

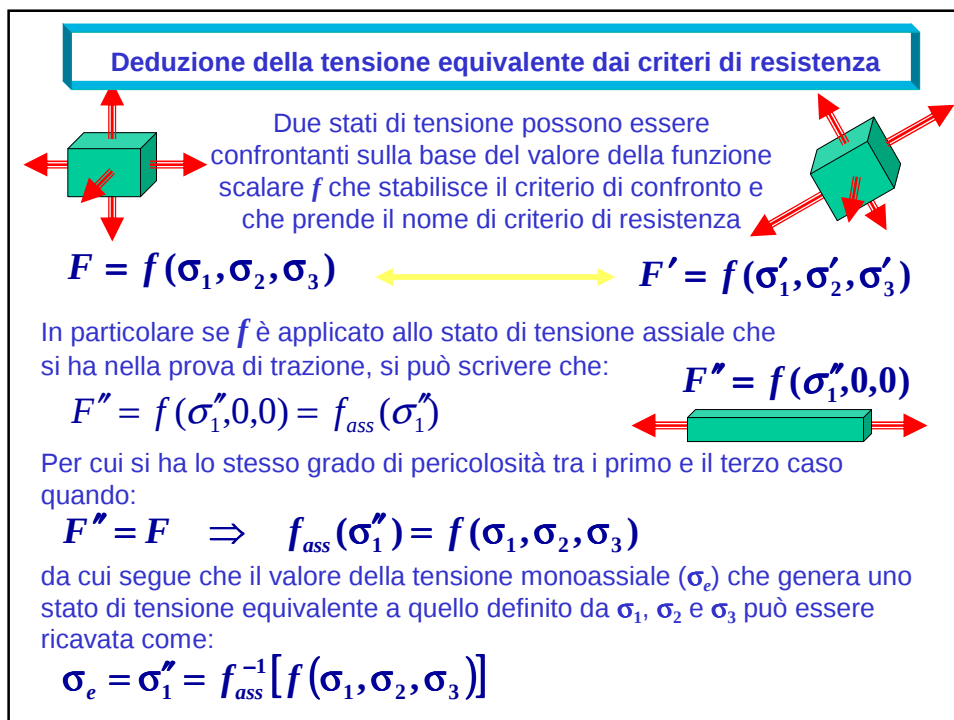
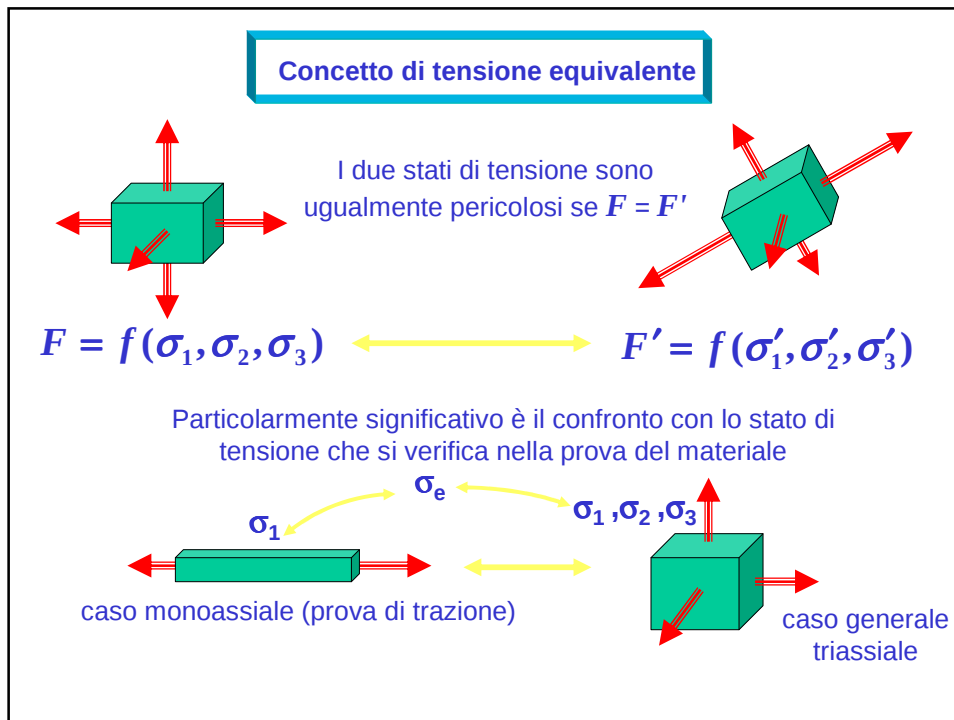
← Criteri di resistenza →

6-0
6-1

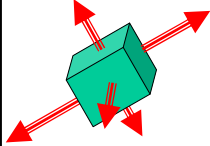
I criteri di resistenza (o teorie della rottura) definiscono un legame tra lo **stato tensionale** e la sua **pericolosità**.

Ogni stato tensionale può essere rappresentato da una **funzione scalare** delle tensioni principali che può essere confrontata con un **valore critico tipico del materiale**.

L'espressione analitica della **funzione scalare** dipende dal criterio adottato. Può essere utilizzata per confrontare tra loro stati di tensione generici ma soprattutto per confrontare uno stato generico con il caso monoassiale.



Coefficiente di sicurezza per sollecitazioni multiassiali



$$\sigma_e = \sigma_1'' = f_{ass}^{-1} [f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$$

La tensione equivalente è ora confrontabile con il valore limite del materiale. Nel caso generale di sollecitazione multiassiale il coefficiente di sicurezza assume dunque il seguente significato:

$$X = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_e}$$

Dove per tensione limite generalmente si assume:

$$\sigma_{lim} = \begin{cases} \sigma_s & \text{Tensione di snervamento per materiali duttili} \\ \sigma_r & \text{Tensione di rottura per materiali fragili} \end{cases}$$

I criteri di resistenza possono essere divisi in tre gruppi, sulla base del loro principio ispiratore:

Criteri direttamente basati sullo stato di tensione

- Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier)
- Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)
- Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)
- Massima tensione tangenziale ottaedrica (*Rô*s Eichinger)

Criteri basati sullo stato di deformazione

- Massima deformazione normale (Poncelet-de St. Venant-Grashof)

Criteri basati sulla energia di deformazione

- Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig)
- Massima energia di distorsione (Huber-von Mises-Hencky)

I criteri di resistenza possono essere divisi in due gruppi, sulla base del loro campo di applicazione:

Criteri utilizzati per i materiali duttili

- Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)
- Massima energia di distorsione (Huber-von Mises-Hencky)
- Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)
- Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig)
- Massima tensione tangenziale ottaedrica (Rôs Eichinger)

Criteri utilizzati per i materiali fragili

- Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier)
- Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)
- Massima deformazione normale (Poncelet-de St. Venant-Grashof)

6-3

Criteri di resistenza

Massima tensione normale (Rankine)

superficie critica definita dal criterio di Rankine nello spazio delle tensioni principali

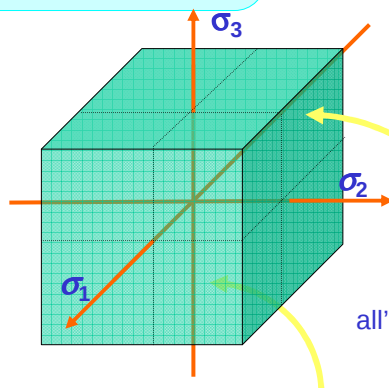
Il materiale subisce danno quando la massima tensione principale raggiunge un valore critico.

σ_{Lt} = tensione limite a trazione

σ_{Lc} = tensione limite a compressione

Si ha rottura se:

$$\sigma_e = \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_{Lt} \\ \sigma_3 < \sigma_{Lc} \end{cases}$$



la superficie è la zona critica

all'esterno del volume c'è rottura

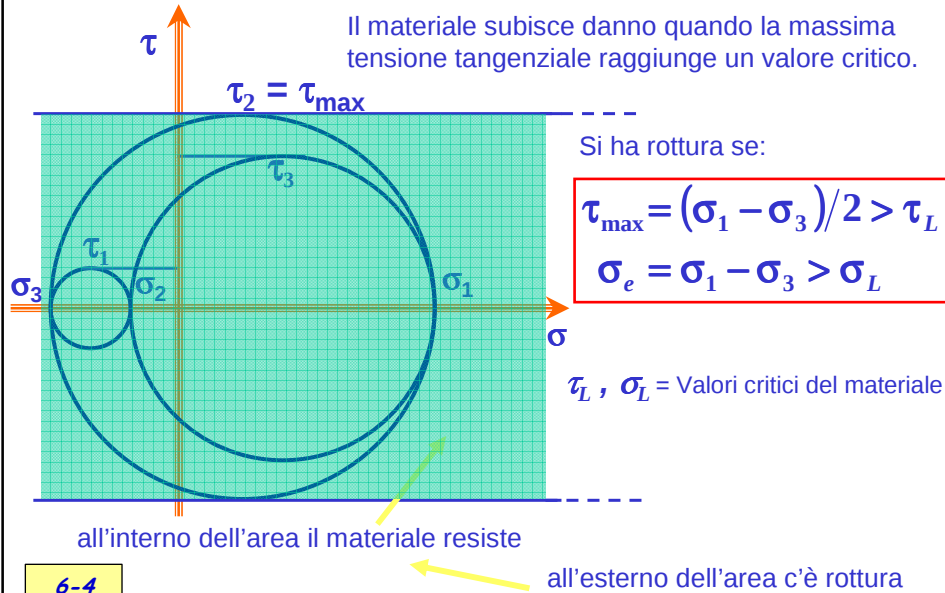
all'interno del volume il materiale resiste

6-8

Criteri di resistenza

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)

Il materiale subisce danno quando la massima tensione tangenziale raggiunge un valore critico.



Criteri di resistenza

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)

Nel caso generale di stato di tensione triassiale il valore della tensione tangenziale massima vale:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Quando la sollecitazione è monoassiale e solo σ_1 è diversa da zero si avrà:

$$\tau_{a \max}(\sigma_1) = \tau_{\max}(\sigma_1, 0, 0) = \frac{\sigma_1}{2}$$

Si può, quindi, ricavare l'espressione della tensione equivalente dalla relazione:

$$\sigma_e = \sigma_1 = \tau_{a \max}^{-1} [\tau_{\max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$$

Criteri di resistenza

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)

Ne segue che:

$$\sigma_e = \tau_{a \max}^{-1} [\tau_{\max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)] = 2 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) = \sigma_1 - \sigma_3$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_L$$

Casi particolari:

torsione pura:

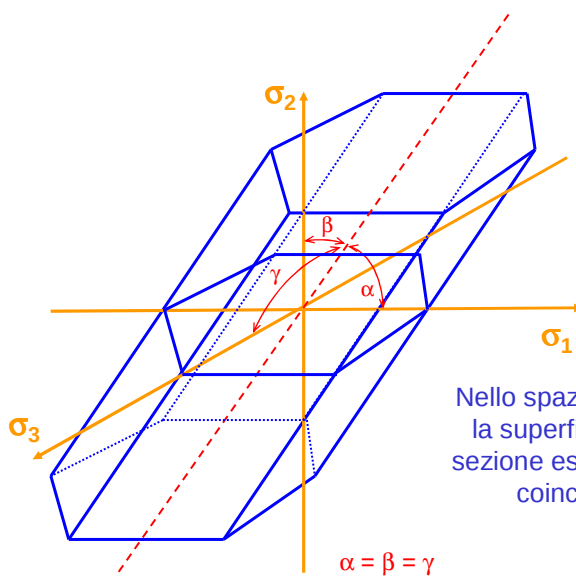
$$\sigma_e = 2\tau_{xy}$$

torsione + trazione:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

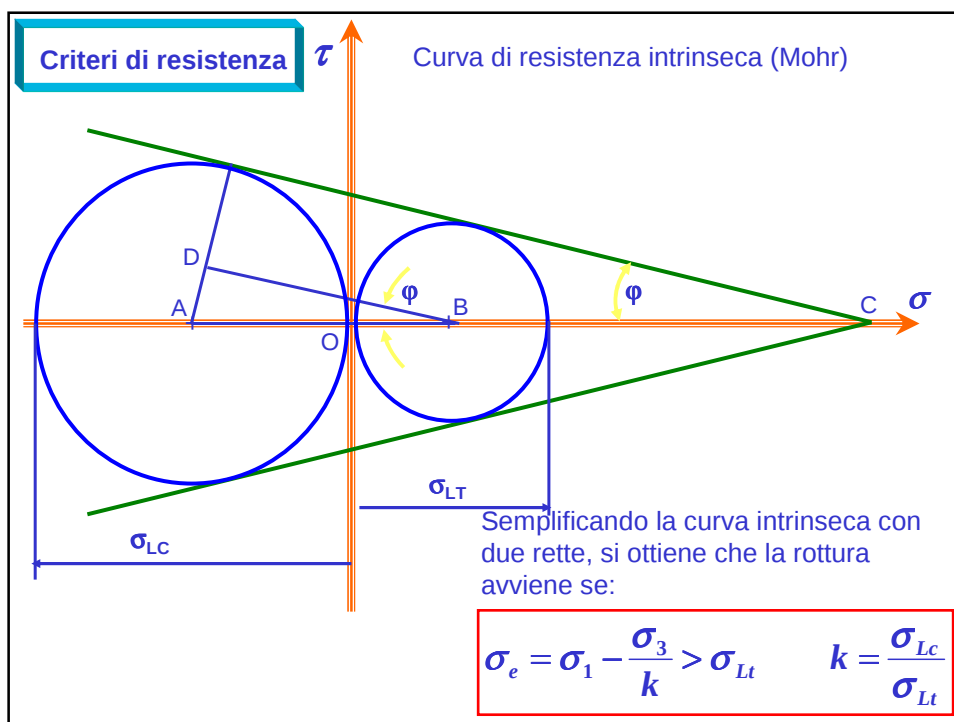
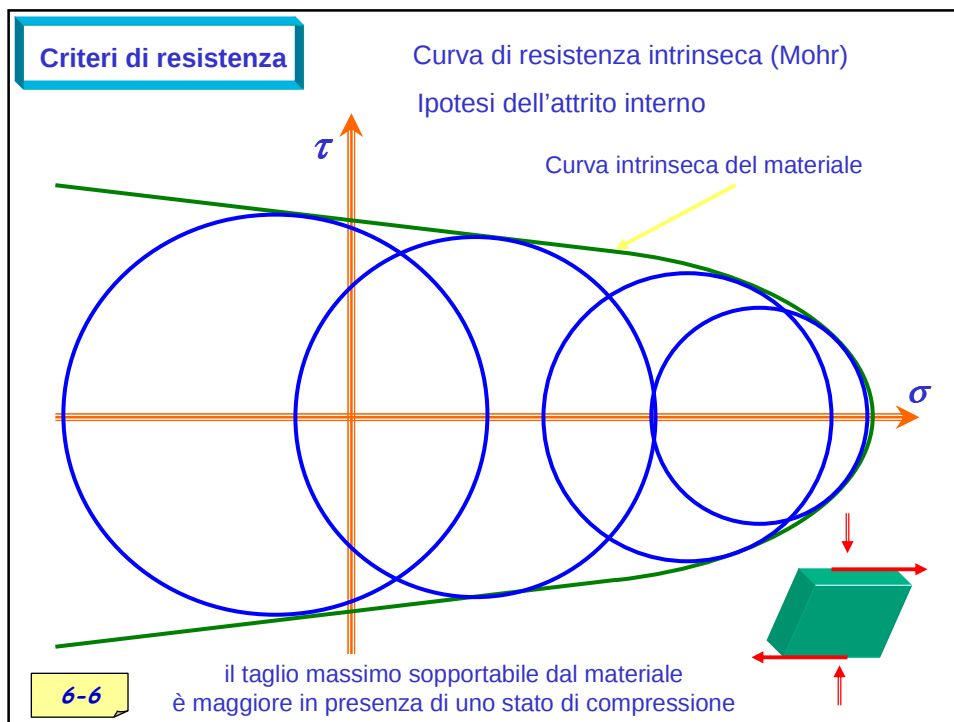
Criteri di resistenza

Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)



superficie critica definita dal criterio di Tresca nello spazio delle tensioni principali

Nello spazio delle tensioni principali la superficie critica è un prisma a sezione esagonale indefinito. L'asse coincide con la trisettrice.

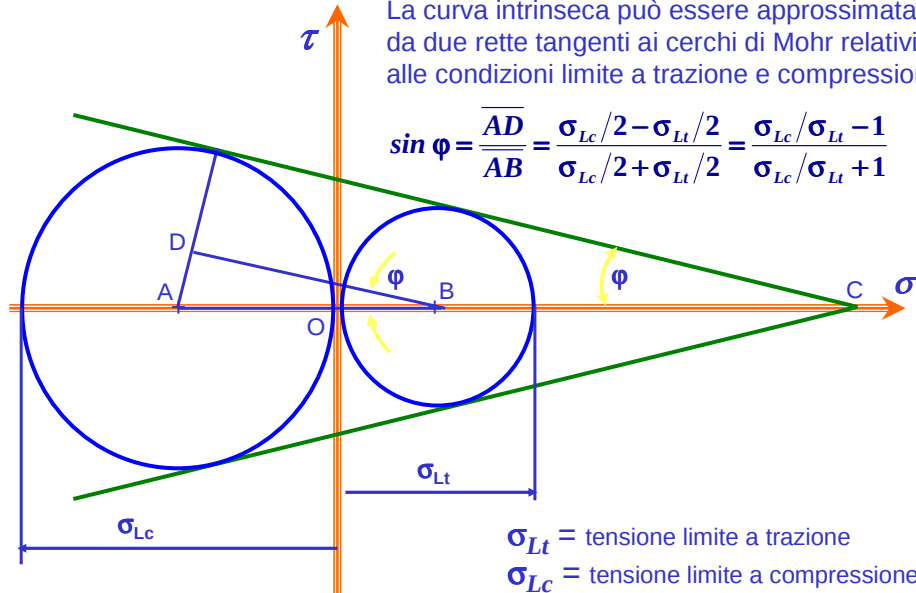


Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

La curva intrinseca può essere approssimata da due rette tangenti ai cerchi di Mohr relativi alle condizioni limite a trazione e compressione

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sigma_{Lc}/2 - \sigma_{Lt}/2}{\sigma_{Lc}/2 + \sigma_{Lt}/2} = \frac{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} - 1}{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} + 1}$$

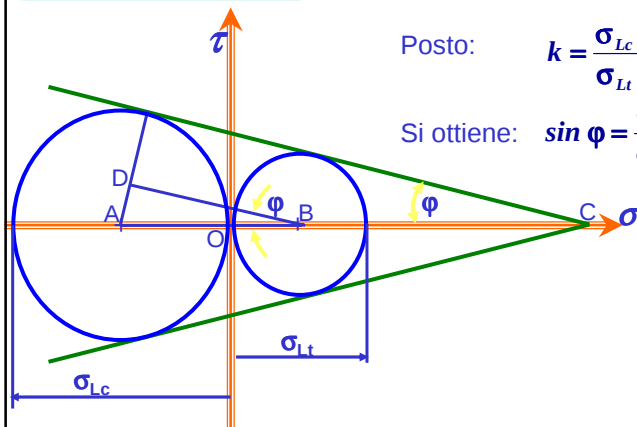


Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Posto: $k = \frac{\sigma_{Lc}}{\sigma_{Lt}}$

Si ottiene: $\sin \varphi = \frac{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} - 1}{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} + 1} = \frac{k - 1}{k + 1}$

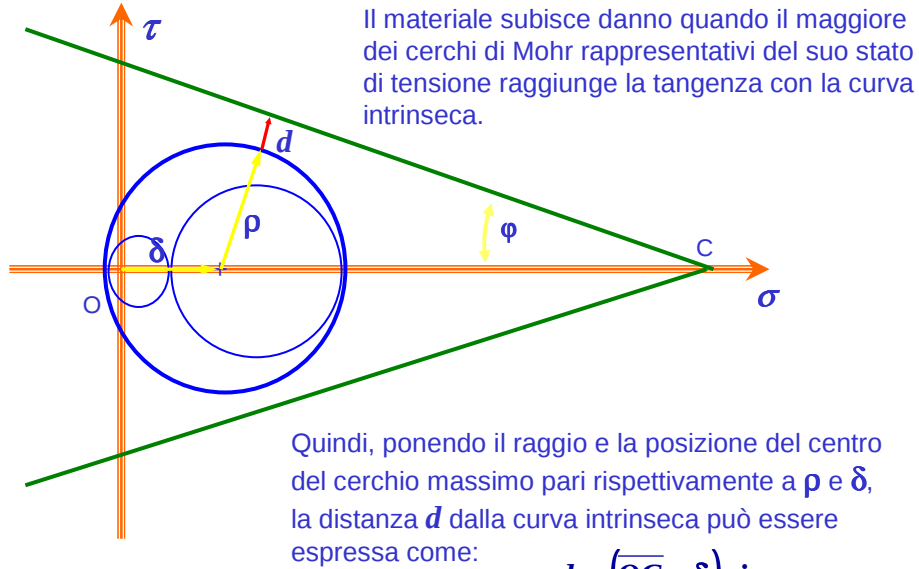


Quindi si può esprimere la lunghezza del segmento OC in funzione di k e σ_{Lt} :

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \frac{\sigma_{Lt}}{2} + \frac{\sigma_{Lt}}{2 \sin \varphi} = \frac{\sigma_{Lt}}{2} \left(1 + \frac{k-1}{k+1} \right) = \sigma_{Lt} \frac{k}{k-1}$$

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)



Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Ricordando le espressioni di $\overline{OC}$, $\sin \varphi$, ρ e δ ,

$$\overline{OC} = \sigma_{Lt} \frac{k}{k-1}, \quad \sin \varphi = \frac{k-1}{k+1}, \quad \rho = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \delta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

l'espressione di d per uno stato di tensione triassiale diventa:

$$\begin{aligned} d &= (\overline{OC} - \delta) \sin \varphi - \rho = \left(\sigma_{Lt} \frac{k}{k-1} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \frac{k-1}{k+1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \\ &= \frac{1}{k+1} [k(\sigma_{Lt} - \sigma_1) + \sigma_3] \end{aligned}$$

Per uno stato di tensione monoassiale, l'espressione precedente diventa:

$$d_a(\sigma_1) = d(\sigma_1, 0, 0) = \frac{k}{k+1} (\sigma_{Lt} - \sigma_1)$$

Si può, quindi, ricavare il valore della tensione equivalente dalla relazione:

$$\sigma_e = \sigma_1 = d_a^{-1}[d(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$$

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Ne segue che:

$$\sigma_e = \sigma_1 = d_a^{-1}[d(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)] = \sigma_{Lt} - \frac{k+1}{k} \left\{ \frac{1}{k+1} [k(\sigma_{Lt} - \sigma_1) + \sigma_3] \right\} =$$

$$= \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k}$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k} > \sigma_L$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = \frac{k+1}{k} \tau_{xy}$$

torsione + trazione:

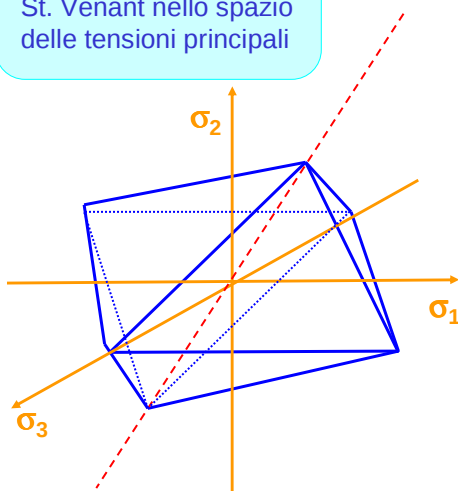
$$\sigma_e = \frac{k-1}{2k} \sigma_x + \frac{k+1}{2k} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Criteri di resistenza

Massima deformazione normale (de St. Venant)

Il materiale subisce danno quando la massima deformazione principale raggiunge un valore critico.

superficie critica
definita dal criterio di
St. Venant nello spazio
delle tensioni principali



Nel caso triassiale si ha:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] > \epsilon_L$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] < -\epsilon_L$$

Nel caso monoassiale si ha:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} > \epsilon_L$$

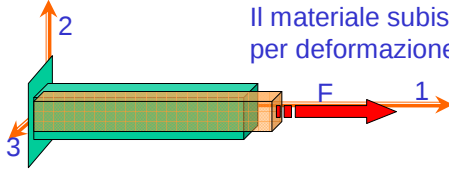
Dal confronto si ottiene
che si ha rottura se:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_e &= |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| \end{aligned} \right\} > \sigma_L$$

Criteri di resistenza

Massima energia di deformazione (Beltrami)

Il materiale subisce danno quando l'energia accumulata per deformazione raggiunge un valore critico.



In campo elastico, per la trazione semplice, l'energia di deformazione per unità di volume vale : $U_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1$

Nel caso triassiale si avrà quindi:

$$U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

Avendosi dallo studio della relazione tensione-deformazione in campo elastico che:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \quad \epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Si potrà scrivere l'energia di deformazione totale come:

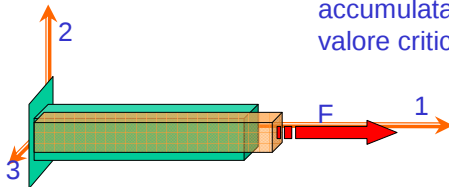
$$U_{tot} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_1 \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \sigma_3 \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)]$$

Criteri di resistenza

Massima energia di deformazione (Beltrami)

Il materiale subisce danno quando l'energia accumulata per deformazione raggiunge un valore critico.



Nel caso triassiale si ha:

$$U_s = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

Nel caso monoassiale si ha: $U_s = \frac{1}{2E} \sigma_1^2$

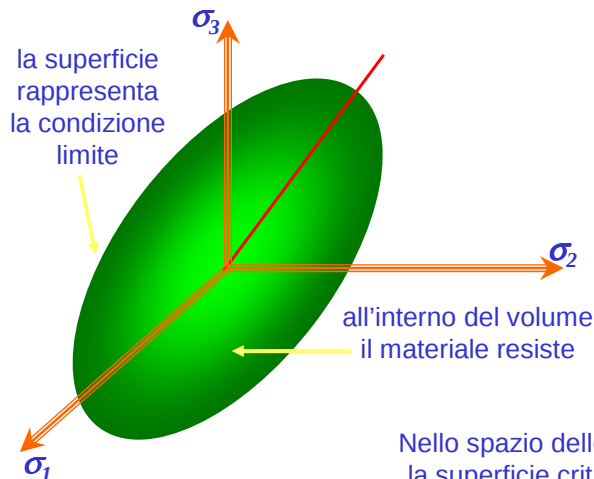
Dal confronto si ottiene che si ha rottura se:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)} > \sigma_L$$

Criteri di resistenza

Massima energia di deformazione (Beltrami)

all'esterno del volume c'è rottura

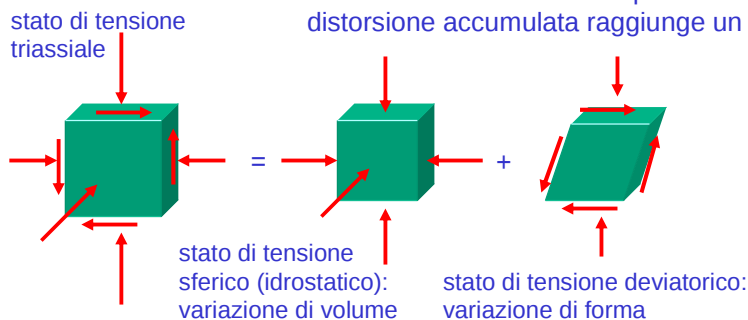


Nello spazio delle tensioni principali la superficie critica è un ellissoide. L'asse coincide con la trisettrice.

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

Il materiale subisce danno quando l'energia di distorsione accumulata raggiunge un valore critico.



L'energia di distorsione nel caso triassiale si può scrivere:

$$U_{dist} = \frac{(1+\nu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

Nel caso monoassiale si ha: $U_{dist} = \frac{(1+\nu)}{3E} \sigma_1^2$

Si ha rottura se: $\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} > \sigma_L$

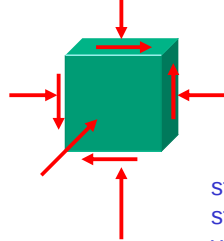
6-5

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

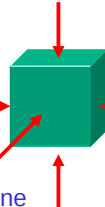
Il materiale subisce danno quando l'energia di distorsione accumulata raggiunge un valore critico.

stato di tensione triassiale



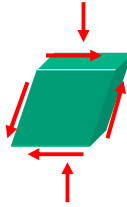
=

stato di tensione sferico (idrostatico):
variazione di volume



+

stato di tensione deviatorico:
variazione di forma



Stato di tensione triassiale:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= S + \sigma_1^d \\ \sigma_2 &= S + \sigma_2^d \\ \sigma_3 &= S + \sigma_3^d\end{aligned}$$

Componente idrostatica:

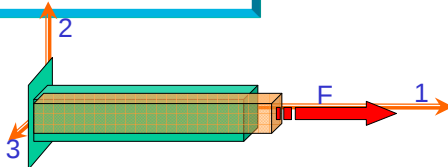
$$S = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Componenti deviatoriche:

$$\begin{aligned}\sigma_1^d &= \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ \sigma_2^d &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \\ \sigma_3^d &= \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}\end{aligned}$$

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)



In campo elastico, per la trazione semplice, l'energia di deformazione per unità di volume vale : $U_1 = \frac{1}{2} \sigma_1 \epsilon_1$

Nel caso triassiale si avrà quindi:

$$U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

Avendosi dallo studio della relazione tensione-deformazione in campo elastico che:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \quad \epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Si potrà scrivere l'energia di deformazione totale come:

$$\begin{aligned}U_{tot} &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_1 \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \sigma_3 \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)]\end{aligned}$$

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

Quindi, per uno stato di tensione triassiale l'energia totale di deformazione vale:

$$U_{tot} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

La parte dovuta alla componente sferica dello stato di tensione varrà:

$$U_{sf} = \frac{1}{2E} [S^2 + S^2 + S^2 - 2\nu(S^2 + S^2 + S^2)] = \frac{3(1-2\nu)}{2E} S^2$$

Ricordando l'espressione di S si ottiene:

$$U_{sf} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} S^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2$$

Quindi, per differenza si ottiene l'energia di distorsione:

$$U_{dist} = U_{tot} - U_{sf}$$

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

$$U_{dist} = U_{tot} - U_{sf} =$$

$$= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] - \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2$$

Che può essere scritta nella forma:

(la stessa espressione poteva essere ricavata introducendo le componenti deviatoriche dello stato di tensione nell'espressione dell'energia di deformazione)

$$U_{dist} = \frac{(1+\nu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]$$

Nel caso in cui solo σ_1 sia diversa da zero si avrà:

$$U_{ass\ dist}(\sigma_1) = U_{dist}(\sigma_1, 0, 0) = \frac{(1+\nu)}{6E} [(\sigma_1)^2 + (\sigma_1)^2] = \frac{(1+\nu)}{3E} \sigma_1^2$$

Si può, quindi, ricavare l'espressione della tensione equivalente dalla formula:

$$\sigma_e = \sigma_1 = U_{ass\ dist}^{-1} [U_{dist}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$$

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (von Mises)

Quindi:

$$\begin{aligned}\sigma_e = \sigma_1 &= U_{ass\ dist}^{-1} [U_{dist}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)] = \sqrt{\frac{3E}{1+\nu} \left\{ \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \right\}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}\end{aligned}$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} > \sigma_L$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = \sqrt{3} \tau_{xy}$$

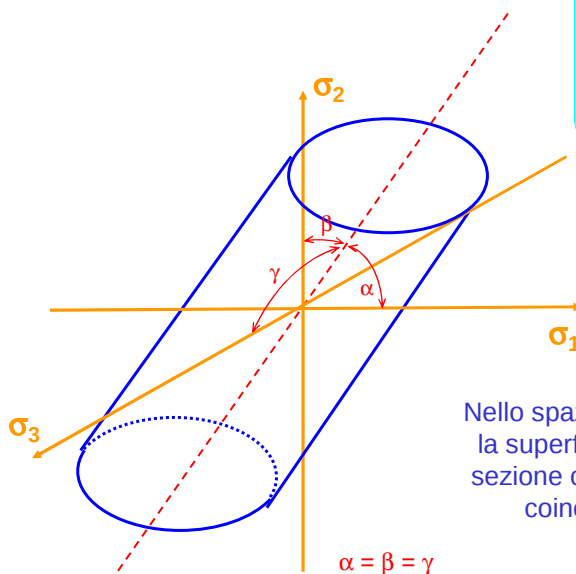
torsione + trazione:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

Criteri di resistenza

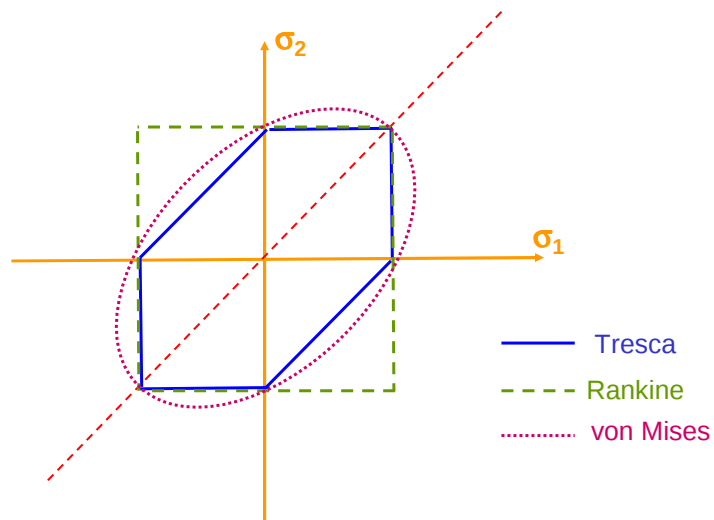
Massima energia di distorsione (von Mises)

superficie critica definita dal criterio di von Mises nello spazio delle tensioni principali



Criteri di resistenza

Confronto tra le varie teorie per un stato di tensione piano



Criteri di resistenza

Confronto tra le varie teorie sulla base del rapporto caratteristico σ_L/τ_L

- Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier) _____ 1
- Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest) _____ 2
- Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr) _____ 1.25÷2
- Massima deformazione normale (Poncelet-de St. Venant-Grashof) _____ 1.25
- Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig) _____ 1.61
- Massima energia di distorsione (Huber-von Mises-Hencky) _____ 1.73

Valori sperimentali di σ_L/τ_L
>

 Materiali fragili = 1 ÷ 1.25
 Materiali duttili = 1.75 ÷ 1.80

Criteri di resistenza: riepilogo

Massima tensione normale (Rankine)

$$\sigma_e = \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_{Lt} \\ \sigma_3 < \sigma_{Lc} \end{cases}$$

Massima tensione tangenziale (Tresca)

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_L$$

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

$$\sigma_e = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k} > \sigma_{Lt} \quad k = \frac{\sigma_{Lc}}{\sigma_{Lt}}$$

Massima def. normale (de St. Venant)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \sigma_e &= |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| \end{aligned} \right\} > \sigma_L$$

Massima energia di def. (Beltrami)

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} > \sigma_L$$

Massima energia di distorsione (von Mises)

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} > \sigma_L$$