CORSO DI ELEMENTI COSTRUTTIVI DELLE MACCHINE
(NUOVO ORDINAMENTO)

ESAME DEL 9 DICEMBRE 2002

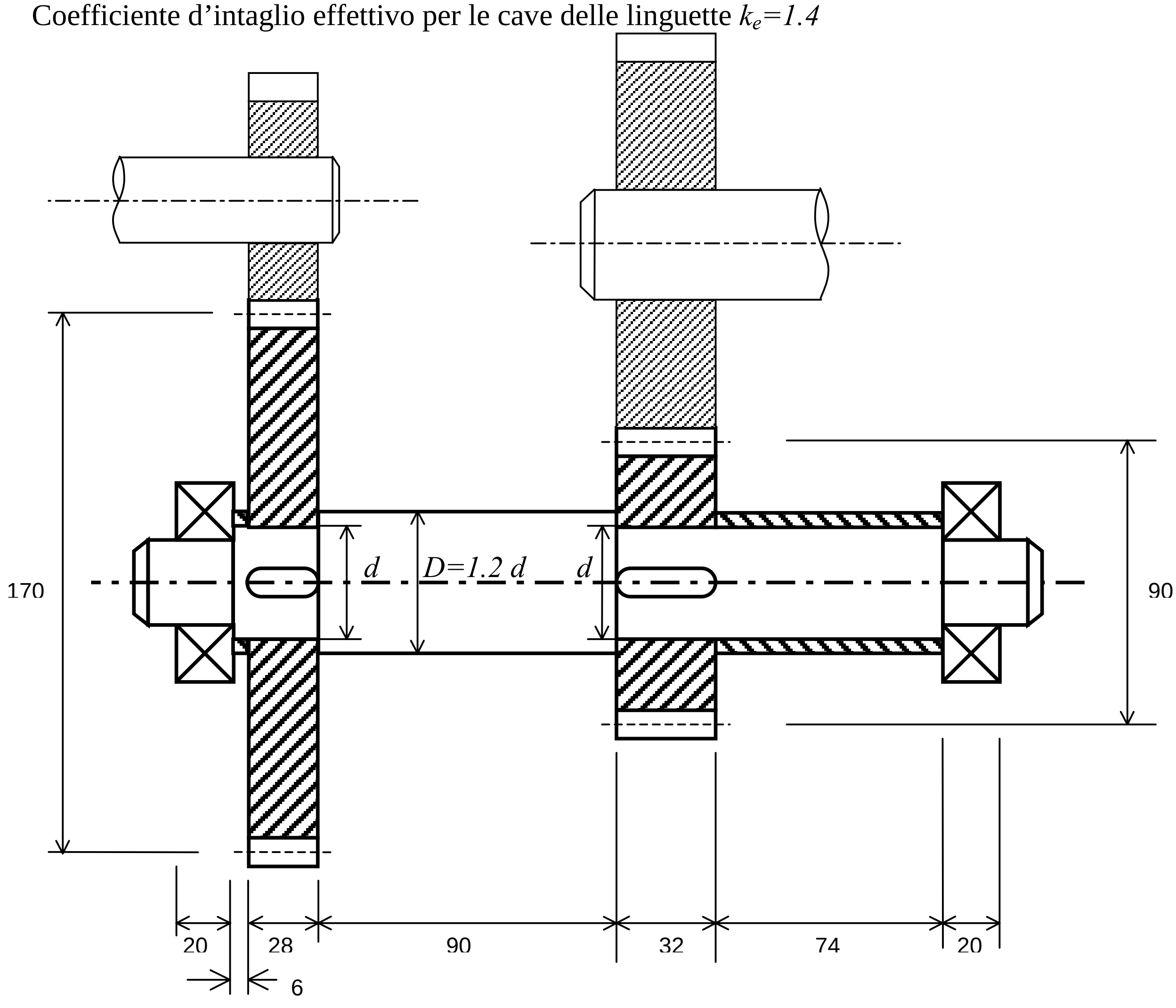
In figura è mostrato lo spaccato di un riduttore meccanico ad ingranaggi a denti dritti. L'albero intermedio di tale riduttore è stato progettato per trasmettere una potenza di $P_1=14\ kW$ alla velocità di rotazione $n=115$ *giri/minuto* in modo che la sua sezione più sollecitata possa sopportare un numero infinito di cicli con un coefficiente di sicurezza $X_1=1.25$.
In queste condizioni di lavoro, il riduttore in questione viene fatto lavorare per un tempo $h_1=15$ *ore*. Successivamente, ne vengono cambiate destinazione d'uso e condizioni operative. In particolare, la potenza trasmessa viene aumentata del 20% ($P_2=16.8\ kW$), mentre la velocità di rotazione è mantenuta inalterata. Inoltre viene richiesto che la sezione più sollecitata dell'albero lavori ad un coefficiente di sicurezza $X_2=1.4$.

Si valuti nell'ordine:

1. il diametro d dell'albero che soddisfa le specifiche della prima fase di lavoro (si scelgano a piacimento i valori più opportuni da dare al raggio d'intaglio e alla finitura superficiale);
2. il numero di ore h_2 che lo stesso albero può sopportare in sicurezza una volta portato a lavorare nelle condizioni della seconda fase;

Dati:

Materiale: $\sigma_R=880\ MPa$, $\sigma_S=720\ MPa$, $\sigma_{LF}=390\ MPa$.
Angolo di pressione: $\theta=20°$.
Coefficiente d'intaglio effettivo per le cave delle linguette $k_e=1.4$

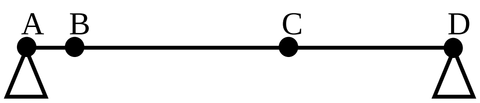


SOLUZIONE

Dalla potenza trasmessa si ricava il momento torcente M_t:

$$M_t = \frac{P}{\omega} = 1162\ Nm \qquad \text{essendo: } \omega = \frac{2\pi\, n}{60} = 12.04\ rad/s$$

e, dopo aver schematizzato l'albero come trave isostatica su appoggi,



dall'equilibrio alla rotazione si ricavano le componenti circonferenziali delle forze di contatto scambiate dalle dentature delle ruote calettate in B e C di raggio $r_B=0.085\ m$ e $r_C=0.045\ m$:

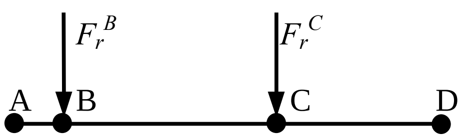
$$M_t = F_c^B r_B = F_c^C r_C \qquad \Rightarrow \qquad F_c^B = 13.68\ kN, \quad F_c^C = 25.84\ kN$$

Dalle componenti circonferenziali si calcolano quelle radiali:

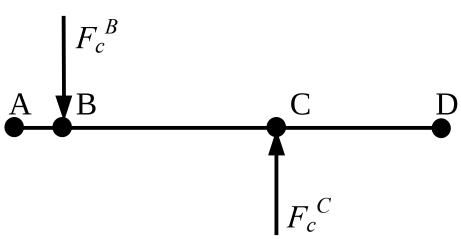
$$F_r^B = F_c^B \tan\theta = 4.98\ kN, \qquad F_r^C = F_c^C \tan\theta = 9.4\ kN$$

Le componenti radiali e circonferenziali agiscono sull'albero come segue:

Piano verticale (piano su cui giacciono gli assi dei tre alberi del riduttore):



Piano orizzontale:



È evidente che la sezione C è la più sollecitata (a parità di geometria entrambe le componenti della forza di contatto sono maggiori di quelle in B e CD è maggiore di AB). Ne segue che tutte le verifiche verranno effettuate solo nella sezione C.

La componente del momento flettente sul piano verticale vale:

$$M_{f\ vert}^C = F_r^B \frac{\overline{AB}\,\overline{CD}}{\overline{AD}} + F_r^C \frac{\overline{AC}\,\overline{CD}}{\overline{AD}} = 624\ Nm$$

quella sul piano orizzontale vale:

$$M_{f\ oriz}^C = F_c^B \frac{\overline{AB}\,\overline{CD}}{\overline{AD}} - F_c^C \frac{\overline{AC}\,\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1386\ Nm$$

Complessivamente il momento flettente vale:

$$M_f^C = \sqrt{{M_{f\,oriz}^C}^2 + {M_{f\,vert}^C}^2} = 1520\ Nm$$

I momenti flettente e torcente portano alle seguenti sollecitazioni sulla sezione C:

$$\sigma_{\min} = -\frac{M_f^C}{W_f} \qquad \sigma_{\max} = \frac{M_f^C}{W_f} \quad \text{(flessione rotante)} \qquad \tau_{\min} = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{(torsione statica)}$$

da cui si possono ricavare le componenti equivalenti della sollecitazione a fatica applicando, ad esempio, il criterio proposto dal testo di Juvinall:

$$\sigma_{m\,eq} = \left|\frac{M_t}{W_t}\right|, \qquad \sigma_{a\,eq} = \left|k_e \frac{M_f^C}{W_f}\right|$$

Ipotizzando per il diametro d ed il raggio d'intaglio r i valori di primo tentativo *50 mm* e *2 mm*, si ricavano dalle tabelle k_t e q:

$$D/d = 1.2, \quad r/d = 0.04 \quad \Rightarrow \quad k_t^{spallamento} = 2, \quad q = 0.9 \quad \Rightarrow \quad k_e^{spallamento} = 1.9$$

considerando anche la presenza della cava della linguetta si otterrà:

$$k_e = k_e^{spallamento} k_e^{linguetta} = 2.66$$

dalla stessa ipotesi su d si avrà anche:

$$b_1 = 0.77$$

e, infine, si sceglierà a piacimento un valore per la finitura superficiale:

$$b_2 = 0.78 \quad \text{(sgrossatura buona)}$$

Ricordandosi che per le sezioni circolari il modulo di resistenza a torsione è due volte quello a flessione, si può scrivere l'espressione della retta di Goodman nella forma segmentaria in funzione della sola incognita W_f:

$$\frac{k_e \frac{M_f^C}{W_f}}{b_1 b_2 \sigma_{LF}} + \frac{\frac{M_t}{2\,W_f}}{\sigma_R} = \frac{1}{X_1} \qquad \Rightarrow \qquad W_f = X_1 \left(\frac{k_e\ M_f^C}{b_1 b_2 \sigma_{LF}} + \frac{M_t}{2\,\sigma_R} \right) = 22.4 \cdot 10^{-6}\ m^3$$

da cui si ricava il diametro incognito d:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\,W_f}{\pi}} = 61\,mm$$

Se si aumenta il raggio d'intaglio a *2.4 mm* e si migliora la finitura superficiale fino a portare b_2 a *0.81* si compensa la sottostima del diametro d senza iterarne il calcolo.

Introducendo il valore calcolato del modulo di resistenza nelle espressioni delle sollecitazioni equivalenti si ottiene:

$$\sigma_{a\,eq} = k_e \frac{M_f^C}{W_f} = 180.5\ MPa \qquad \sigma_{m\,eq} = \frac{M_t}{2\,W_f} = 25.9\ MPa$$

con cui si può fare la verifica rispetto allo snervamento:

$$\frac{\sigma_S}{\sigma_{a\,eq} + \sigma_{m\,eq}} = 3.5 > X_1$$

Nella seconda fase, poiché è richiesto un coefficiente di sicurezza maggiore di quello usato nella progettazione a vita infinita, bisogna considerare che anche le condizioni di lavoro della prima fase portano ad un danneggiamento.
Dalla equazione della retta di Goodman si ricaverà, quindi, la σ_N necessaria a garantire la sicurezza richiesta:

$$\frac{\sigma_{a\,eq}}{b_1 b_2 \sigma_{N_1}} + \frac{\sigma_{m\,eq}}{\sigma_R} = \frac{1}{X_2}$$

da cui:

$$\sigma_{N_1} = \frac{\sigma_{a\,eq}}{b_1 b_2 \left(\frac{1}{X_2} - \frac{\sigma_{m\,eq}}{\sigma_R} \right)} = 439\ MPa$$

approssimando con una retta la curva del Woehler nel tratto di progettazione a tempo si può scrivere:

$$\sigma_{N_1}^m N_1 = \sigma_{LF}^m 10^6 = \sigma_R^m 10^3 \qquad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{\log \frac{\sigma_R}{\sigma_{LF}}} = 8.49, \qquad N_1 = 10^6 \left(\frac{\sigma_{LF}}{\sigma_{N_1}} \right)^m = 366\,200$$

Poiché il numero dei cicli effettivamente compiuti nelle condizioni di sollecitazione della prima fase sono pari a:

$$n_1 = 60\ n\ h_1 = 103\,500$$

il danno secondo Miner varrà:

$$D_1 = \frac{n_1}{N_1} = 0.28$$

Nella seconda fase, essendo la potenza trasmessa aumentata del 20%, dello stesso fattore dovranno essere amplificate le sollecitazioni. Quindi, la σ_N necessaria a garantire la sicurezza richiesta potrà essere calcolata con la formula utilizzata in precedenza con l'aggiunta del fattore *1.2* come segue:

$$\sigma_{N_2} = \frac{1.2\ \sigma_{a\,eq}}{b_1 b_2 \left(\frac{1}{X_2} - \frac{1.2\ \sigma_{m\,eq}}{\sigma_R} \right)} = 532\ MPa$$

$$N_2 = 10^6 \left(\frac{\sigma_{LF}}{\sigma_{N_2}} \right)^m = 71670$$

Applicando ancora la teoria di cumulo del danno di Miner si possono calcolare il numero di cicli rimanenti per portare il pezzo a rottura:

$$n_2 = N_2 \left(1 - \frac{n_1}{N_1} \right) = 51600 \qquad \text{pari a : } h_2^{Miner} = \frac{n_2}{60\, n} = 7.5\, ore$$

Data la non piccola differenza tra N_1 e N_2 è consigliabile applicare la teoria di Manson in sostituzione di quella di Miner anche se, essendo la seconda sollecitazione maggiore della prima, l'applicazione dell'ipotesi di Miner è a favore di sicurezza:

$$N_1^p = 14 N_1^{0.6} = 30504 \qquad N_1^n = N_1 - N_1^p = 335696$$

$$N_2^p = 14 N_2^{0.6} = 11464 \qquad N_2^n = N_2 - N_2^p = 60206$$

Si valuta, quindi, il danno di nucleazione relativo alla prima fase:

$$D_1^n = \frac{n_1}{N_1^n} = 0.31$$

e i cicli necessari a completare la nucleazione:

$$n_2^n = N_2^n \left(1 - D_1^n \right) = 41542$$

a questi si devono aggiungere i cicli relativi alla propagazione per avere il totale dei cicli necessari a portare il pezzo a rottura nelle condizioni di carico della seconda fase:

$$n_2^{tot} = n_2^n + N_2^p = 53000 \qquad \text{pari a : } h_2^{Manson} = \frac{n_2^{tot}}{60\, n} = 7.68\, ore$$