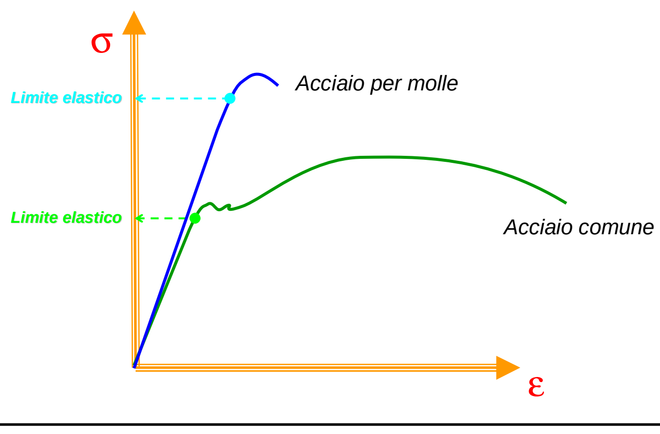
Molle

Generalità: materiali

Materiali per la costruzione delle molle:

- acciai ad alto tenore di carbonio
- acciai al silicio
- acciai legati (Cromo-Silicio, Cromo-Vanadio, Silicio-Cromo-Nichel)
- per impieghi particolari si usano anche: acciai inox, leghe Rame-Berillio, ecc.

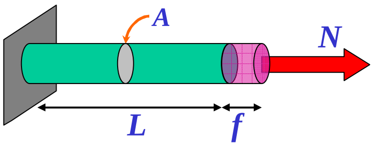


Generalità: tipologie ed equazioni fondamentali

Relazione caratteristica carico-freccia:

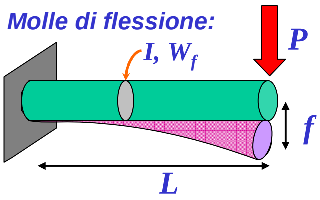
Relazione di resistenza:

Molle di trazione:



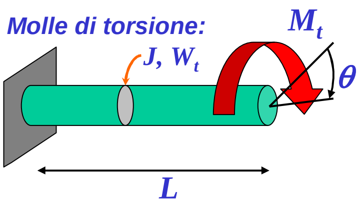
$$N = \underbrace{\boxed{\frac{EA}{L}}}_{\text{rigidezza } k} f \qquad \sigma = \frac{N}{A}$$

Molle di flessione:



$$P = \underbrace{\boxed{\frac{3EI}{L^3}}}_{\text{rigidezza } k} f \qquad \sigma_{\max} = \frac{PL}{W_f}$$

Molle di torsione:



$$M_t = \underbrace{\boxed{\frac{GJ}{L}}}_{\text{rigidezza } k} \theta \qquad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

Generalità: coefficiente di utilizzo

Si definisce coefficiente di utilizzo C_u il rapporto:

$$C_u = \frac{\text{Energia effettivamente immagazzinata nella molla}}{\text{Energia teoricamente immagazzinabile se tutto il materiale fosse alla } \sigma \text{ massima}} = \frac{\frac{1}{2} P f}{\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} V}$$

Molle di trazione: $C_u = 1$

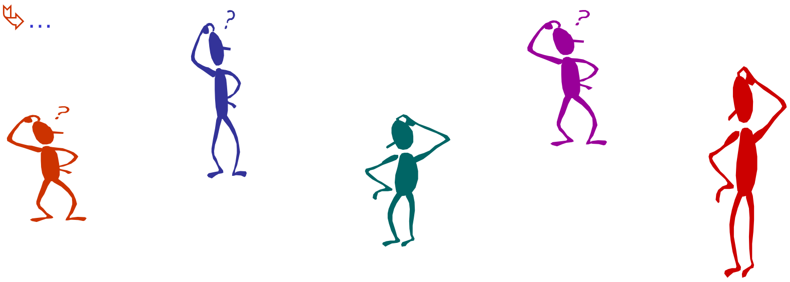
Molle di flessione: $C_u = \frac{1}{9}$ *(lamina rettangolare)*

Molle di torsione: $C_u = \frac{1}{2}$ *(barra cilindrica)*

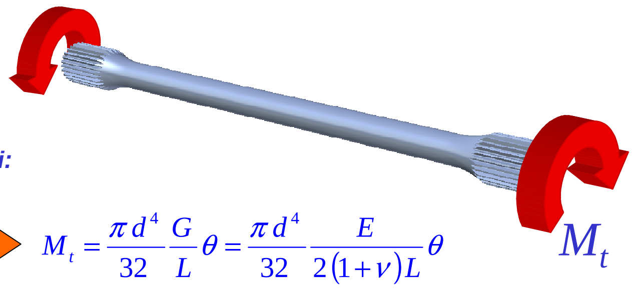
Progetto di una molla

Variabili in gioco:

- resistenza statica e/o a fatica
- rigidezza richiesta (relazione carico-freccia)
- ingombro e peso
- frequenza propria del sistema
- instabilità a compressione
- comportamento non lineare (molle “dure” e “soffici”)
- smorzamento
- …



Molle di torsione ad asse rettilineo: barre di torsione



Relazioni fondamentali:

$$M_t = k\theta \quad \Rightarrow \quad M_t = \frac{\pi d^4}{32}\frac{G}{L}\theta = \frac{\pi d^4}{32}\frac{E}{2(1+\nu)L}\theta$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}$$

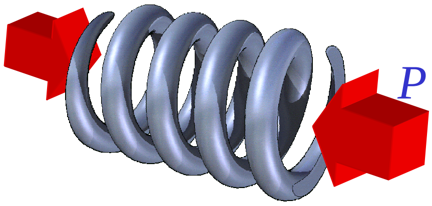
Una volta scelta la classe del materiale con cui realizzare la barra, che ci vincola il valore di G, le dimensioni d ed L sono fissate sulla base degli ingombri e della rigidezza richiesti utilizzando la relazione carico-freccia.
Segue la verifica a resistenza (statica o a fatica) che viene fatta impiegando gli usuali criteri adottati per il dimensionamento dei componenti meccanici.
Alle molle si applicano, in genere, coefficienti di sicurezza X di poco superiori a 1.

Molle di torsione ad asse non rettilineo: molle elicoidali

Relazioni fondamentali:

Dalle relazioni valide per le barre di torsione, sapendo che:

$$M_t = P\frac{D}{2} \quad , \quad f = \theta\frac{D}{2}$$



si ottiene:

$$P = k\,f \quad \Rightarrow \quad P \cong \frac{2}{D}\left(\frac{\pi d^4}{32}\frac{G}{L}\right)\frac{2}{D}f = \frac{\pi d^4 G}{8 D^2 L}f = \frac{d^4 E \cos\alpha}{16(1+\nu)\,n\,D^3}f$$

in cui:

L è stata posta uguale a $n\pi D/\cos\alpha$ $\begin{cases} n = \text{numero spire attive} \\ D = \text{diametro della spirale} \\ \alpha = \text{angolo della spirale} \end{cases}$

G è stato sostituito con $\dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Si noti che gli effetti dovuti alla curvatura del tondino con cui è costruita la spirale sono stati qui trascurati. Infatti, una molla che abbia il rapporto D/d (detto indice della molla) piccolo risulta avere una rigidezza maggiore di quella espressa dalla formula riportata.

Molle di torsione ad asse non rettilineo: molle elicoidali

Relazioni fondamentali:

$$\tau_{\max} \cong \frac{P\,D/2}{W_t} + \frac{4}{3}\frac{P}{A/\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{16\cos\alpha}{3}\frac{P}{\pi d^2} =$$

$$= \frac{8PD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{2\cos\alpha}{3}\frac{d}{D}\right)$$

- Il coefficiente $\frac{2}{3}\cos\alpha$ è spesso approssimato a *0,5*; in questo modo si tiene conto della ridistribuzione delle tensioni che si ottiene plasticizzando localmente il materiale.
- Anche in questo caso sono stati trascurati gli effetti dovuti alla curvatura della spirale. Infatti, quando una trave curva è sollecitata a torsione il suo lembo interno risulta più sollecitato di quello esterno.
- La concentrazione delle tensioni dovuta alla curvatura dell’elica non può essere trascurata nella progettazione delle molle che lavorano a fatica, per cui la formula precedente deve essere così corretta:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(\frac{4 - d/D}{4(1-d/D)} + \frac{2\cos\alpha}{3}\frac{d}{D}\right)$$

Progetto di molle elicoidali

Nel progetto di una molla elicoidale le variabili in gioco sono:

per il materiale:

- $E,\ \nu$ → in genere sono sempre le costanti elastiche dell'<u>acciaio</u>
- σ_L → vale σ_S/X nella progettazione statica (X può essere molto prossimo a 1 specialmente per le molle compresse)
  → nel dimensionamento a fatica, $\sigma_{a\ eq}$ e $\sigma_{m\ eq}$ vanno confrontate con la retta di <u>Goodman</u> (nella maggior parte dei casi applicativi b_1 e b_2 possono essere posti uguali ad $\mathbf{1}$)

per la geometria:

- $d,\ D$ → il rapporto D/d dovrebbe essere maggiore di $3 \div 4$
- h_0 → l'altezza "libera" è vincolata dai problemi di instabilità a compressione
- h_p → l'altezza "a pacchetto" è data da $n_{tot}d$, dove il numero totale di spire n_{tot} è dato da n (spire attive) più 1 o 2 a seconda del tipo di terminazioni
- α → l'angolo dell'elica è in genere scelto $< 15°$

per i carichi:

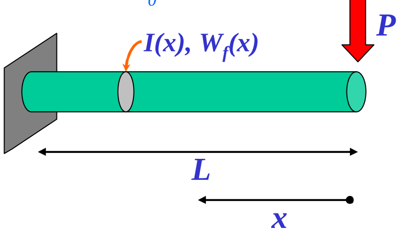
- $P_{min},\ P_{max}$ → valori del carico agli estremi del campo di lavoro

Molle di flessione: balestre

Relazioni fondamentali:

$$P = \frac{3EI}{L^3} f \qquad \sigma_{\max} = \frac{PL}{W_f}$$

Poiché le molle di flessione a sezione costante risultano avere un coefficiente di utilizzo molto basso, queste sono in genere realizzate cercando di portare la tensione massima su ciascuna sezione al valore massimo ammissibile.
Quindi, introducendo la coordinata x, potremo ricavare la legge di variazione del modulo di resistenza W_f che porta la σ_{max} di ciascuna sezione al valore massimo ammissibile σ_0.



$$\sigma_{\max}(x) = \frac{P\,x}{W_f(x)} = \sigma_0 = cost$$

Molle di flessione: balestre

Nel caso tecnicamente più significativo di lamine a sezione rettangolare, avremo:

$$\frac{P\,x}{\dfrac{b(x)\,h^2(x)}{6}} = \sigma_0$$

Indicando con b_0 e h_0 le dimensioni della sezione di incastro:

$$\frac{P\,x}{\dfrac{b(x)\,h^2(x)}{6}} = \sigma_0 = \frac{P\,L}{\dfrac{b_0\,h_0^2}{6}}$$

da cui segue:

$$b(x)\,h^2(x) = \frac{x}{L} b_0\,h_0^2$$

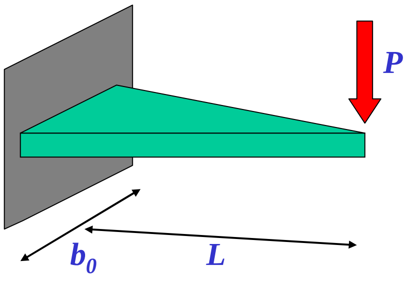
Quindi ipotizzando di voler variare solo b o solo h, la sezione della lamina dovrà seguire una delle seguenti leggi di variazione:

$$b(x) = \frac{x}{L} b_0 \quad , \quad h(x) = h_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$$

Molle di flessione: balestre

$$b(x) = \frac{x}{L} b_0 \quad , \quad h(x) = h_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$$

La prima delle due leggi di variazione porta allo schema di molla di flessione a lamina triangolare:



per la quale valgono le seguenti relazioni fondamentali:

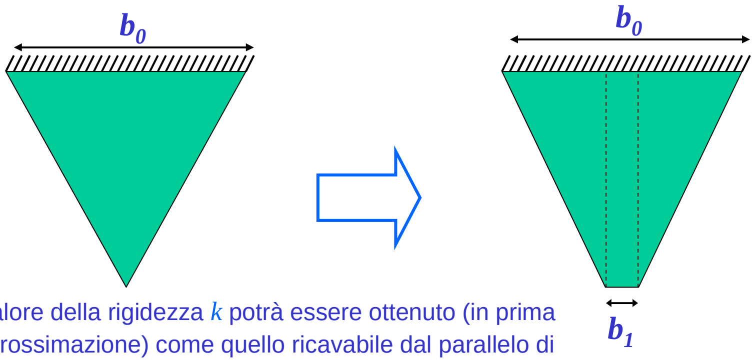
$$P = \frac{E\,b_0\,h_0^3}{6\,L^3} f$$

$$\sigma_{max} = \frac{6\,P\,L}{b_0\,h_0^2}$$

$$C_u = \frac{1}{3}$$

Molle di flessione: balestre

Nella pratica costruttiva si passa dalla forma triangolare a quella trapezoidale per rendere possibile l'applicazione del carico all'estremità libera:



Il valore della rigidezza k potrà essere ottenuto (in prima approssimazione) come quello ricavabile dal parallelo di una molla triangolare con una rettangolare:

$$k = k_{tri} + k_{rett} = \frac{E\,(b_0 - b_1)h_0^3}{6\,L^3} + \frac{E\,b_1 h_0^3}{4\,L^3} = \frac{E\,h_0^3}{6\,L^3}\left(b_0 + \frac{b_1}{2}\right)$$

Molle di flessione: balestre

Inoltre le molle di flessione a lamina trapezoidale non vengono realizzate in questa forma, ma sovrapponendo più lamine rettangolari di lunghezza decrescente. Queste si possono pensare ricavate dalla lamina originaria attraverso una serie di tagli longitudinali. Si arriva così alla molla a balestra.