Criteri di resistenza

1

5-0
5-1

I criteri di resistenza (o teorie della rottura) definiscono un legame tra lo **stato tensionale** e la sua **pericolosità**.

Ogni stato tensionale può essere rappresentato da una **funzione scalare** delle tensioni principali che può essere confrontata con un **valore critico del materiale**.

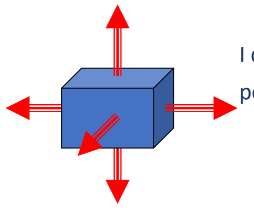
Al valore di tale funzione scalare viene dato il nome di **tensione equivalente** (o ideale).

Al valore critico del materiale viene dato il nome di **tensione limite**.

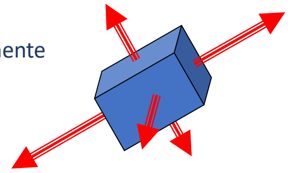
Il rapporto tra la tensione limite del materiale e la tensione equivalente è il **coefficiente di sicurezza** della struttura.

2

Concetto di tensione equivalente

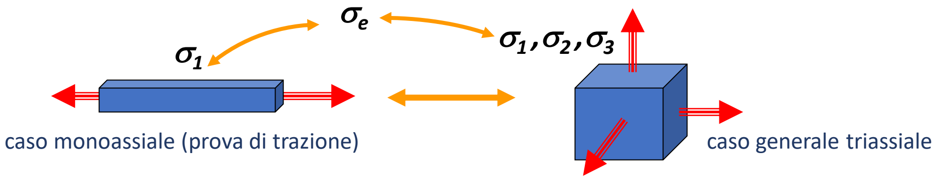


I due stati di tensione sono ugualmente pericolosi se $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F'}$



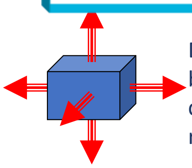
$$F = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \longleftrightarrow \quad F' = f(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$$

Particolarmente significativo è il confronto con lo stato di tensione che si verifica nella prova del materiale

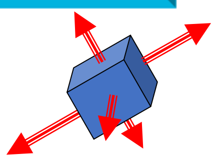


3

Deduzione della tensione equivalente dai criteri di resistenza



Due stati di tensione possono essere confrontanti sulla base del valore della funzione scalare $\boldsymbol{f}$ che stabilisce il criterio di confronto e che prende il nome di criterio di resistenza

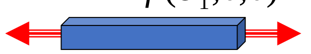


$$F = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \longleftrightarrow \quad F' = f(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$$

In particolare se $\boldsymbol{f}$ è applicato allo stato di tensione assiale che si ha nella prova di trazione, si può scrivere che:

$$F'' = f(\sigma_1'', 0, 0) = f_{ass}(\sigma_1'')$$

$$F'' = f(\sigma_1'', 0, 0)$$



Per cui si ha lo stesso grado di pericolosità tra i primo e il terzo caso quando:

$$F'' = F \quad \Rightarrow \quad f_{ass}(\sigma_1'') = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

da cui segue che il valore della tensione monoassiale (σ_e) che genera uno stato di tensione equivalente a quello definito da σ_1, σ_2 e σ_3 può essere ricavata come:

$$\sigma_e = \sigma_1'' = f_{ass}^{-1}\left[f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right]$$

4

I criteri di resistenza possono essere divisi in tre gruppi, sulla base del loro principio ispiratore:

Criteri direttamente basati sullo stato di tensione

- ➔ **Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier)**
- ➔ **Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)**
- ➔ **Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)**
- ➔ *Massima tensione tangenziale ottaedrica (Rôs Eichinger)*

Criteri basati sullo stato di deformazione

- ➔ *Massima deformazione normale (Poncelet-de St. Venant-Grashof)*

Criteri basati sulla energia di deformazione

- ➔ *Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig)*
- ➔ **Massima energia di distorsione (Huber-von Mises-Hencky)**

5

I criteri di resistenza possono essere divisi in due gruppi, sulla base del loro campo di applicazione:

Criteri utilizzati per i materiali duttili

- ➔ **Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)**
- ➔ **Massima energia di distorsione (Huber-von Mises-Hencky)**
- ➔ **Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)**
- ➔ *Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig)*
- ➔ *Massima tensione tangenziale ottaedrica (Rôs Eichinger)*

Criteri utilizzati per i materiali fragili

- ➔ **Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier)**
- ➔ **Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)**
- ➔ *Massima deformazione normale (Poncelet-de St. Venant-Grashof)*

5-3

6

Criteri di resistenza

Massima tensione normale (Rankine)

superficie critica definita dal criterio di Rankine nello spazio delle tensioni principali

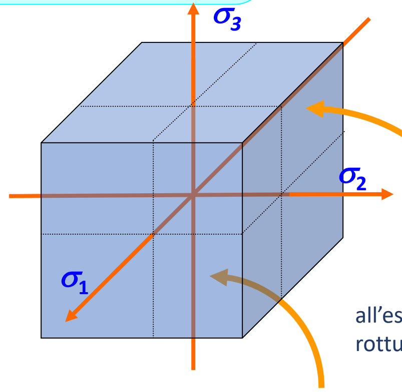
Il materiale subisce danno quando la massima tensione principale raggiunge un valore critico.

σ_{Lt} = tensione limite a trazione

σ_{Lc} = tensione limite a compressione

Si ha rottura se:

$$\sigma_e = \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_{Lt} \\ \sigma_3 < \sigma_{Lc} \end{cases}$$



la superficie è la zona critica

all'esterno del volume c'è rottura

all'interno del volume il materiale resiste

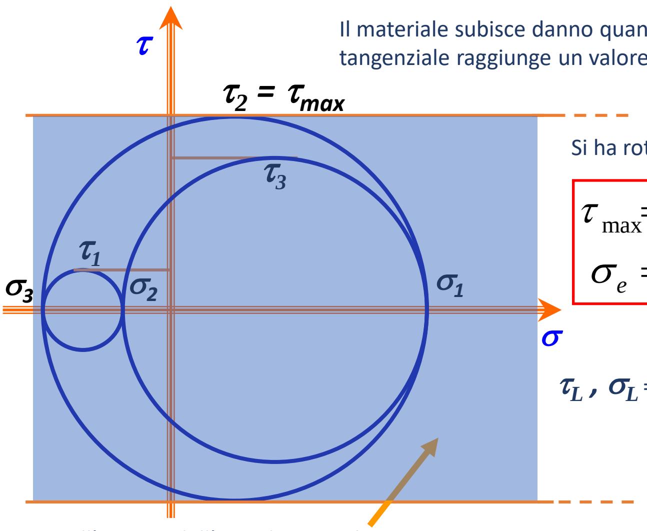
5-8

7

Criteri di resistenza

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)

Il materiale subisce danno quando la massima tensione tangenziale raggiunge un valore critico.



Si ha rottura se:

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 > \tau_L$$
$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_L$$

τ_L, σ_L = Valori critici del materiale

all'interno dell'area il materiale resiste

all'esterno dell'area c'è rottura

5-4

8

Criteri di resistenza

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)

Nel caso generale di stato di tensione triassiale
il valore della tensione tangenziale massima vale:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Quando la sollecitazione è monoassiale e solo σ_1 è
diversa da zero si avrà:

$$\tau_{a\max}(\sigma_1) = \tau_{\max}(\sigma_1, 0, 0) = \frac{\sigma_1}{2}$$

Si può, quindi, ricavare l'espressione della tensione equivalente
dalla relazione:

$$\sigma_e = \sigma_1 = \tau_{a\max}^{-1}\left[\tau_{\max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right]$$

9

Criteri di resistenza

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)

Ne segue che:

$$\sigma_e = \tau_{a\max}^{-1}\left[\tau_{\max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right] = 2\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) =$$

$$= \sigma_1 - \sigma_3$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\boxed{\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_L}$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = 2\tau_{xy}$$

torsione + trazione:

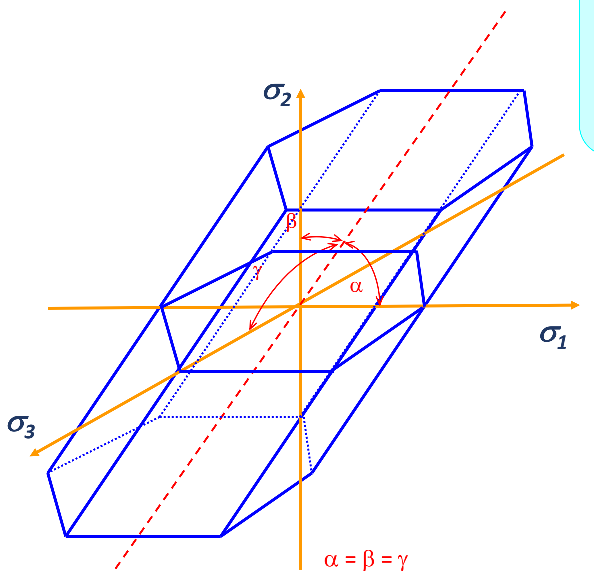
$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

10

Criteri di resistenza

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)

superficie critica definita dal criterio di Tresca nello spazio delle tensioni principali

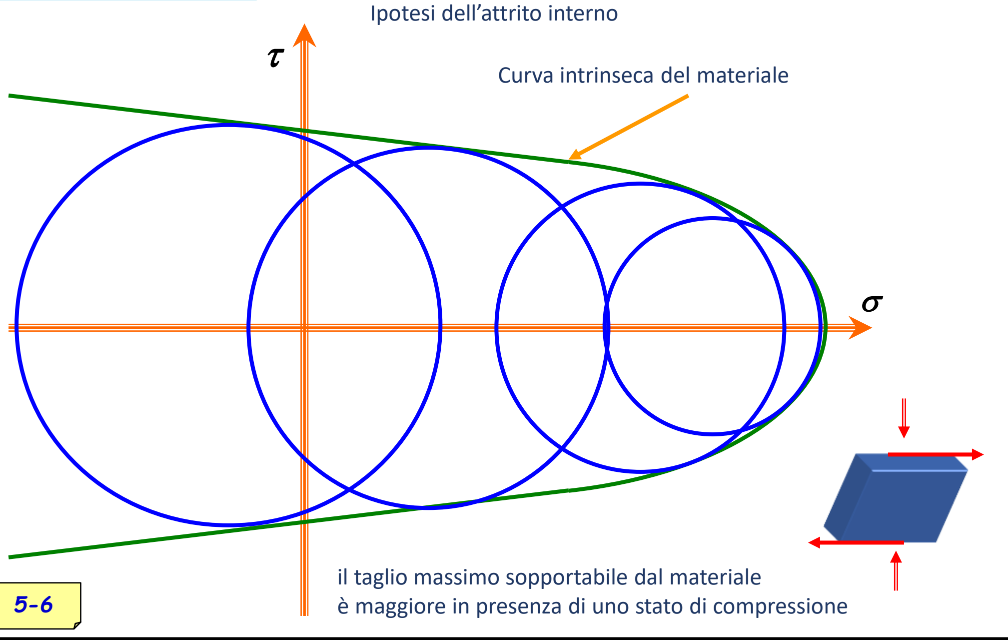


11

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Ipotesi dell'attrito interno

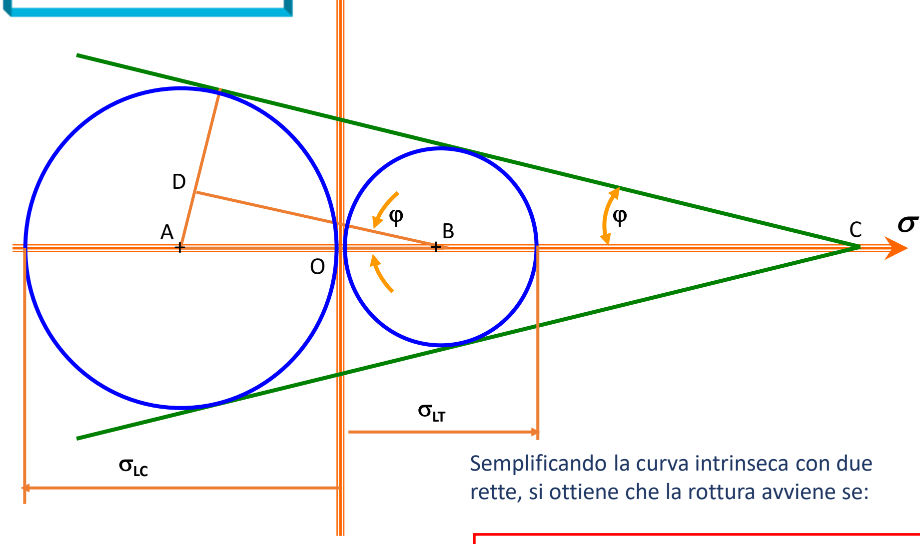


il taglio massimo sopportabile dal materiale
è maggiore in presenza di uno stato di compressione

12

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)



Semplificando la curva intrinseca con due rette, si ottiene che la rottura avviene se:

$$\boxed{\sigma_e = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k} > \sigma_{Lt} \qquad k = \frac{\sigma_{Lc}}{\sigma_{Lt}}}$$

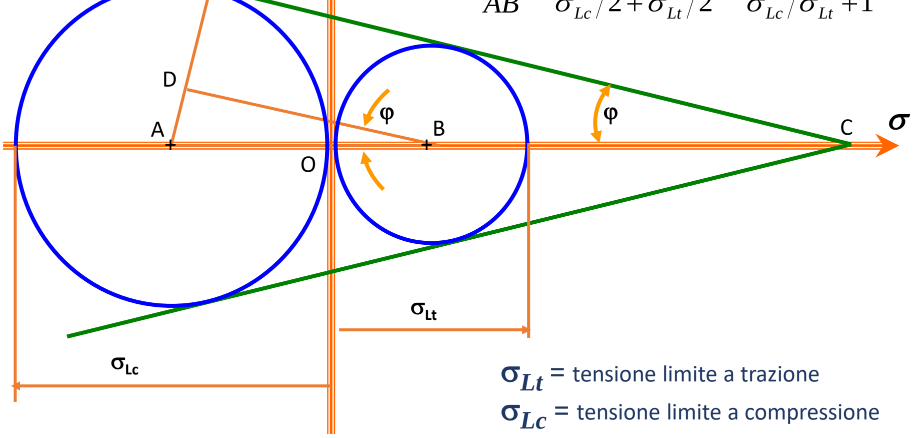
13

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

La curva intrinseca può essere approssimata da due rette tangenti ai cerchi di Mohr relativi alle condizioni limite a trazione e compressione

$$\sin\varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sigma_{Lc}/2 - \sigma_{Lt}/2}{\sigma_{Lc}/2 + \sigma_{Lt}/2} = \frac{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} - 1}{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} + 1}$$

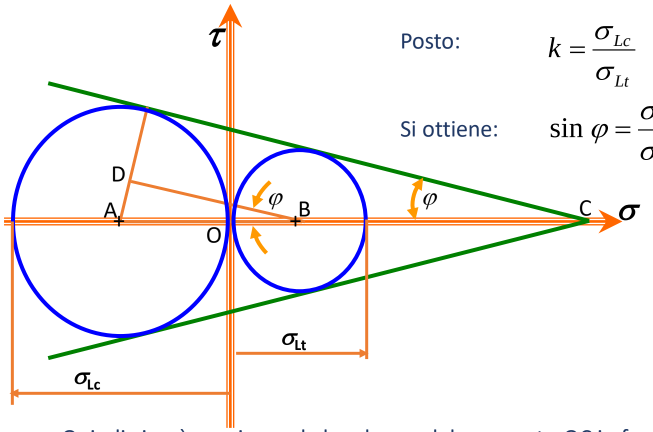


σ_{Lt} = tensione limite a trazione
σ_{Lc} = tensione limite a compressione

14

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)



Posto: $k = \dfrac{\sigma_{Lc}}{\sigma_{Lt}}$

Si ottiene: $\sin\varphi = \dfrac{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} - 1}{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} + 1} = \dfrac{k-1}{k+1}$

Quindi si può esprimere la lunghezza del segmento OC in funzione di k e σ_{Lt}:

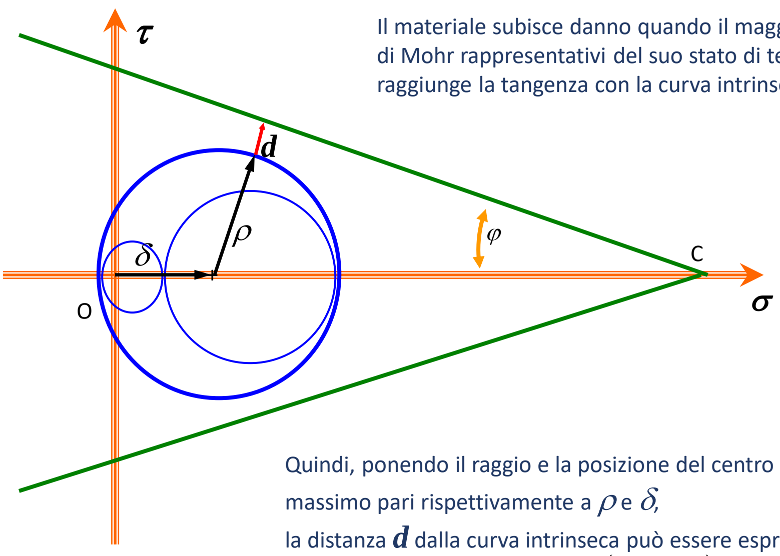
$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \frac{\sigma_{Lt}}{2} + \frac{\frac{\sigma_{Lt}}{2}}{\sin\varphi} = \frac{\sigma_{Lt}}{2}\left(1 + 1\Big/\frac{k-1}{k+1}\right) = \sigma_{Lt}\,\frac{k}{k-1}$$

15

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Il materiale subisce danno quando il maggiore dei cerchi di Mohr rappresentativi del suo stato di tensione raggiunge la tangenza con la curva intrinseca.



Quindi, ponendo il raggio e la posizione del centro del cerchio massimo pari rispettivamente a ρ e δ,
la distanza $\boldsymbol{d}$ dalla curva intrinseca può essere espressa come:

$$d = \left(\overline{OC} - \delta\right)\sin\varphi - \rho$$

16

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Ricordando le espressioni di OC, sinφ, ρ e δ,

$$\overline{OC} = \sigma_{Lt} \frac{k}{k-1}, \qquad \sin\varphi = \frac{k-1}{k+1}, \qquad \rho = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \delta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

l'espressione di d per uno stato di tensione triassiale diventa:

$$d = \left(\overline{OC} - \delta\right)\sin\varphi - \rho = \left(\sigma_{Lt}\frac{k}{k-1} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\frac{k-1}{k+1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[k\left(\sigma_{Lt} - \sigma_1\right) + \sigma_3\right]$$

Per una stato di tensione monoassiale, l'espressione precedente diventa:

$$d_a(\sigma_1) = d(\sigma_1, 0, 0) = \frac{k}{k+1}\left(\sigma_{Lt} - \sigma_1\right)$$

Si può, quindi, ricavare il valore della tensione equivalente dalla relazione:

$$\sigma_e = \sigma_1 = d_a^{-1}\left[d\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)\right]$$

17

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Ne segue che:

$$\sigma_e = \sigma_1 = d_a^{-1}\left[d\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)\right] = \sigma_{Lt} - \frac{k+1}{k}\left\{\frac{1}{k+1}\left[k\left(\sigma_{Lt} - \sigma_1\right) + \sigma_3\right]\right\} =$$

$$= \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k}$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\boxed{\sigma_e = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k} > \sigma_L}$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = \frac{k+1}{k}\tau_{xy}$$

torsione + trazione:

$$\sigma_e = \frac{k-1}{2k}\sigma_x + \frac{k+1}{2k}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

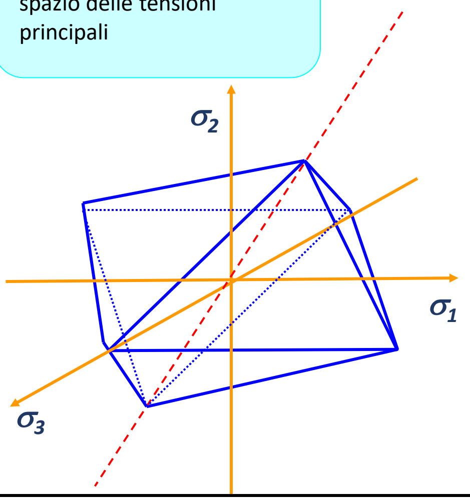
18

Criteri di resistenza

Massima deformazione normale (de St. Venant)

Il materiale subisce danno quando la massima deformazione principale raggiunge un valore critico.

superficie critica definita dal criterio di St. Venant nello spazio delle tensioni principali



Nel caso triassiale si ha:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] > \varepsilon_L$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right] < -\varepsilon_L$$

Nel caso monoassiale si ha:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} > \varepsilon_L$$

Dal confronto si ottiene che si ha rottura se:

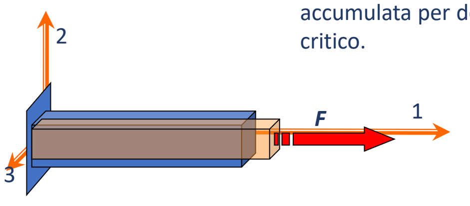
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \sigma_e = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \\ \sigma_e = \left|\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right| \end{array}\right\} > \sigma_L}$$

19

Criteri di resistenza

Massima energia di deformazione (Beltrami)

Il materiale subisce danno quando l'energia accumulata per deformazione raggiunge un valore critico.



Nel caso triassiale si ha:

$$U_{def\ tot} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right]$$

Nel caso monoassiale si ha: $U_{def\ 1} = \frac{1}{2E}\sigma_1^2$

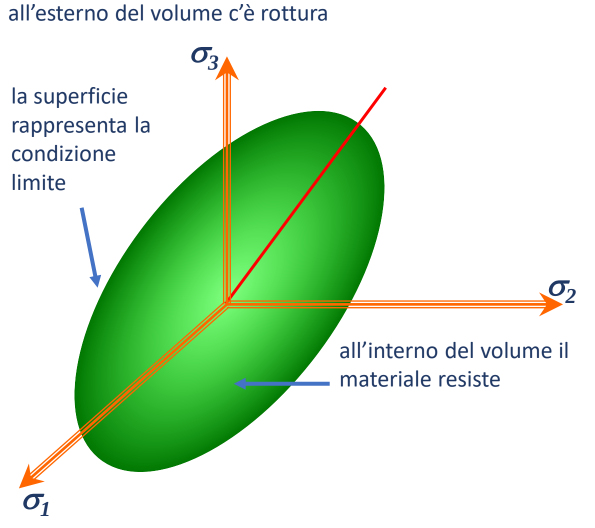
Dal confronto si ottiene che si ha rottura se:

$$\boxed{\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)} > \sigma_L}$$

20

Criteri di resistenza

Massima energia di deformazione (Beltrami)

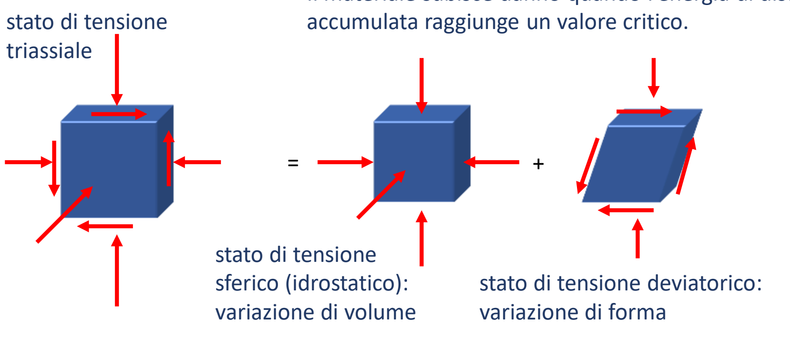


21

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

Il materiale subisce danno quando l'energia di distorsione accumulata raggiunge un valore critico.



L'energia di distorsione nel caso triassiale si può scrivere:

$$U_{dist} = \frac{(1+\nu)}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]$$

Nel caso monoassiale si ha: $U_{dist} = \frac{(1+\nu)}{3E}\sigma_1^2$

Si ha rottura se: $\boxed{\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2} > \sigma_L}$

5-5

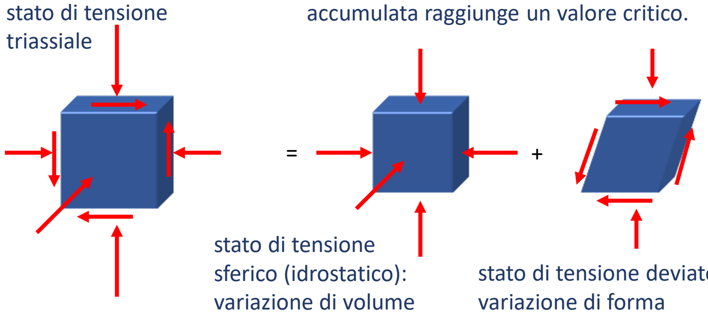
22

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

Il materiale subisce danno quando l'energia di distorsione accumulata raggiunge un valore critico.

stato di tensione triassiale



stato di tensione sferico (idrostatico): variazione di volume

stato di tensione deviatorico: variazione di forma

Stato di tensione triassiale:

$$\sigma_1 = S + \sigma_1^d$$
$$\sigma_2 = S + \sigma_2^d$$
$$\sigma_3 = S + \sigma_3^d$$

Componente idrostatica:

$$S = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

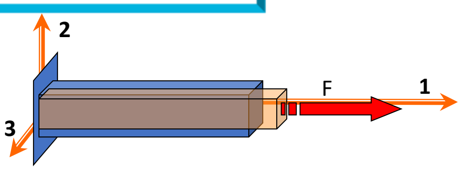
Componenti deviatoriche:

$$\sigma_1^d = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$
$$\sigma_2^d = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}$$
$$\sigma_3^d = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

23

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)



In campo elastico, per la trazione semplice, l'energia di deformazione per unità di volume vale : $U_1 = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1$

Nel caso triassiale si avrà quindi:

$$U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right)$$

Avendosi dallo studio della relazione tensione-deformazione in campo elastico che:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right] \qquad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

Si potrà scrivere l'energia di deformazione totale come:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\left\{\sigma_1\frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] + \sigma_2\frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right] + \sigma_3\frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right]$$

24

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

Quindi, per uno stato di tensione triassiale l'energia totale di deformazione vale:

$$U_{tot} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right]$$

La parte dovuta alla componente sferica dello stato di tensione varrà:

$$U_{sf} = \frac{1}{2E}\left[S^2 + S^2 + S^2 - 2\nu\left(S^2 + S^2 + S^2\right)\right] = \frac{3(1-2\nu)}{2E}S^2$$

Ricordando l'espressione di S si ottiene:

$$U_{sf} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}S^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2$$

Quindi, per differenza si ottiene l'energia di distorsione:

$$U_{dist} = U_{tot} - U_{sf}$$

25

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

$$U_{dist} = U_{tot} - U_{sf} =$$

$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)\right] - \frac{3(1-2\nu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2$$

Che può essere scritta nella forma:
(la stessa espressione poteva essere ricavata introducendo le componenti deviatoriche dello stato di tensione nell'espressione dell'energia di deformazione)

$$U_{dist} = \frac{(1+\nu)}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]$$

Nel caso in cui solo σ_1 sia diversa da zero si avrà:

$$U_{ass\,dist}(\sigma_1) = U_{dist}(\sigma_1, 0, 0) = \frac{(1+\nu)}{6E}\left[(\sigma_1)^2 + (\sigma_1)^2\right] = \frac{(1+\nu)}{3E}\sigma_1^2$$

Si può, quindi, ricavare l'espressione della tensione equivalente dalla formula:

$$\sigma_e = \sigma_1 = U_{ass\,dist}^{-1}\left[U_{dist}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right]$$

26

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

Quindi:

$$\sigma_e = \sigma_1 = U^{-1}_{ass\,dist}\left[U_{dist}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\right] = \sqrt{\frac{3E}{1+\nu}\left\{\frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\boxed{\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2} > \sigma_L}$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = \sqrt{3}\,\tau_{xy}$$

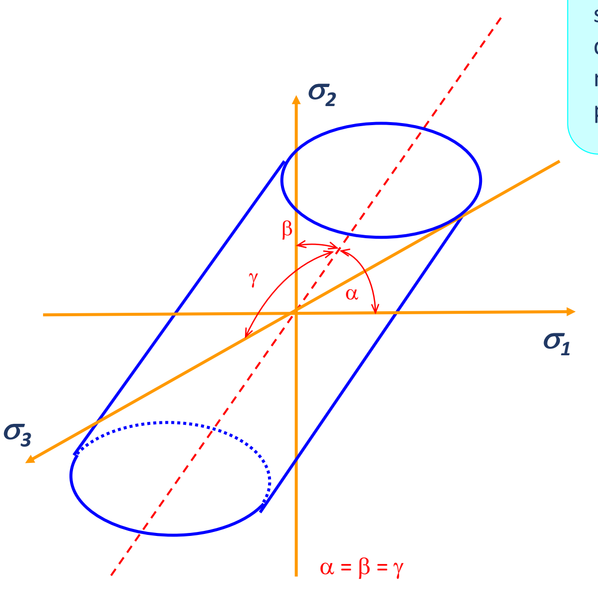
torsione + trazione:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

27

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

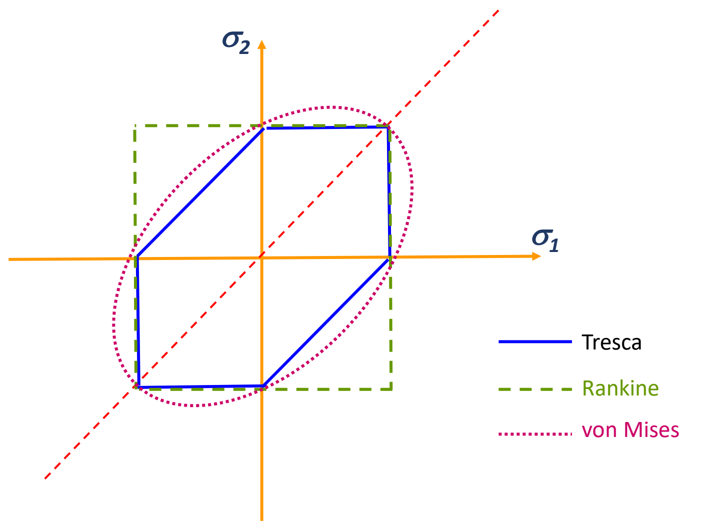


superficie critica definita dal criterio di von Mises nello spazio delle tensioni principali

28

Criteri di resistenza

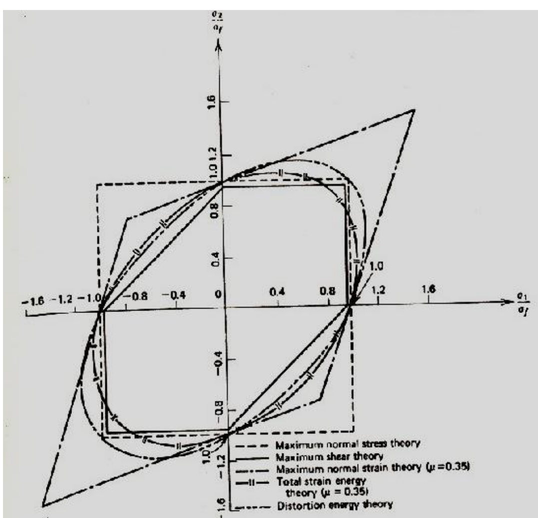
Confronto tra le varie teorie
per un stato di tensione piano



29

Criteri di resistenza

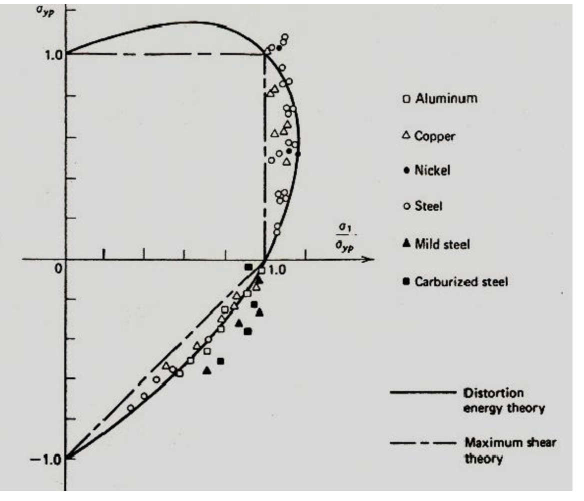
Confronto tra le varie teorie
per un stato di tensione piano



30

Criteri di resistenza

Confronto con i dati sperimentali
Materiali duttili

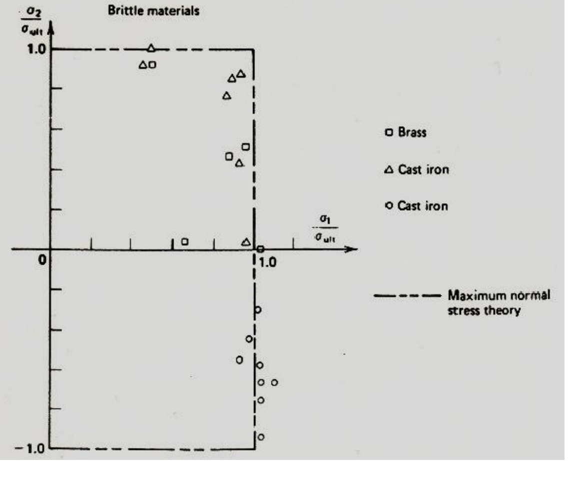


5-7

31

Criteri di resistenza

Confronto con i dati sperimentali
Materiali fragili



5-9

32

Criteri di resistenza

Confronto tra le varie teorie sulla base del rapporto caratteristico σ_L/τ_L

→Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier)	**1**
→Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)	**2**
→Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)	**1.25÷2**
→Massima deformazione normale (Poncelet-de St. Venant-Grashof)	**1.25**
→Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig)	**1.61**
→Massima energia di distorsione (Huber-von Mises-Hencky)	**1.73**

Valori sperimentali di σ_L/τ_L

- Materiali fragili = **1 ÷ 1.25**
- Materiali duttili = **1.75 ÷ 1.80**

33

Criteri di resistenza: riepilogo

Massima tensione normale (Rankine):

$$\boxed{\sigma_e = \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_{Lt} \\ \sigma_3 < \sigma_{Lc} \end{cases}}$$

Massima tensione tangenziale (Tresca):

$$\boxed{\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_L}$$

Curva di resistenza intrinseca (Mohr):

$$\boxed{\sigma_e = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k} > \sigma_{Lt} \qquad k = \frac{\sigma_{Lc}}{\sigma_{Lt}}}$$

Massima deformazione normale (de St. Venant):

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \sigma_e = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \\ \sigma_e = \left|\sigma_3 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right| \end{array}\right\} > \sigma_L}$$

Massima energia di deformazione (Beltrami):

$$\boxed{\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\right)} > \sigma_L}$$

Massima energia di distorsione (von Mises):

$$\boxed{\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2} > \sigma_L}$$

34