

CORSO DI ELEMENTI COSTRUTTIVI DELLE MACCHINE (NUOVO ORDINAMENTO)

ESAME DELL'11 APRILE 2003

In figura è mostrato lo schema funzionale di un riduttore meccanico ad ingranaggi a denti dritti che trasmette una potenza $P=30\text{ kW}$ alla velocità di rotazione $n=200\text{ giri/minuto}$.

Si chiede di progettare l'albero intermedio di tale riduttore in modo che:

- siano rispettati i vincoli dimensionali indicati,
- le ruote dentate siano dotate di linguetta di bloccaggio,
- tutti gli organi calettati (ruote dentate e cuscinetti) risultino appoggiate ad uno spallamento per garantirne il corretto posizionamento,
- l'intero meccanismo risulti montabile,
- la sezione più sollecitata possa sopportare un numero infinito di cicli con un coefficiente di sicurezza $X=1.75$.

Si indichino, inoltre, i valori scelti per i raggi di raccordo e per la finitura superficiale.

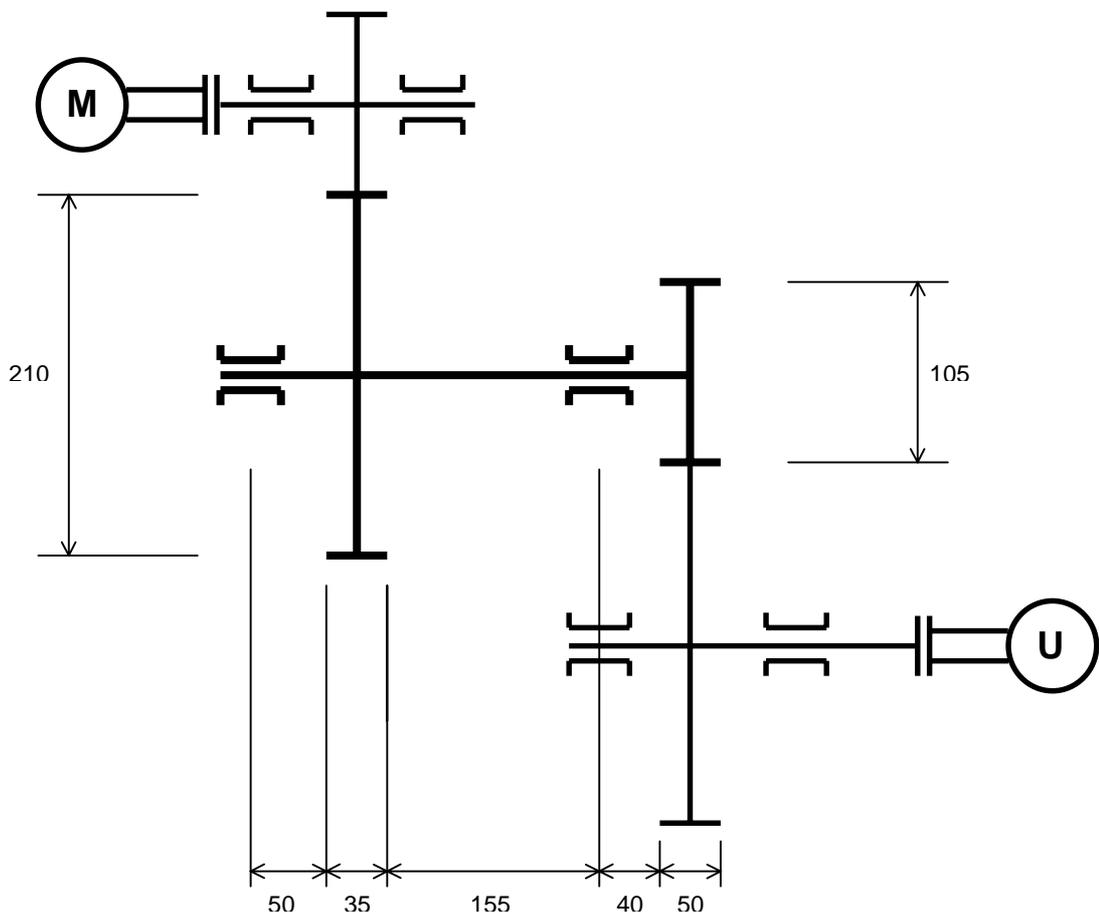
Si esegua, infine, la scelta dei cuscinetti di supporto per una vita L di 10 milioni di cicli.

Dati:

Materiale: $\sigma_R=1080\text{ MPa}$, $\sigma_S=800\text{ MPa}$, $\sigma_{LF}=520\text{ MPa}$.

Angolo di pressione: $\theta = 20^\circ$.

Coefficiente d'intaglio effettivo per le cave delle linguette $k_e=1.4$

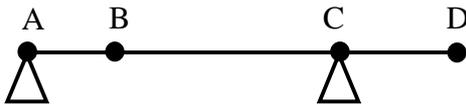


SOLUZIONE

Dalla potenza trasmessa si ricava il momento torcente M_t :

$$M_t = \frac{P}{\omega} = 1432 \text{ Nm} \quad \text{essendo: } \omega = \frac{2\pi n}{60} = 20.94 \text{ rad / s}$$

e, dopo aver schematizzato l'albero come una trave isostatica su appoggi,



dall'equilibrio alla rotazione si ricavano le componenti circonferenziali delle forze di contatto scambiate dalle dentature delle ruote calettate in B e D di raggio $r_B=105 \text{ mm}$ e $r_D=52.5 \text{ mm}$:

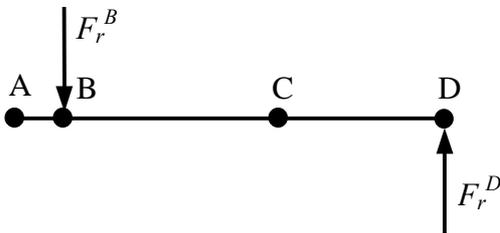
$$M_t = F_c^B r_B = F_c^D r_D \quad \Rightarrow \quad F_c^B = 13.6 \text{ kN}, \quad F_c^D = 27.3 \text{ kN}$$

Dalle componenti circonferenziali si calcolano quelle radiali:

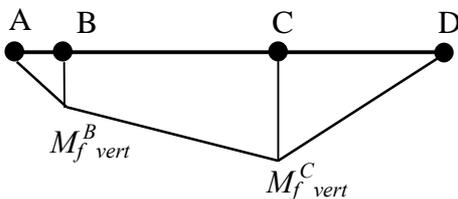
$$F_r^B = F_c^B \tan \theta = 4.95 \text{ kN}, \quad F_r^D = F_c^D \tan \theta = 9.93 \text{ kN}$$

Le componenti radiali e circonferenziali agiscono sull'albero come segue:

Piano verticale (piano su cui giacciono gli assi dei tre alberi del riduttore):



Le spinte radiali generano il seguente diagramma del momento flettente:

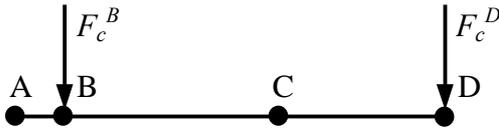


In cui:

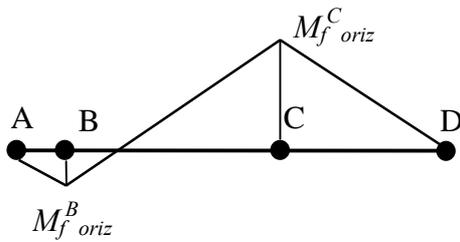
$$M_{f \text{ vert}}^C = F_r^D \overline{CD} = 645 \text{ Nm}$$

$$M_{f \text{ vert}}^B = F_r^B \frac{\overline{AB} \overline{BC}}{\overline{AC}} + M_{f \text{ vert}}^C \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 421 \text{ Nm}$$

Piano orizzontale:



Le spinte circonferenziali generano il seguente diagramma del momento flettente:



In cui:

$$M_{f\ oriz}^C = F_c^D \overline{CD} = 1774\ Nm$$

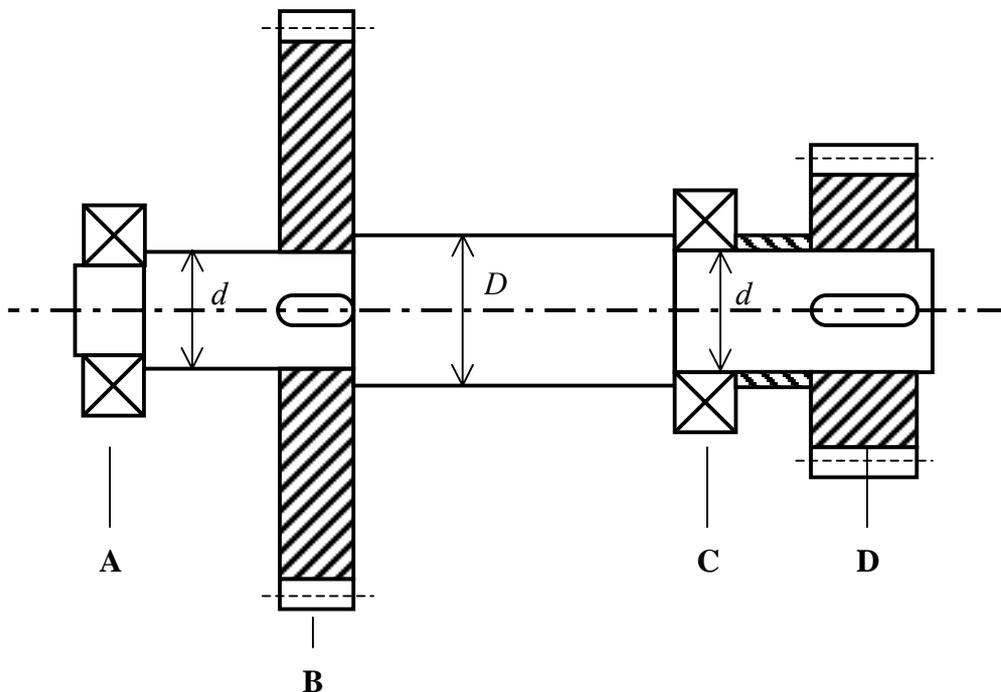
$$M_{f\ oriz}^B = F_c^B \frac{\overline{AB} \overline{BC}}{\overline{AC}} - M_{f\ oriz}^C \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 161\ Nm$$

Ne segue che complessivamente il momento flettente nelle sezioni B e C vale:

$$M_f^B = \sqrt{M_{f\ oriz}^B{}^2 + M_{f\ vert}^B{}^2} = 451\ Nm$$

$$M_f^C = \sqrt{M_{f\ oriz}^C{}^2 + M_{f\ vert}^C{}^2} = 1888\ Nm$$

Dalla conoscenza delle caratteristiche di sollecitazione (momento flettente e torcente) è possibile proporre una prima ipotesi di proporzionamento dell'albero:



In cui si è scelto di calettare le due ruote dentate ed il cuscinetto centrale su sezioni con lo stesso diametro d per rendere confrontabili le condizioni di carico che si hanno in B, C e D.

Le sezioni B e C sono sollecitate dallo stesso momento torcente, mentre il momento flettente in C è circa 4 volte quello in B. Inoltre, va considerato che in B ci sono due intagli, spallamento e cava per linguetta, contro il solo spallamento presente in C. Ora, poiché il coefficiente di intaglio per la linguetta è inferiore a 4, ne segue che la sezione C è più sollecitata della B.

Il confronto tra le sezioni C e D è immediato perché a parità di sollecitazione torcente e numero di intagli, l'andamento del momento flettente (decescente tra C e D) rende la sezione C sicuramente più sollecitata della D.

È anche facile convincersi che la sezione di appoggio in A risulta poco sollecitata. Il suo diametro sarà sicuramente inferiore a quello delle sezioni B, C e D e dovrà essere scelto in modo da limitare l'ingombro del cuscinetto e resistere agli sforzi di taglio.

Progetto della sezione C:

I momenti flettente e torcente portano alle seguenti sollecitazioni sulla sezione C:

$$\sigma_{\min} = -\frac{M_f^C}{W_f} \quad (\text{flessione rotante}) \quad \tau_{\min} = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (\text{torsione statica})$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f^C}{W_f}$$

da cui si possono ricavare le componenti equivalenti della sollecitazione a fatica applicando, ad esempio, il criterio proposto dal testo di Juvinall:

$$\sigma_{meq} = \left| \frac{M_t}{W_t} \right|, \quad \sigma_{aeq} = \left| k_e \frac{M_f^C}{W_f} \right|$$

Ipotizzando per i diametri d e D i valori di primo tentativo di 50 e 55 mm, e per il raggio d'intaglio r il valore 1 mm (valore medio del raggio di raccordo per i cuscinetti di 50 mm di diametro interno), si ricavano dalle tabelle k_t e q e si calcola il k_e per lo spallamento:

$$D/d = \frac{55}{50} = 1.1, \quad r/d = \frac{1}{50} = 0.02 \quad \Rightarrow \quad k_t = 2.5, \quad q = 0.85 \quad \Rightarrow \quad k_e = 2.27$$

dalla stessa ipotesi su d si avrà anche:

$$b_1 = 0.77$$

e, infine, si sceglierà a piacimento un valore per la finitura superficiale:

$$b_2 = 0.75 \quad (\text{sgrossatura buona})$$

Ricordandosi che per le sezioni circolari il modulo di resistenza a torsione è due volte quello a flessione, si può scrivere l'espressione della retta di Goodman nella forma segmentaria in funzione della sola incognita W_f :

$$\frac{k_e \frac{M_f^C}{W_f}}{b_1 b_2 \sigma_{LF}} + \frac{M_t}{2 W_f \sigma_R} = \frac{1}{X} \quad \Rightarrow \quad W_f = X \left(\frac{k_e M_f^C}{b_1 b_2 \sigma_{LF}} + \frac{M_t}{2 \sigma_R} \right) = 26.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

da cui si ricava il diametro incognito d :

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 W_f}{\pi}} = 64.3 \text{ mm}$$

A questo punto è necessario scegliere sul manuale dei cuscinetti quello più adatto con diametro immediatamente superiore a quello calcolato e verificare che le nuove dimensioni soddisfino le specifiche.

Ne segue che d verrà posto pari a 65 mm . Poiché i raggi di raccordo per i cuscinetti di 65 mm variano in un intervallo molto ampio (tra 0.6 e 2.1 mm) è opportuno scegliere subito il cuscinetto che soddisfa la durata richiesta $L = 10$ milioni di cicli.

Dall'equilibrio alla rotazione in A si calcolano le componenti della reazione vincolare R^C sul piano verticale ed orizzontale:

$$R_{vert}^C = \frac{F_r^B \overline{AB} - F_r^D \overline{AD}}{\overline{AC}} = 11.2 \text{ kN}$$

$$R_{oriz}^C = \frac{F_c^B \overline{AB} + F_c^D \overline{AD}}{\overline{AC}} = 38.5 \text{ kN}$$

Da cui:

$$R^C = \sqrt{R_{vert}^C{}^2 + R_{oriz}^C{}^2} = 40.1 \text{ kN}$$

Dalla relazione di verifica dei cuscinetti a sfere imponendo la vita richiesta L , si ottiene:

$$C = R^C \sqrt[3]{L_{10}} = 86400 \text{ N}$$

di conseguenza si selezionerà dal catalogo il cuscinetto radiale rigido a sfere $65 \times 140 \times 33$ che ha un coefficiente di carico dinamico C pari a 92300 N . Dato il notevole ingombro di questo cuscinetto potrebbe essere consigliabile l'utilizzo di cuscinetti a rulli cilindrici.

I raggi di raccordo del cuscinetto scelto sono di 2.1 mm , si adotterà, quindi, nelle verifiche un raggio di intaglio r di 2 mm .

A questo punto, dopo aver calcolato i moduli di resistenza per il diametro $d = 65 \text{ mm}$

$$W_f^{65} = \frac{\pi d^3}{32} = 26.9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_t^{65} = \frac{\pi d^3}{16} = 53.9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

ed il coefficiente di intaglio relativo allo spallamento, avendo posto $D = 76 \text{ mm}$ (dimensione minima consigliata dal catalogo per il cuscinetto scelto),

$$D/d = \frac{76}{65} = 1.17, \quad r/d = \frac{2}{65} = 0.03 \quad \Rightarrow \quad k_t = 2.3, \quad q = 0.87 \quad \Rightarrow \quad k_e = 2.13$$

nonché il coefficiente di riduzione b_1 ,

$$b_1 = 0.73$$

si può effettuare la verifica della sezione C scrivendo l'equazione della retta di Goodman:

$$\frac{1}{k_e \frac{M_f^C}{W_f^{65}} + \frac{M_t}{W_t^{65}}} = X_{\text{effettivo}} \quad \Rightarrow \quad X_{\text{effettivo}} = 1.91 > X_{\text{richiesto}} = 1.75$$

$$\frac{1}{b_1 b_2 \sigma_{LF} + \sigma_R}$$

Poiché questa verifica è positiva resta solo da verificare la sezione C rispetto allo snervamento:

$$\frac{\sigma_S}{\sigma_{a\text{eq}} + \sigma_{m\text{eq}}} = \frac{\sigma_S}{k_e \frac{M_f^C}{W_f^{65}} + \frac{M_t}{W_t^{65}}} = 4.5 > X_{\text{richiesto}}$$

dato che anche questa verifica è ampiamente positiva, viene confermato che i tratti AB e CD dell'albero avranno un diametro di 65 mm mentre il tratto centrale, BC, sarà di 76 mm.

Rimane da dimensionare il tratto di albero su cui è calettato il cuscinetto di supporto in A. Come già accennato questa sezione può essere scelta in modo da limitare l'ingombro del cuscinetto e poi verificata rispetto la sollecitazione a taglio.

Imponendo l'equilibrio alla traslazione si calcolano le componenti della reazione vincolare R^A sul piano verticale ed orizzontale:

$$R_{\text{vert}}^A = F_r^B + R_{\text{vert}}^C - F_r^D = 6.22 \text{ kN}$$

$$R_{\text{oriz}}^A = F_c^B - R_{\text{oriz}}^C + F_c^D = 2.4 \text{ kN}$$

Da cui:

$$R^A = \sqrt{R_{\text{vert}}^A{}^2 + R_{\text{oriz}}^A{}^2} = 6.7 \text{ kN}$$

Dalla relazione di verifica dei cuscinetti a sfere, imponendo la vita richiesta L , si ottiene:

$$C = R^A \sqrt[3]{L_{10}} = 14400 \text{ N}$$

che porta alla individuazione sul catalogo del cuscinetto radiale rigido a sfere 50×80×10 tra i tanti compatibili con la specifica.

Per effettuare la verifica di resistenza bisogna considerare che la sezione di spallamento a destra del cuscinetto è sollecitata da un modesto momento flettente e dal taglio dovuto alla reazione vincolare. Queste sollecitazioni seguono due cicli alterni simmetrici che risultano sfasati di 90° uno rispetto all'altro. Trattare con completezza questo caso richiede l'applicazione di criteri di progettazione a fatica più complessi di quelli fino a qui utilizzati. Nel caso specifico può essere consigliato di trascurare la sollecitazione di flessione considerando, eventualmente, un coefficiente di sicurezza un po' maggiorato.

Considerando solo il carico a taglio T , il ciclo di sollecitazione sulla sezione A sarà caratterizzato dalle seguenti tensioni minime e massime :

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = 0 \quad , \quad \begin{aligned} \tau_{\min} &= -\frac{4}{3} \frac{T}{A} \\ \tau_{\max} &= \frac{4}{3} \frac{T}{A} \end{aligned}$$

da cui si possono ricavare le componenti equivalenti della sollecitazione a fatica applicando un qualsiasi dei criteri per la fatica multiassiale piana:

$$\sigma_{m\,eq} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a\,eq} = \sqrt{3} k'_e \frac{4}{3} \frac{T}{A} = \sqrt{3} k'_e \frac{16}{3} \frac{R^A}{\pi d^2} = 17.6 \text{ MPa}$$

avendo adottando per il raggio di intaglio r il valore 0.5 mm (valore compatibile con il raggio di raccordo del cuscinetto scelto), e avendo ricavato dalle tabelle k'_i e q e calcolato il k'_e relativo allo spallamento:

$$D/d = \frac{65}{50} = 1.3, \quad r/d = \frac{0.5}{50} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad k'_i = 2.5, \quad q = 0.82 \quad \Rightarrow \quad k'_e = 2.23$$

ed essendo

$$b_1 = 0.77 \quad \text{e} \quad b_2 = 0.75 \quad (\text{sgrossatura buona})$$

si può eseguire la verifica:

$$\frac{b_1 b_2 \sigma_{LF}}{\sigma_{a\,eq}} = X_{\text{effettivo}} \quad \Rightarrow \quad X_{\text{effettivo}} = 17 > X_{\text{richiesto}} = 1.75$$

che risulta ampiamente positiva.

A questo punto si può procedere con la stesura del disegno esecutivo dell'albero aggiungendo allo schema proposto in precedenza i dettagli costruttivi e di montaggio, le quote definitive e le indicazioni relative alle lavorazioni meccaniche richieste.