

**CORSO DI  
ELEMENTI COSTRUTTIVI DELLE MACCHINE  
APPELLO DEL 5 FEBBRAIO 2020**

**Esercizio 3**

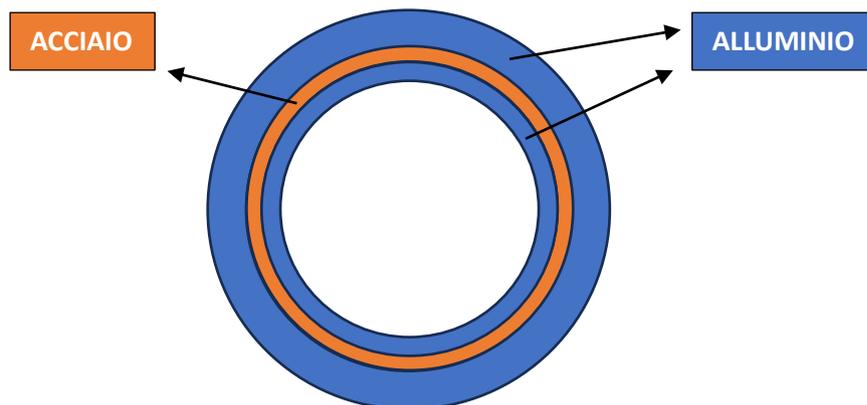
Tre anelli metallici di spessore sottile, di uguale estensione assiale e con le caratteristiche riportate nella tabella sottostante, sono inseriti uno dentro l'altro senza né gioco né forzamento a formare un sistema in cui un anello in acciaio si trova interposto tra due anelli in alluminio.

Sapendo che, inizialmente, a temperatura ambiente (25 °C), lo stato tensionale è nullo, si valutino:

- i valori del riscaldamento e del raffreddamento massimi che il sistema può sopportare in maniera che nessuno dei tre anelli superi la propria tensione di snervamento a trazione o compressione;
- lo stato di tensione finale, nel caso in cui il sistema venga portato fino alla temperatura di 440 °C e successivamente raffreddato fino a temperatura ambiente.

Si consideri valido per entrambi i materiali il modello costitutivo elastico-plastico perfetto. Si consideri inoltre il diametro degli anelli molto maggiore del loro spessore.

	Spessore $s$	Materiale	Tensione di snervamento $\sigma_s$	Modulo elastico $E$	Coef. di espansione termica $\alpha$
<b>Anello esterno</b>	5.0 mm	alluminio	170 MPa	70 GPa	$24 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
<b>Anello intermedio</b>	1.2 mm	acciaio	330 MPa	200 GPa	$12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
<b>Anello interno</b>	2.0 mm	alluminio	170 MPa	70 GPa	$24 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$



**Prima domanda**

Quando si riscalda il sistema, l'anello esterno di alluminio ( $Al^{ext}$ ) si espande molto più dell'anello d'acciaio (Fe) perché il coefficiente di espansione termica dell'alluminio è il doppio di quello dell'acciaio. Quindi si ha il distacco dell'anello esterno. Per cui rimangono a contatto solo l'anello interno d'alluminio ( $Al^{int}$ ) e l'anello d'acciaio (Fe). L' $Al^{int}$  vorrebbe espandersi ma è impedito dal Fe, quindi l' $Al^{int}$  è in compressione mentre il Fe è in trazione.

Quando si raffredda il sistema, l'anello interno di alluminio ( $Al^{int}$ ) si contrae molto di più dell'anello d'acciaio (Fe). Rimane quindi il sistema formato dall'anello esterno d'alluminio ( $Al^{ext}$ ) e dall'anello d'acciaio (Fe). L' $Al^{ext}$  vorrebbe contrarsi ma è impedito dal Fe, quindi l' $Al^{ext}$  è in trazione mentre il Fe è in compressione.

Nei due sistemi (riscaldamento  $Al^{int} - Fe$ ; raffreddamento  $Al^{ext} - Fe$ ) per capire chi arriva per primo a snervamento si imposta l'equilibrio delle forze.

**Riscaldamento**

$$F_{Fe} + F_{Al}^{int} = 0 \rightarrow A_{Fe} \sigma_{Fe} = -A_{Al}^{int} \sigma_{Al}^{int} \rightarrow s_{Fe} L \sigma_{Fe} = s_{Al}^{int} L \sigma_{Al}^{int} \rightarrow \sigma_{Fe} = -\frac{s_{Al}^{int}}{s_{Fe}} \sigma_{Al}^{int} \rightarrow \sigma_{Fe} = -\frac{2}{1.2} \sigma_{Al}^{int}$$

Si faccia la seguente ipotesi: quando l'alluminio arriva a snervamento, qual è la tensione dell'anello d'acciaio?

$$\left| \sigma_{Fe} = -\frac{2}{1.2} 170 = -283.33 \text{ MPa} \right| < |\sigma_{s,Fe}|$$

Tale espressione ci mostra che il valore della tensione dell'acciaio è inferiore alla sua tensione di snervamento, questo vuol dire che l'alluminio arriva per primo a snervamento quando si riscalda il sistema. Ovvero arriva per primo ad incipiente plasticizzazione.

### Raffreddamento

Analogamente,

$$F_{Fe} + F_{Al}^{ext} = 0 \rightarrow A_{Fe} \sigma_{Fe} = -A_{Al}^{ext} \sigma_{Al}^{ext} \rightarrow S_{Fe} L \sigma_{Fe} = S_{Al}^{ext} L \sigma_{Al}^{ext} \rightarrow \sigma_{Fe} = -\frac{S_{Al}^{ext}}{S_{Fe}} \sigma_{Al}^{ext} \rightarrow \sigma_{Fe} = -\frac{5}{1.2} \sigma_{Al}^{ext}$$

Ipotizzando che l'alluminio è arrivato a snervamento, quanto vale la tensione dell'anello d'acciaio?

$$\left| \sigma_{Fe} = -\frac{5}{1.2} 170 = -708.33 \text{ MPa} \right| > |\sigma_{s,Fe}|$$

In questo caso, si noti come la tensione dell'anello d'acciaio è maggiore della tensione di snervamento del materiale, questo vuol dire che l'anello d'acciaio snerva prima dell'anello d'alluminio quando si raffredda il sistema.

Una volta determinato per i due sistemi quale anello snerva per primo, si passa al calcolo della temperatura che porta ad incipiente plasticizzazione l' $Al^{int}$  e il Fe quando si riscalda e si raffredda il sistema rispettivamente.

### Riscaldamento

Si imposta la relazione di congruenza:

$$\Delta P_{Fe} = \Delta P_{Al}^{int} \rightarrow P_{Fe} - P_o = P_{Al}^{int} - P_o \rightarrow \frac{P_{Fe} - P_o}{P_o} = \frac{P_{Al}^{int} - P_o}{P_o} \rightarrow \frac{\Delta P_{Fe}}{P_o} = \frac{\Delta P_{Al}^{int}}{P_o} \rightarrow \varepsilon_{Fe,tot} = \varepsilon_{Al,tot}^{int}$$

La deformazione totale è la somma della componente elastica, plastica e termica:

$$\frac{\sigma_{Fe}}{E_{Fe}} + \varepsilon_{pl,Fe} + \alpha_{Fe} \Delta T = \frac{\sigma_{Al}}{E_{Al}} + \varepsilon_{pl,Al} + \alpha_{Al} \Delta T$$

Dato che è richiesto il  $\Delta T$  di incipiente plasticizzazione dell' $Al^{int}$  si pone:

$\sigma_{Al} = -\sigma_{s,Al}$  perché l'alluminio è in compressione;

$\varepsilon_{pl,Al} = 0$  in quanto la condizione di incipiente plasticizzazione si riferisce all'istante prima del fenomeno della deformazione plastica, quando essa è ancora nulla.

$\sigma_{Fe} = -\frac{2}{1.2} \cdot (-\sigma_{s,Al})$ , espressione che proviene dall'equilibrio delle forze ricavato in precedenza. Notare che il segno finale è positivo, ovvero il Fe si trova in trazione.

$\varepsilon_{pl,Fe} = 0$  perché l'anello di Fe non arriverà mai ad incipiente plasticizzazione in quanto, avendo adottato il legame costitutivo elasto-plastico perfetto, dall'equilibrio delle forze si è visto che il Fe arriva al massimo ad un valore di  $|-283.33 \text{ MPa}| < |\sigma_{s,Fe}|$

Quindi si ottiene la seguente espressione:

$$-\frac{2}{1.2} \cdot (-\sigma_{s,Al}) \frac{1}{E_{Fe}} + \alpha_{Fe} \Delta T = \frac{-\sigma_{s,Al}}{E_{Al}} + \alpha_{Al} \Delta T$$

$$\Delta T = \sigma_{s,Al} \left( \frac{2}{1.2} \frac{1}{E_{Fe}} + \frac{1}{E_{Al}} \right) \frac{1}{(\alpha_{Al} - \alpha_{Fe})} = +320.44 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Imponendo quindi un riscaldamento di 320.44 °C, ovvero riscaldando fino alla temperatura di 345.44 °C, l'anello  $Al^{int}$  arriva a snervamento, ovvero ad incipiente plasticizzazione.

### Raffreddamento

Analogamente a quanto visto sopra, si imposta la relazione di congruenza:

$$\varepsilon_{Fe,tot} = \varepsilon_{Al,tot}^{ext} \rightarrow \frac{\sigma_{Fe}}{E_{Fe}} + \varepsilon_{pl,Fe} + \alpha_{Fe}\Delta T = \frac{\sigma_{Al}}{E_{Al}} + \varepsilon_{pl,Al} + \alpha_{Al}\Delta T$$

In questo caso è il Fe che arriva a snervamento, quindi si impone:

$$\sigma_{Fe} = -\sigma_{s,Fe} \text{ perché è in compressione}$$

$$\varepsilon_{pl,Fe} = 0$$

$$\sigma_{Al} = -\frac{1.2}{5}(-\sigma_{s,Fe}), \text{ ovvero l'Al è in trazione}$$

$$\varepsilon_{pl,Al} = 0 \text{ in quanto l'Al durante il raffreddamento non arriva alla condizione di snervamento}$$

Quindi si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{-\sigma_{s,Fe}}{E_{Fe}} + \alpha_{Fe}\Delta T = -\frac{1.2}{5}(-\sigma_{s,Al})\frac{1}{E_{Al}} + \alpha_{Al}\Delta T$$

$$\Delta T = -\sigma_{s,Fe} \left( \frac{1.2}{5} \frac{1}{E_{Al}} + \frac{1}{E_{Fe}} \right) \frac{1}{(\alpha_{Al} - \alpha_{Fe})} = -231.79 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Imponendo quindi un raffreddamento di -231.79 °C, ovvero raffreddando fino alla temperatura di -206.79 °C, l'anello Fe arriva a snervamento, ovvero ad incipiente plasticizzazione.

### Seconda domanda

Dai calcoli precedenti, si è saputo che durante il riscaldamento  $Al^{int}$  arriva ad incipiente snervamento applicando un  $\Delta T = +320.44 \text{ } ^\circ\text{C}$ , ovvero arrivando ad una temperatura di  $T = 345.44 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Quindi dato che il ciclo termico previsto è il seguente  $25 \text{ } ^\circ\text{C} \rightarrow 440 \text{ } ^\circ\text{C} \rightarrow 25 \text{ } ^\circ\text{C}$  sicuramente l' $Al^{int}$  supera la condizione di incipiente plasticizzazione, accumulando quindi una deformazione plastica a compressione. Procediamo nel ricavare il valore di tale deformazione plastica.

Si impone la condizione di congruenza:

$$\varepsilon_{Fe,tot} = \varepsilon_{Al,tot}^{int} \rightarrow \frac{\sigma_{Fe}}{E_{Fe}} + \varepsilon_{pl,Fe} + \alpha_{Fe}\Delta T = \frac{\sigma_{Al}}{E_{Al}} + \varepsilon_{pl,Al} + \alpha_{Al}\Delta T$$

Si impone:

$$\Delta T = 440 - 25 = 415 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varepsilon_{pl,Fe} = 0 \text{ in quanto il Fe non arriva mai a plasticizzare (vedi sopra)}$$

$$\sigma_{Al} = -\sigma_{s,Al} \text{ perché l'alluminio è arrivato a snervamento in compressione;}$$

$$\sigma_{Fe} = -\frac{2}{1.2} \cdot (-\sigma_{s,Al})$$

Quindi la deformazione plastica dell'alluminio vale:

$$\varepsilon_{pl,Al} = \sigma_{s,Al} \left( \frac{2}{1.2} \frac{1}{E_{Fe}} + \frac{1}{E_{Al}} \right) + \Delta T(\alpha_{Fe} - \alpha_{Al}) = -1.135 \cdot 10^{-3} \frac{m}{m}$$

Si noti che il segno è negativo, in quanto la deformazione plastica è avvenuta in compressione.

Quindi l' $Al^{int}$  arriva a 440 °C, accumulando una deformazione plastica negativa pari a  $-1.135 \cdot 10^{-3} \frac{m}{m}$ . Quando riporto il sistema a temperatura ambiente (25 °C), le deformazioni termiche ed elastiche vengono recuperate (in quanto non sono deformazioni permanenti), mentre rimane la deformazione plastica (che è una deformazione permanente). Quindi l' $Al^{int}$  a 25 °C risulta più piccolo rispetto alla sua condizione di partenza. Invece l'anello d'acciaio e l'anello esterno d'alluminio non hanno subito nessuna deformazione plastica e hanno recuperato le loro deformazioni termiche ed elastiche, quindi sono ritornati ad assumere la configurazione iniziale di partenza. Ciò vuol dire che l' $Al^{int}$  essendo più piccolo si distacca dall'anello in acciaio e non avendo nessun contatto esterno o forza agente esterna ha uno stato di sollecitazione nullo.

Per quanto riguarda l'anello d'acciaio e quello d'alluminio esterno, anch'essi hanno uno stato tensionale nullo in quanto sono ritornati alla condizione iniziale di partenza che non prevedeva né gioco né forzamento.

Quindi riassumendo a 25 °C si ha:

$$\sigma_{Al}^{int} = 0 ; \sigma_{Al}^{ext} = 0 ; \sigma_{Fe} = 0$$

$$\varepsilon_{pl,Al}^{int} = -1.135 \cdot 10^{-3} \frac{m}{m} ; \varepsilon_{pl,Al}^{ext} = 0 ; \varepsilon_{pl,Fe} = 0$$

### VARIANTE

Considerando le stesse richieste del problema originale, cosa accadrebbe al sistema se lo spessore dell'anello in acciaio fosse pari a 0.8 mm anziché 1.2 mm?

Di seguito si riportano solamente i risultati finali

#### Prima domanda:

$$\Delta T_{ip}^{Riscald} = +294.6 \text{ } ^\circ C$$

$$\Delta T_{ip}^{Raffr} = -200.3 \text{ } ^\circ C$$

#### Seconda domanda:

A 25 °C si ha:

$$\sigma_{Al}^{int} = 0 ; \sigma_{Al}^{ext} = +31.6 \text{ MPa} ; \sigma_{Fe} = -197.6 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{pl,Al}^{int} = 0 ; \varepsilon_{pl,Al}^{ext} = 0 ; \varepsilon_{pl,Fe} = +1.44 \cdot 10^{-3} \frac{m}{m}$$