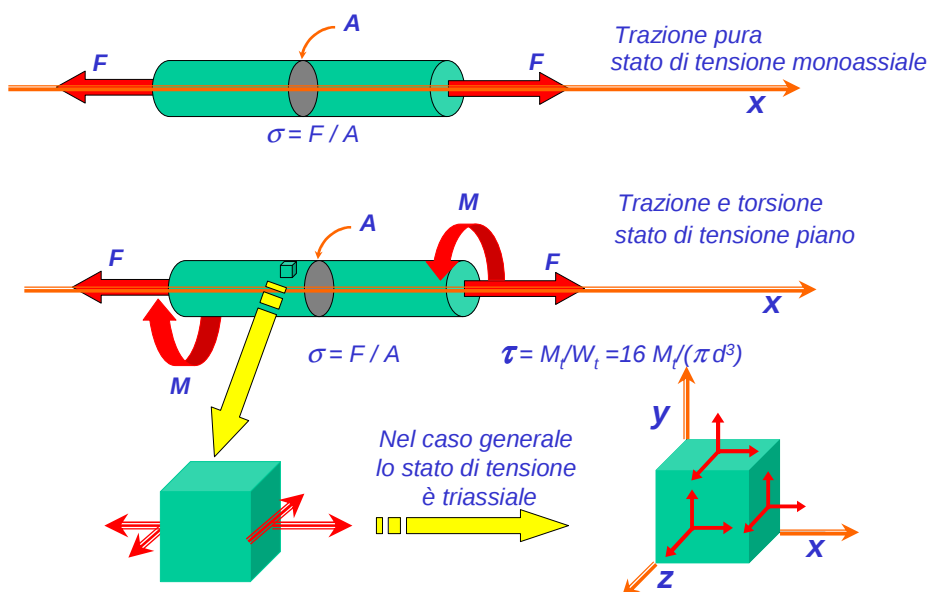
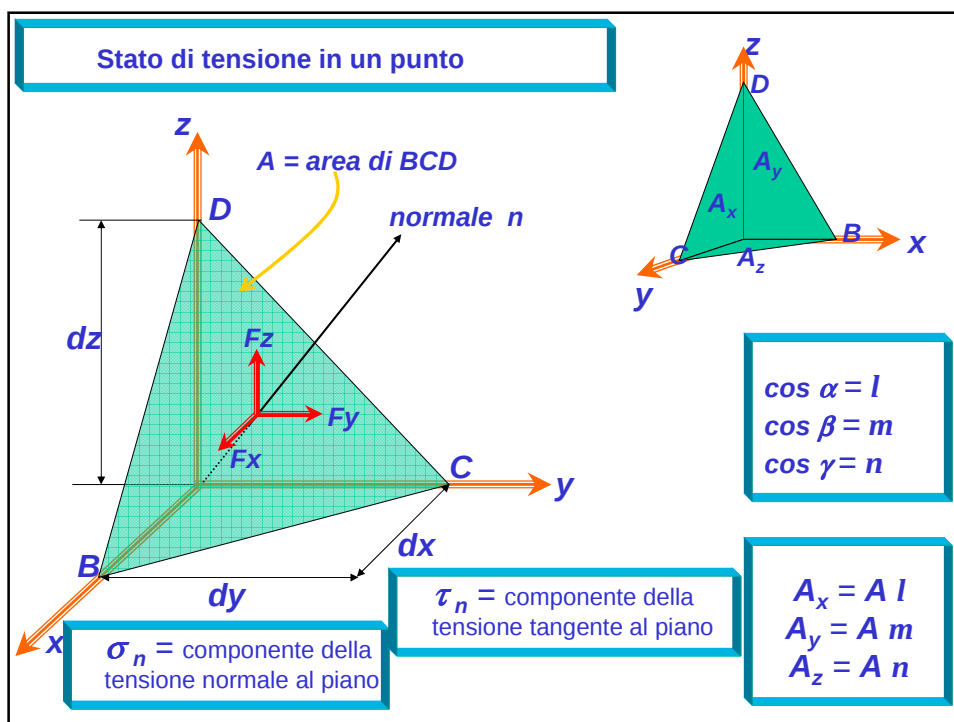
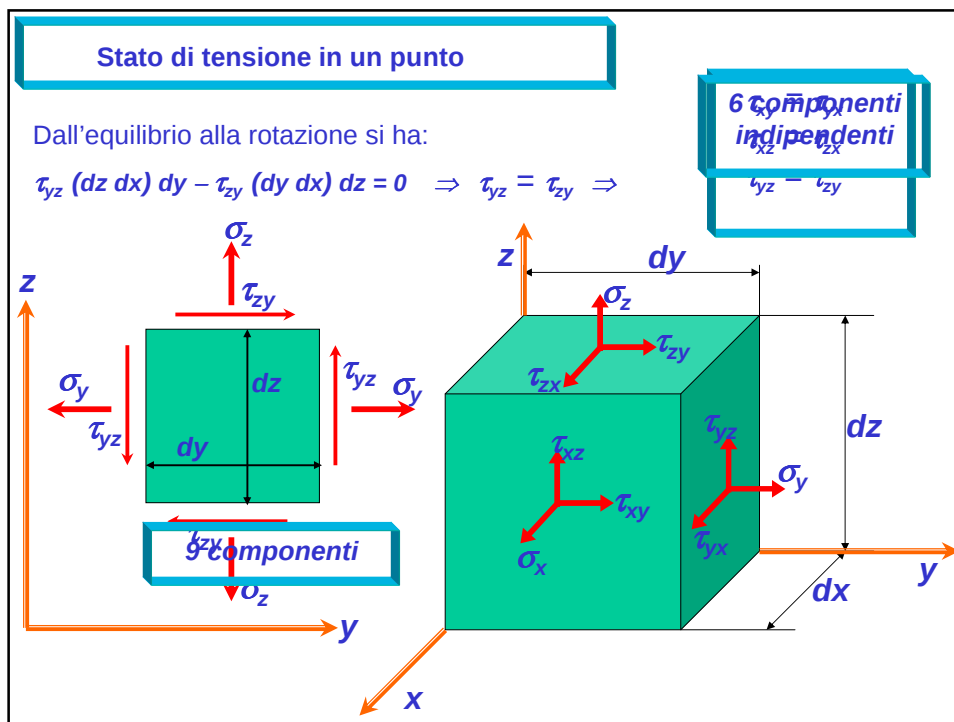


Stato di tensione

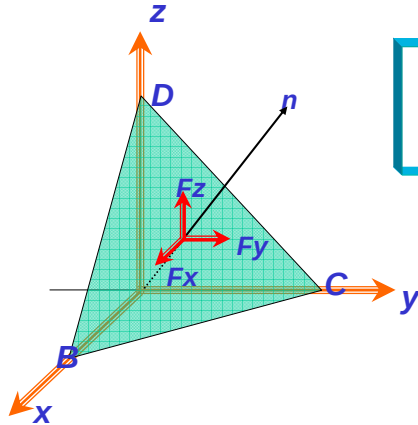
- ◆ Stato di tensione triassiale
- ◆ Stato di tensione piano
- ◆ Cerchio di Mohr

Stato di tensione





Direzioni e tensioni principali



Esistono 3 direzioni per le quali $\tau_n=0$ e σ_n è parallela ad n

Le tre tensioni corrispondenti $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono dette principali. Tra loro vi è la massima e la minima tensione nel punto considerato per il determinato stato di sollecitazione

Direzioni e tensioni principali

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Tensore delle tensioni

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 - I_2 \sigma_p - I_3 = 0$$

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

Tensioni principali

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = 0$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - (\sigma_x \tau_{yz}^2 + \sigma_y \tau_{zx}^2 + \sigma_z \tau_{xy}^2)$$

Invarianti

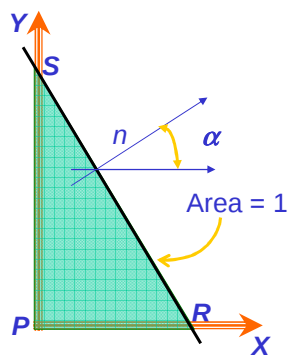
Direzioni e tensioni principali

$$\sigma_p = \sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$$

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_p)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma_p)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma_p)n &= 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1\end{aligned}$$

Direzioni principali: ogni direzione principale è individuata dalla terna dei coseni direttori l, m, n soluzione del sistema a sinistra ponendo σ_p pari alla tensione principale corrispondente.

Stato di tensione piano

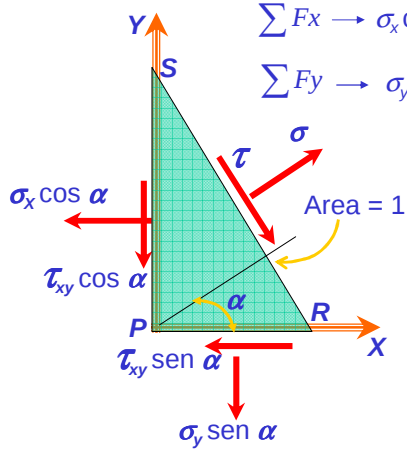


Si consideri il piano RS
parallelo all'asse z
e con la normale n inclinata di α
rispetto all'asse x

Ipotesi: stato piano di tensione

Si immagini ora di spostare il punto di vista sull'asse z

Stato di tensione piano



$$\sum F_x \rightarrow \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma \cos \alpha - \tau \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y \rightarrow \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma \sin \alpha + \tau \cos \alpha = 0$$

moltiplicando la prima per $\cos \alpha$
e la seconda per $\sin \alpha$ si ha:

$$\sigma_x \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma \cos^2 \alpha +$$

$$- \tau \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma \sin^2 \alpha +$$

$$+ \tau \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

sommando le due equazioni si ottiene:

$$\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma$$

Stato di tensione piano

$$\sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = \sigma$$

ricordando che:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha) / 2$$

$$\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha) / 2$$

l'equazione precedente può essere riscritta nella forma seguente:

$$1/2 [\sigma_x (1 + \cos 2\alpha) + \sigma_y (1 - \cos 2\alpha)] + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma$$

che equivale a:

$$\sigma = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y) + 1/2 (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

Stato di tensione piano

tornando ora alle due equazioni di equilibrio:

$$\sum F_x \rightarrow \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha - \sigma \cos \alpha - \tau \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y \rightarrow \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma \sin \alpha + \tau \cos \alpha = 0$$

moltiplicando questa volta la prima per $\sin \alpha$ e la seconda per $\cos \alpha$ si ha:

$$\sigma_x \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \sin^2 \alpha - \sigma \sin \alpha \cos \alpha - \tau \sin^2 \alpha = 0$$

$$\sigma_y \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} \cos^2 \alpha - \sigma \sin \alpha \cos \alpha + \tau \cos^2 \alpha = 0$$

sottraendo le due equazioni si ottiene:

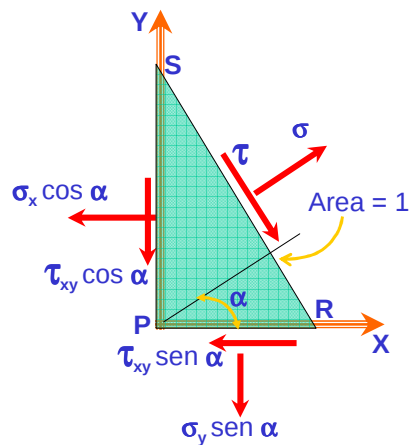
$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) - \tau = 0$$

che equivale a:

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Stato di tensione piano

Le componenti della tensione σ e τ sul piano RS e possono dunque essere espresse in funzione delle componenti σ_x e σ_y e dell'angolo α mediante le seguenti relazioni:



$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Stato di tensione piano

L'angolo α che individua i piani principali può essere ricavato cercando il massimo della funzione $\sigma(\alpha)$:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

ovvero, uguagliando a 0 la derivata $d\sigma/d\alpha$

$$d\sigma/d\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + 2 \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha = 2 \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

e quindi

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Il cerchio di Mohr

Nel sistema di riferimento orientato secondo le direzioni principali le equazioni di equilibrio si possono scrivere come segue:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\beta$$

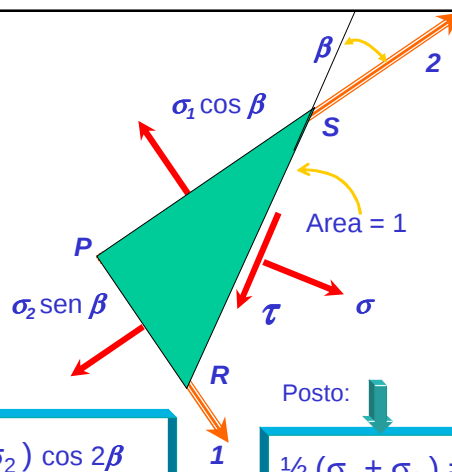
$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\beta$$

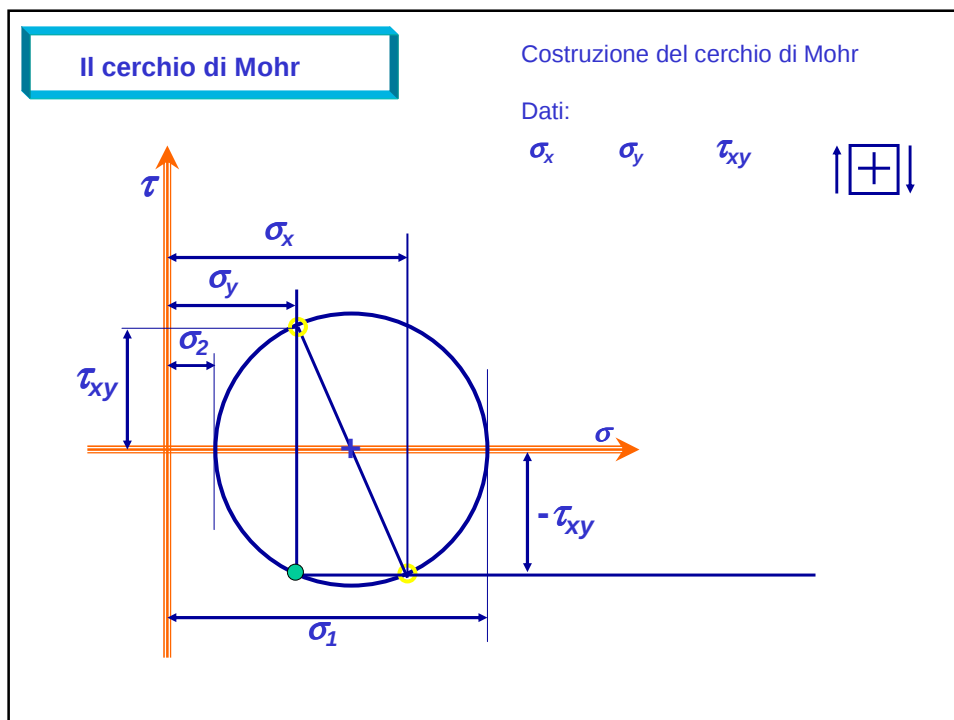
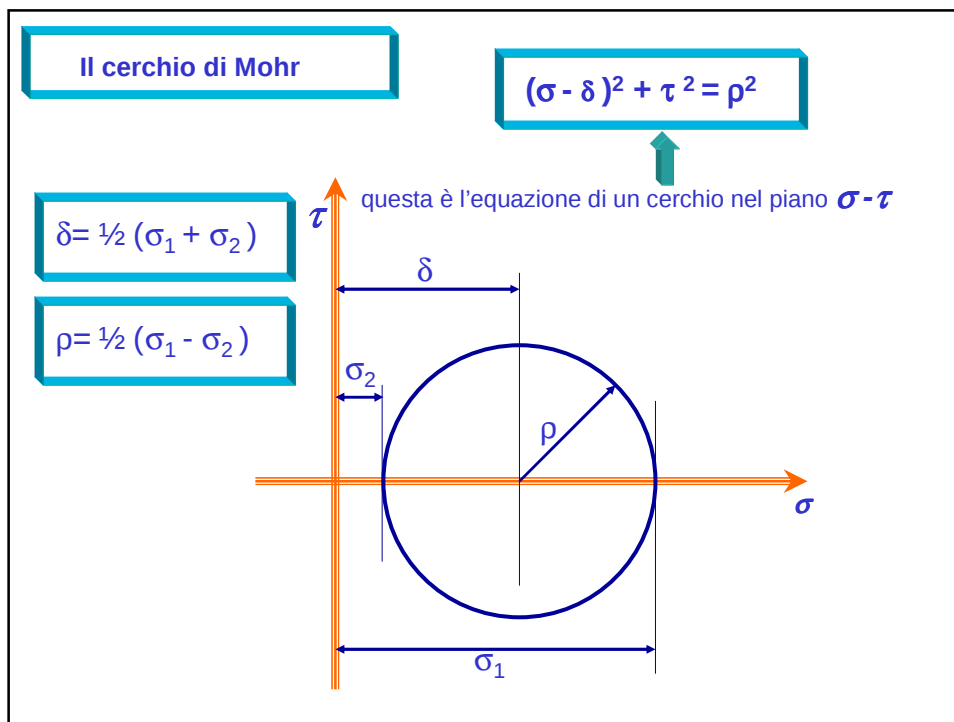
$$(\sigma - \delta)^2 + \tau^2 = \rho^2$$

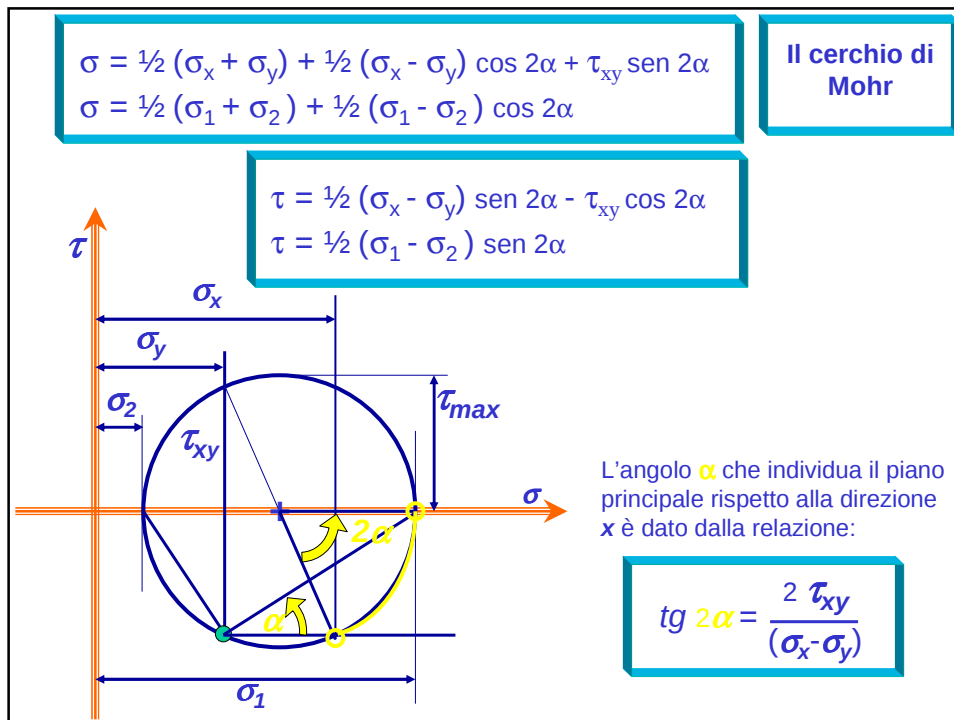
Posto:

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \delta$$

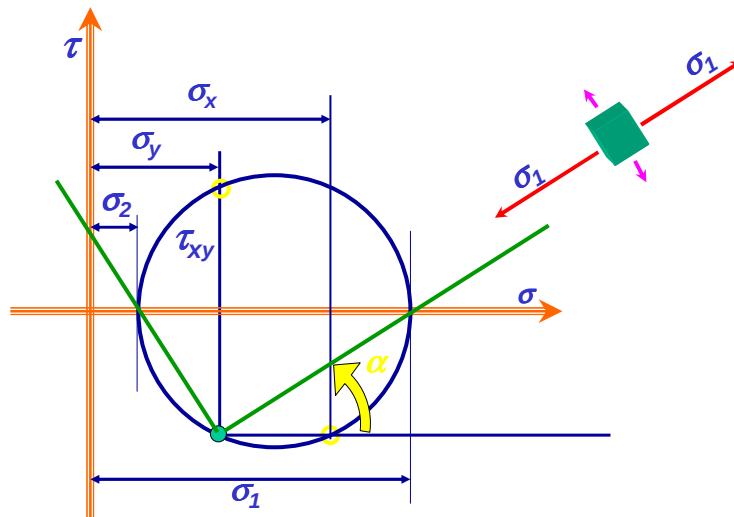
$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \rho$$



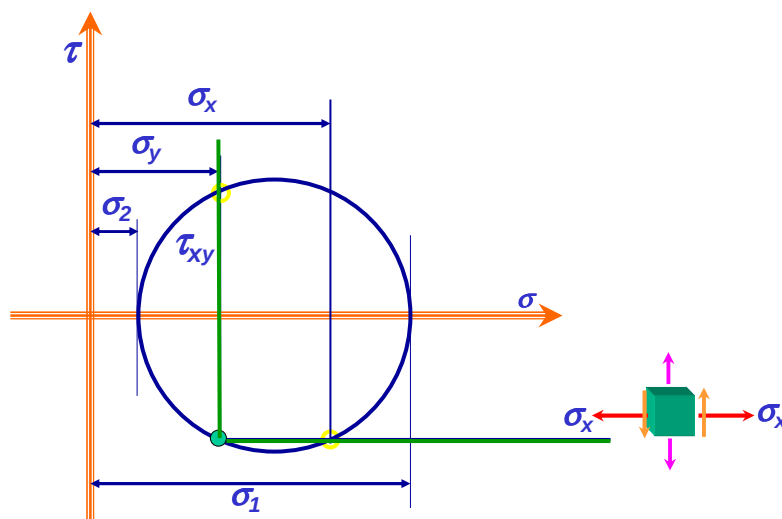




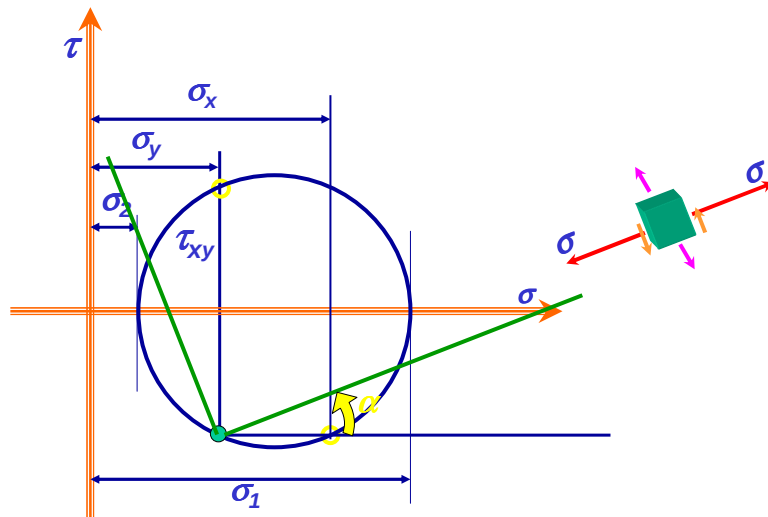
Il cerchio di Mohr



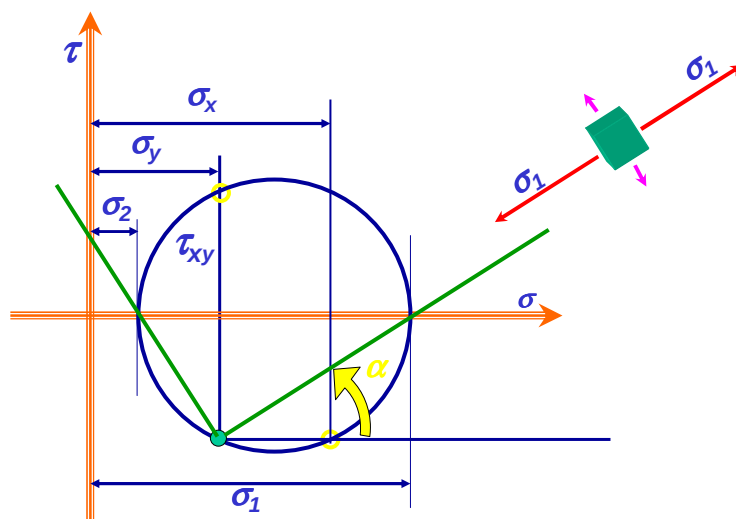
Il cerchio di Mohr



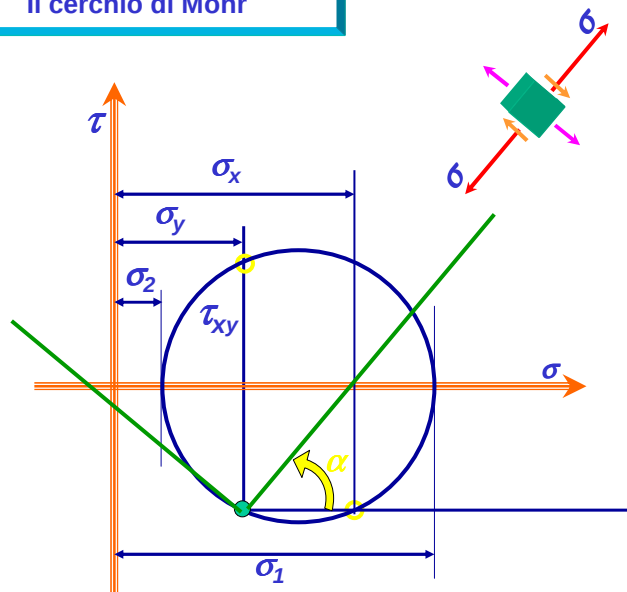
Il cerchio di Mohr



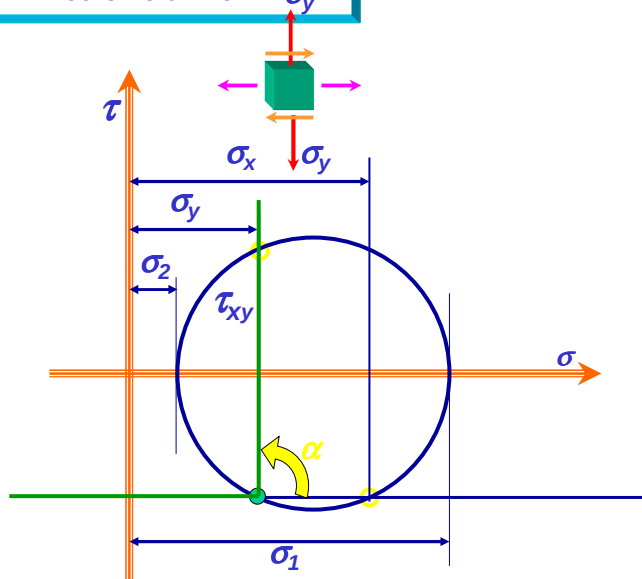
Il cerchio di Mohr



Il cerchio di Mohr

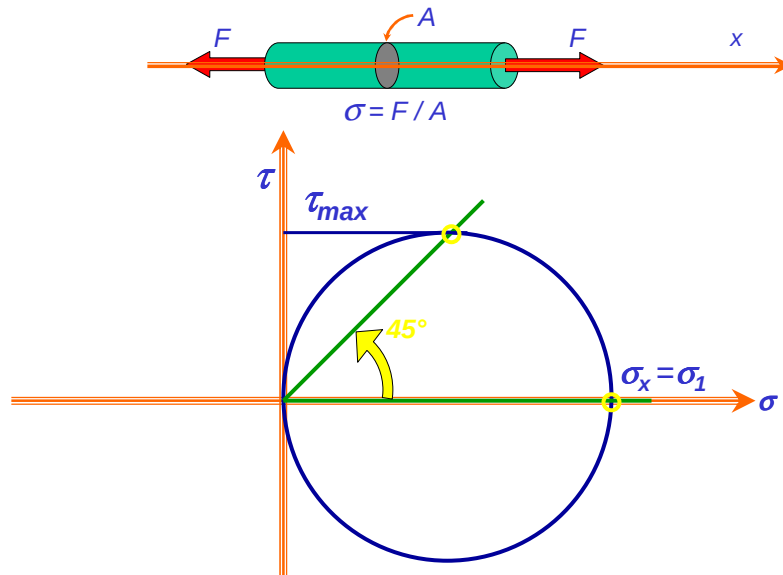


Il cerchio di Mohr σ_y



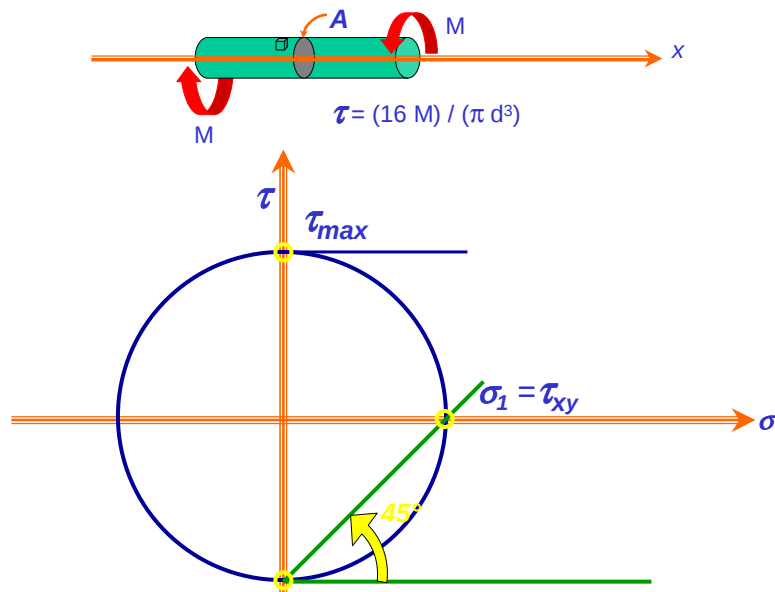
Il cerchio di Mohr

Caso della trazione pura



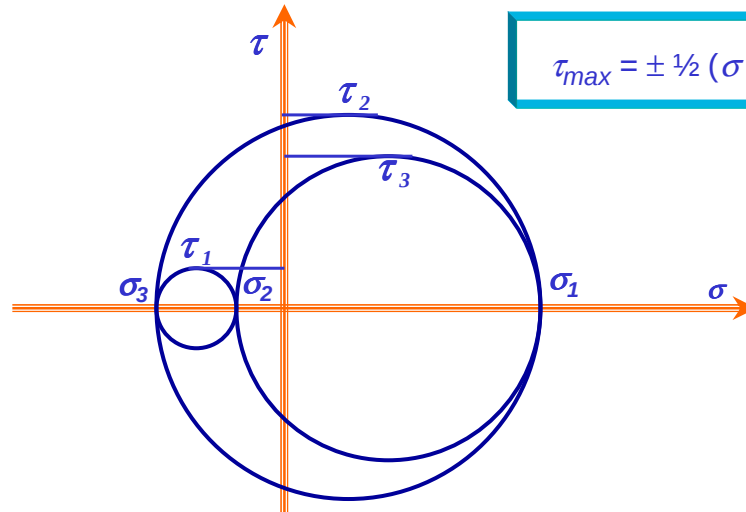
Il cerchio di Mohr

Caso della torsione pura



Il cerchio di Mohr

Stato di tensione triassiale



$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\tau_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\tau_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$\tau_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$