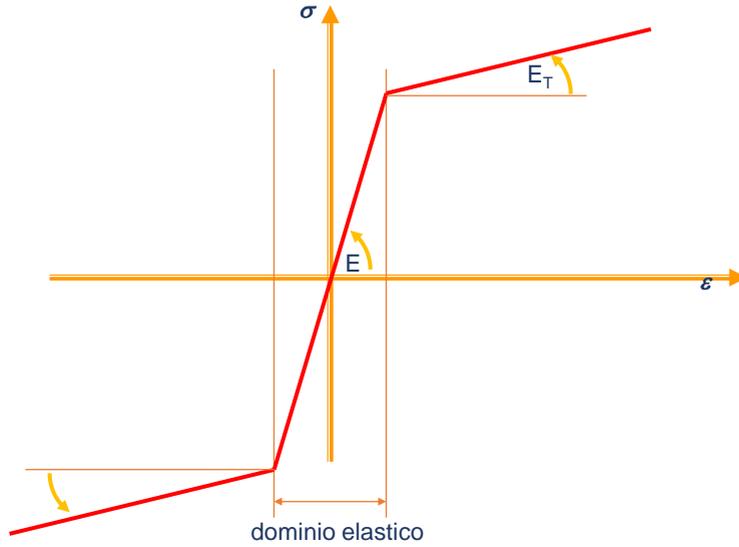


14

Relazione tensione-deformazione

La curva $\sigma - \varepsilon$

Modello bilineare: elasto-plastico con incrudimento

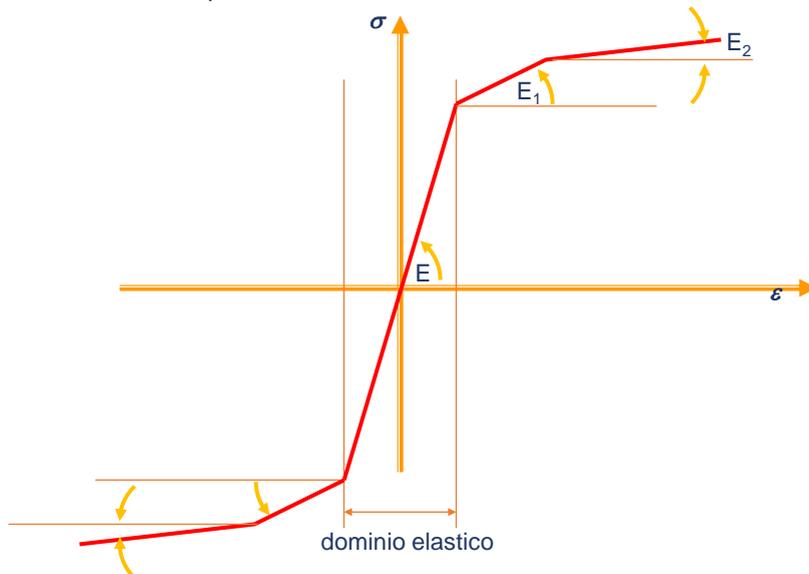


15

Relazione tensione-deformazione

La curva $\sigma - \varepsilon$

Modello multilineare: elasto-plastico con incrudimento



16