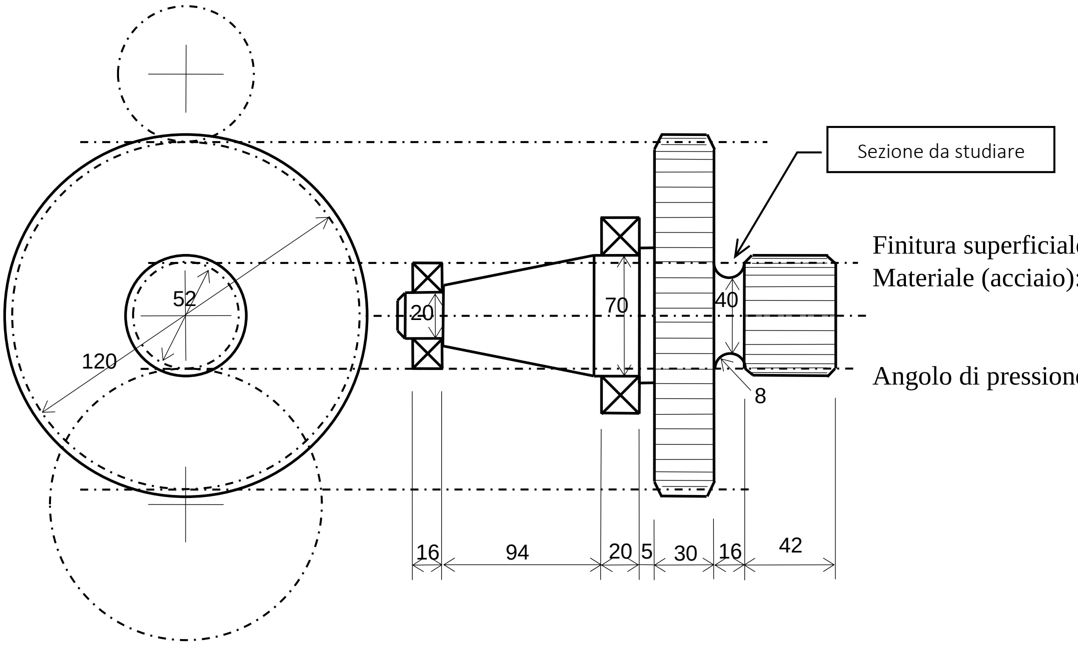
CORSO DI
ELEMENTI COSTRUTTIVI DELLE MACCHINE
APPELLO DEL 18 GENNAIO 2023

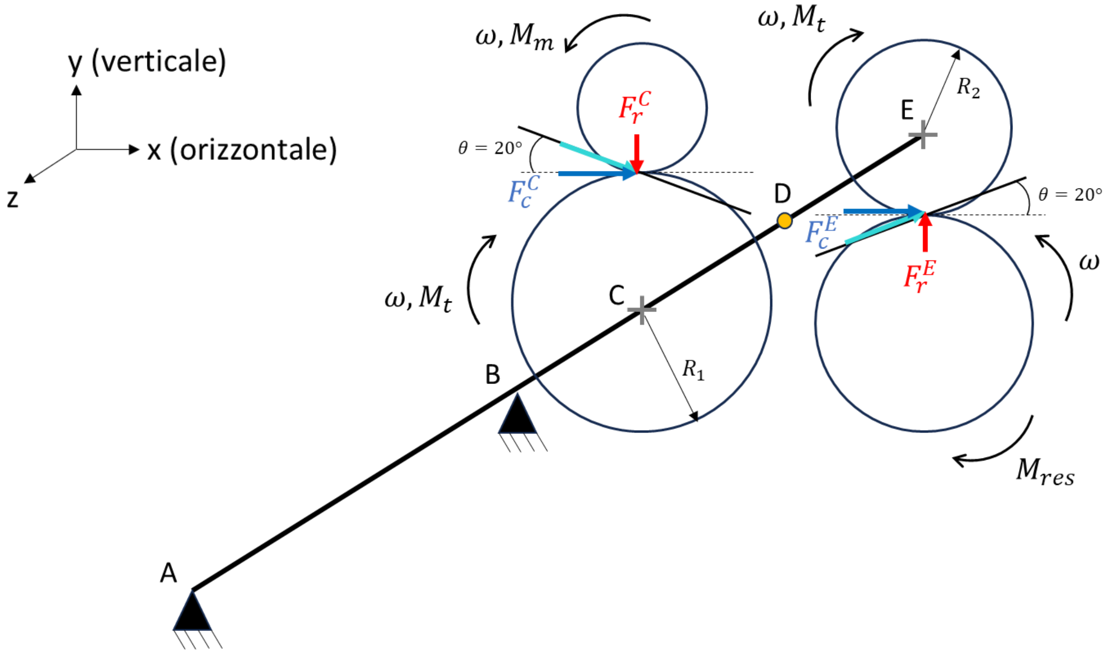
Esercizio 1

L'albero intermedio di una trasmissione meccanica ad ingranaggi a denti dritti è stato costruito in un pezzo unico con le dimensioni e le caratteristiche mostrate in figura. Si noti che per consentire il taglio dei denti del pignone è stato necessario realizzare tra le due ruote una profonda gola di scarico. Questa individua la sezione più critica del componente.
Considerando unicamente lo stato tensionale di questa sezione, si valuti la potenza massima trasmissibile, $\boldsymbol{W_1}$, sapendo che inizialmente è stato previsto che l'albero abbia una vita operativa, h_1, di *300 ore* e che debba lavorare con un coefficiente di sicurezza di $X_1 = 2$.
Successivamente, al termine delle prime h_1 ore di servizio, non avendo la possibilità di sostituire il componente, si decide di mantenerlo in funzione accettando una riduzione del margine sicurezza da X_1 a $X_2 = 1.80$. Si valutino le ulteriori ore di lavoro, $\boldsymbol{h_2}$, per cui il sistema può continuare a lavorare continuando a trasmettere la potenza iniziale W_1.
Trascorse metà delle ulteriori h_2 ore di lavoro, prevedendo di non avere nuovamente la possibilità di sostituire il pezzo, si decide di mantenerlo in esercizio riducendo del *5%* il carico applicato. Si valutino le ulteriori ore di servizio $\boldsymbol{h_3}$ considerando invariato il coefficiente di sicurezza ($X_3 = X_2$). La velocità di rotazione n è pari a *7.5 giri/min* e rimane invariata in tutte le condizioni di carico. Per il calcolo del cumulo del danno di fatica si utilizzi preferibilmente il criterio di *Manson*.



Finitura superficiale: *rettifica media*
Materiale (acciaio): $\sigma_R = 1200\ MPa$, $\sigma_S = 900\ MPa$, $\sigma_{LF} = 550\ MPa$
Angolo di pressione: $\theta = 20°$

Schema delle forze agenti sull’albero:



Prima domanda

$$\omega = 7.5 \cdot \frac{2\pi}{60} = 0.7854 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{4\,P}{\pi} \;[Nm]$$

$$F_c^C = \frac{M_t}{R_1} = 21.2\,P \;[N]$$

$$F_r^C = F_c^C \tan\theta = 7.7\,P\;[N]$$

$$F_c^E = \frac{M_t}{R_2} = 49\,P\;[N]$$

$$F_r^E = F_c^E \tan\theta = 17.8\,P\;[N]$$

Dato che la sezione da studiare è quella nel punto D, si osservi che le forze F_c^C, F_r^C non generano nessun momento flettente in D. Le uniche forze che sollecitano il punto D attraverso un momento flettente sono F_c^E e F_r^E. Invece per quanto riguarda il momento torcente, esso è costante su tutto il tratto CE e nullo nella restante parte dell’albero.

Le forze F_c^E e F_r^E generano in D i seguenti momenti flettenti nei due piani (orizzontale e verticale):

$$M_{f,o}^D = F_c^E \cdot DE = 1.421\,P\;[N]$$

$$M_{f,v}^D = F_r^E \cdot DE = 0.516\,P\;[N]$$

Quindi il momento flettente risultante è:

$$M_{f,tot}^D = \sqrt{\left(M_{f,o}^D\right)^2 + \left(M_{f,v}^D\right)^2} = 1.51\,P\;[N]$$

Nella sezione D si ha un ciclo alterno-simmetrico dovuto alla flessione rotante (R = - 1), e una torsione statica (R = + 1). Si noti che esiste anche una componente di taglio agente sulla sezione D che genera anch’essa un ciclo alterno simmetrico; Il ciclo dovuto al taglio è sfasato rispetto a quello generato dal momento flettente. Trattare con completezza questo tipo di caso richiede l’applicazione di criteri di progettazione a fatica più complessi di quelli fino a qui utilizzati. Per semplicità si trascuri il ciclo alterno-simmetrico dovuto al taglio e si consideri solamente il ciclo alterno -simmetrico del momento flettente e la torsione statica.

Dal momento flettente si ricava la σ_{M_f}, dal momento torcente la τ_{M_t}.

$$\sigma_{max}^{M_f} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{M_f}{\frac{\pi\ d^3}{32}} = 240324\ P\ [Pa]$$

$$\sigma_{max}^{M_t} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{\frac{\pi\ d^3}{16}} = 101321\ P\ [Pa]$$

$$R = -1\ \rightarrow \begin{cases} \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \sigma_{max} = 240324\ P\ [Pa] \\ \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 0\ [Pa] \end{cases}$$

$$R = +1\ \rightarrow \begin{cases} \tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = 0\ [Pa] \\ \tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \tau_{max} = 101321\ P\ [Pa] \end{cases}$$

Di seguito si ricavano le componenti equivalenti della sollecitazione a fatica utilizzando il criterio di Von Mises e di Juvinall.

$$\sigma_{a,eq} = \sqrt{(k_e\ \sigma_a)^2 + 3(k'_e\ \tau_a)} = \ k_e\ \sigma_a$$

$$\sigma_{m,eq} = \frac{\sigma_m}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + (\tau_m)^2} = \tau_m$$

Sapendo che $\frac{r}{d} = 0.2$ e $\frac{D}{d} = 1.3$, dai grafici si ricava $q = 0.93$ e $k_t = 1.58$

Per cui il coefficiente d'intaglio effettivo per lo spallamento vale, $k_e^{spall} = 1.56$

Ovvero, $k_e = k_e^{spall} \cdot k_e^{linguet} = 1.54$ in cui $k_e^{linguet} = 1$ perché non è presente nella sezione D.

Sono stati ottenuti così i valori di $\sigma_{a,eq}$ e $\sigma_{m,eq}$ in funzione della potenza P. Imponendo l'equazione della retta di Goodman si ricava la potenza massima trasmissibile che soddisfa il coefficiente di sicurezza pari a 2 per una durata di 300 ore.

Retta di Goodman:

$$\frac{\sigma_{a,eq}}{b_1\ b_2\ \sigma_N} + \frac{\sigma_{m,eq}}{\sigma_R} = \frac{1}{X}$$

Il valore di σ_N è quello relativo a 300 ore di servizio, di seguito i passaggi per ricavare il suo valore.

300 ore di servizio sono pari a 18000 minuti che equivalgono quindi a 135000 cicli, in quanto un giro corrisponde a un ciclo.

Dall'uguaglianza ${\sigma_{LF}}^m \cdot\ 10^6\ =\ {\sigma_R}^m \cdot 10^3$

$$m = \frac{3}{\log\left(\frac{\sigma_R}{\sigma_{LF}}\right)} = 8.8543$$

Imponendo poi: ${\sigma_N}^m \cdot\ N\ =\ {\sigma_R}^m \cdot 10^3$ si ricava:

$$\sigma_N = \sigma_R \left(\frac{10^3}{N}\right)^{\frac{1}{m}} = 689.6\ MPa$$

Ponendo $b_1 = 0.79$ e $b_2 = 0.86$ e risolvendo rispetto a P la seguente equazione

$$\frac{1.4\ \cdot 240324\ P}{0.79 \cdot 0.86 \cdot 689.6 \cdot 10^6} + \frac{101321\ P}{1200 \cdot 10^6} = \frac{1}{2}$$

si ottiene $\boldsymbol{P = 564.7}$ **[W]** = $\boldsymbol{W_1}$ potenza massima trasmissibile.

Seconda domanda

Di seguito si riporta il risultato utilizzando sia il metodo di Miner che di Manon.

Miner

Portando il coefficiente di sicurezza da 2 a 1.8, per quanti cicli può rimanere in servizio il sistema? Il valore si ricava dall'equazione della retta di Goodman, ponendo X=1.8 e risolvendo rispetto a σ_N che sarà utilizzato per ricavare il numero massimo di cicli N.

Dalla precedente domanda, sapendo che $P = W_1 = 564.7\ W$, si ha che $\sigma_{a,eq} = 211.9\ MPa$ e $\sigma_{m,eq} = 57.2\ MPa$

$$\sigma_{N,2} = \frac{\sigma_{a,eq}}{b_1\ b_2}\left(\frac{1}{\frac{1}{X} - \frac{\sigma_{m,eq}}{\sigma_R}}\right) = 614.14\ MPa$$

Sempre da $\sigma_N{}^m \cdot\ N\ =\ \sigma_R{}^m \cdot 10^3$ si ricava:

$$N = \left(\frac{\sigma_R}{\sigma_N}\right)^m \cdot 10^3 = 376540 \text{ cicli}$$

Ovvero nella nuova condizione di lavoro con X=1.8, si ha che il sistema può eseguire 376540 cicli. Nelle prime $h_1 = 300$ ore ne sono stati eseguiti 135000, quindi nella seconda fase di lavoro ne rimangono da fare:

$376540 - 135000 = 241540$ cicli rimanenti che in ore corrispondono a: $h_2 = \frac{241540}{\omega \cdot 60} = 537$ ore rimanenti.

Come si può notare, per questo specifico caso non è stato necessario usare il metodo del cumolo di danno di Miner, poiché non c'è stato un cambiamento della ciclo di lavoro, ma si è semplicemente ridotto il coefficienti di sicurezza X.

Se si volesse utilizzare Miner, si procede nel seguente modo:

$$D_{tot} = D_1 + D_2 = \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = \frac{135000}{376540} + \frac{n_2}{376540}$$

Da cui si ottiene che $n_2 = 241540$ cicli rimanenti che portano a rottura il sistema nella seconda fase, che corrispondono a 537 ore.

N_1 è pari a N_2 in quanto dalla fase 1 alla fase 2 non è cambiato il valore della sollecitazione, bensì solo il coefficiente di sicurezza.

A questo punto si mantiene il coefficiente X=1.8 e si riduce del 5% la potenza trasmessa dopo aver completato $\frac{n_2}{2}$ cicli, ovvero:

$P_{new} = 536.5$ W, si riducono del 5% anche $\sigma_{a,eq} = 201.3\ MPa$ e $\sigma_{m,eq} = 54.3\ MPa$.

Per valutare le ore rimanenti h_3 si può considerare il problema composto da tre fasi distinte $(h_1, \frac{h_2}{2}, h_3)$, oppure da due fasi, la prima costituita dalle $\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)$ ore, mentre la seconda costituita dalle ore h_3 rimanenti. Si procede considerando la prima opzione. Impostando il cumolo del danno secondo Miner si ha:

$$D_{tot} = D_1 + D_2 + D_3 = \frac{n_1}{N_1} + \frac{\frac{n_2}{2}}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} = \frac{135000}{376540} + \frac{\frac{241540}{2}}{376540} + \frac{n_3}{N_3} = 1$$

In questo caso può essere considerata come una fase unica

N_3 si ricava conoscendo $\sigma_{N,3}$, quest'ultimo si trova imponendo l'equazione della retta di Goodman con la potenza ridotta del 5%.

$\sigma_{N,3} = 580.71\ MPa$; $N_3 = 618105$ cicli necessari a portare a rottura la sezione critica se il sistema lavorasse sempre con una potenza ridotta del 5%.

Quindi dall'equazione del cumulo del danno si ha trova che $n_3 = 198249$ cicli rimanenti che il sistema può fare prima di arrivare a cedimento.

$$D_1 = 0.36\ (36\%);\ D_2 = 0.32\ (32\%);\ D_3 = 0.32\ (32\%);$$

Manson

Come trovato in precedenza, il numero di cicli totali che effettuabili nella seconda fase dovuti alla riduzione del coefficiente di sicurezza sono pari a 376540 cicli.

Applicando Manson si ha che: $N_{tot} = N_p + N_n$ in cui $N_p = 14\ N_{tot}^{0.6}$ e $N_n = N_{tot} - N_p$

Si ricava quindi che $N_{p2} = 31018$ cicli che servono per propagare la cricca e $N_n = 345522$ cicli necessari per far nucleare la cricca.

Di questi 345522 cicli per la nucleazione, ne sono stati eseguiti 135000 (nelle prime 300 ore). Quindi rimangono 210522 cicli per finire la nucleazione. Una volta che la cricca ha nucleato, rimangono 31018 cicli della propagazione, quindi nella seconda fase per arrivare a rottura sono necessari 210522 cicli rimanenti della nucleazione da sommare ai 31018 cicli necessari alla propagazione, ovvero in totale per arrivare a rottura servono 241520 cicli (che corrispondono a 537 ore).

Si noti che il valore ottenuto in questo caso è identico a quello ottenuto con Miner, infatti si poteva arrivare allo stesso risultato con il ragionamento affrontato precedentemente. Il motivo risiede nel fatto che in queste due fasi non è stato cambiato il valore della sollecitazione, ma bensì è stato ridotto solamente il coefficiente di sicurezza il quale non altera il ciclo di fatica.

Si riduca ora del 5% la potenza, mantenendo invariato il coefficiente di sicurezza X=1.8.

Consideriamo tutto ciò che precede la riduzione di potenza come una fase unica.

Dai calcoli precedentemente fatti si è ricavato il numero totale di cicli delle due fasi, da cui si ricava il numero di cicli necessari alla nucleazione e alla propagazione della cricca.

$N_{tot,2} = 376354$; $N_{n2} = 345522$; $N_{p2} = 31018$

$N_{tot,3} = 618105$; $N_{n3} = 576345$; $N_{p3} = 41760$

Considerando ciò che succede prima della riduzione di potenza come un'unica fase, si imposta la seguente uguaglianza:

$$D_{n,tot} = D_{n,2} + D_{n,3} = \frac{n_{n2}}{N_{n2}} + \frac{n_{n3}}{N_{n3}} = \frac{135000 + \frac{241540}{2}}{345522} + \frac{n_{n3}}{576345} = 1$$

Risulta che $n_{n3} = 149710$ cicli necessari nella terza fase per finire la nucleazione, ovvero per arrivare a $D_{n,tot} = 1$.

Dopo che cricca ha nucleato, sono necessari ulteriori 41760 cicli per far propagare la cricca, quindi in totale i cicli eseguibili prima di arrivare a rottura (nucleazione+propagazione) nella terza fase sono: $n_{n3} + N_{p3} = 191470$ cicli, che corrispondono a $h_3 = 426$ ore.

Prima della riduzione della potenza il danno è pari al 74%, che corrisponde al 39% per le prime 300 ore, al 35% durante le $\frac{h_2}{2} = 268.5$ ore. Mentre dopo la riduzione di potenza il danno rimanente è pari al 26%.