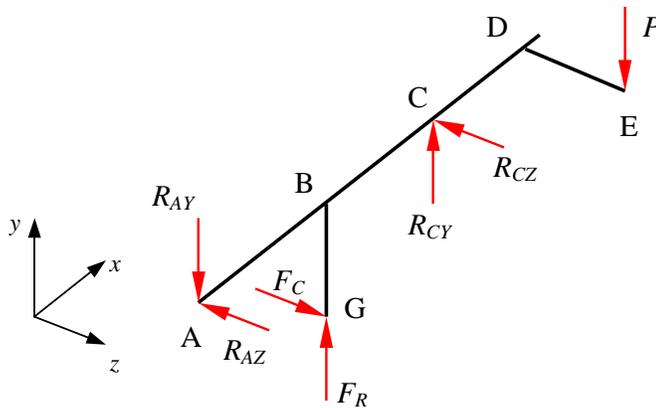


SOLUZIONE

(svolta e redatta da Alessandro Rovardi)

Calcoli preliminari

L'albero da verificare può essere schematizzato come segue:



Avendo indicato con P il carico incognito gravante sulla catena e con F_R e F_C le componenti radiale e circonferenziale della forza di interazione tra vite senza fine e ruota dentata elicoidale, dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse x , segue che:

$$P \overline{DE} = F_C \overline{BG} \Rightarrow F_C = \frac{\overline{DE}}{\overline{GB}} P \Rightarrow F_C = P$$

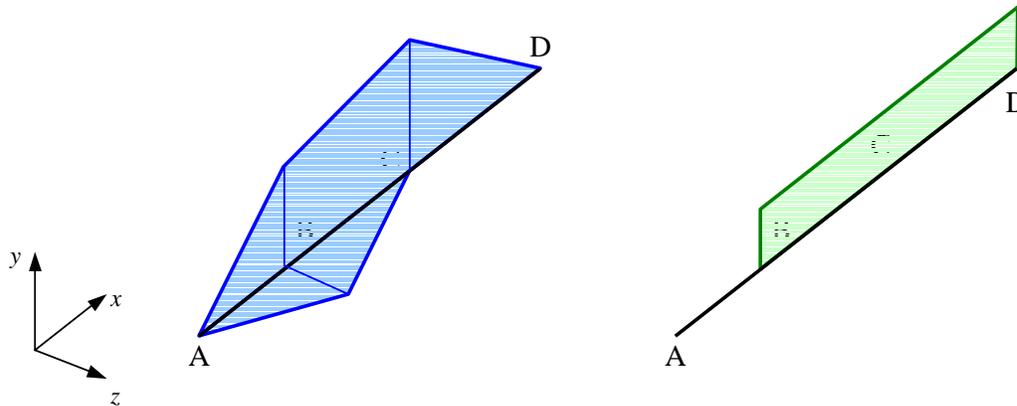
Essendo l'angolo di pressione della ruota dentata $\theta = 20^\circ$ la forza radiale F_R sarà anch'essa esprimibile in funzione del carico sulla catena P :

$$F_R = F_C \tan \theta = P \tan 20^\circ = 0.364P$$

Utilizzando le equazioni cardinali della statica si ottengono le reazioni vincolari nei punti A e C:

$$\begin{cases} -R_{AZ} + F_C - R_{CZ} = 0 \\ F_C \overline{AB} - R_{CZ} \overline{AC} = 0 \\ -R_{AY} + F_R + R_{CY} - P = 0 \\ F_R \overline{AB} + R_{CY} \overline{AC} - P \overline{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AZ} = 0.57P \\ R_{AY} = 0.78P \\ R_{CZ} = 0.43P \\ R_{CY} = 1.42P \end{cases}$$

Che danno luogo ai seguenti diagrammi del momento flettente e torcente:



Verifica statica

Per individuare la sezione più sollecitata è necessario valutare il momento flettente risultante nelle sezioni B e C:

$$M_f^B = \overline{AB} \sqrt{R_{AY}^2 + R_{AZ}^2} = 0.015 \sqrt{0.78^2 + 0.57^2} P = 0.0145P \quad Nm$$

$$M_f^C = \overline{CD} P = 0.02 P \quad Nm$$

Dato che lo stesso momento torcente M_t è presente sia in B che in C, che M_f^C è maggiore di M_f^B e che il diametro della sezione C è minore di quello della sezione B, il calcolo statico verrà fatto in C:

$$\sigma_{\max}^C = \frac{M_f^C}{W_f^C} = \frac{0.02P}{\frac{\pi 0.015^3}{32}} = 60361P \quad Pa$$

$$\tau_{\max}^C = \frac{M_t}{W_t^C} = \frac{0.04P}{\frac{\pi 0.015^3}{16}} = 60361P \quad Pa$$

Utilizzando il criterio di resistenza di Von Mises per uno stato tensionale piano si ottiene:

$$\sigma_{eq}^C = \sqrt{\sigma_{\max}^C{}^2 + 3\tau_{\max}^C{}^2} = 120722P \quad Pa$$

Essendo la tensione ammissibile quella di snervamento ridotta del coefficiente di sicurezza X si ottiene:

$$\sigma_{eq}^C = \sigma_{am} = \frac{\sigma_s}{X} \Rightarrow 120722P = \frac{910 \cdot 10^6}{1.5} \Rightarrow \underline{\underline{P = 5000 N}}$$

Verifica a fatica

Nel caso in cui l'albero lavori a fatica i diagrammi delle sollecitazioni rimangono gli stessi del caso statico. Il ciclo di carico è alterno simmetrico nella sollecitazione normale (flessione rotante) e costante riguardo alle tensioni tangenziali (torsionale statica).

In questo caso devono essere confrontate le sezioni B, C e C' (sezione intermedia tra B e C in corrispondenza della variazione di diametro).

Sezione B:

$$\begin{cases} \sigma_m^B = 0 \\ \sigma_a^B = \frac{M_f^B}{W_f^B} = \frac{0.0145P}{\frac{\pi \cdot 0.018^3}{32}} = 25325P \quad Pa \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_m^B = \frac{M_t}{W_t^B} = \frac{0.04P}{\frac{\pi \cdot 0.018^3}{16}} = 34931P \quad Pa \\ \tau_a^B = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il criterio proposto dal testo di Juvinall per la σ_m^B si ha:

$$\sigma_{m\,eq}^B = \frac{\sigma_m}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{2}\right)^2 + \tau_m^2} = \tau_m = 34931P \quad Pa$$

Mentre la σ_a^B varrà:

$$\sigma_{a\,eq}^B = \sqrt{k_e \sigma_a^2 + 3k_e' \tau_a^2} = k_e \sigma_a = 40520P \quad Pa$$

avendo posto il coefficiente di intaglio effettivo dovuto alla cava della linguetta pari a $k_e = 1.6$

Il numero di cicli richiesto è $N=10^7$ ed il materiale è un acciaio per cui il dimensionamento è a vita infinita ($\sigma_N = \sigma_{LF}$).

Sostituendo i valori equivalenti della sollecitazione nell'equazione della retta di Goodman:

$$\frac{\sigma_{a\,eq}^B}{b_1 b_2 \sigma_N} + \frac{\sigma_{m\,eq}^B}{\sigma_R} = \frac{1}{X}$$

si ottiene un'espressione in cui la sola incognita è P :

$$\frac{40520P}{0.9 \cdot 0.87 \cdot 580 \cdot 10^6} + \frac{34931P}{1050 \cdot 10^6} = \frac{1}{1.5}$$

dove sono stati posti $b_1=0.9$ e $b_2=0.87$

Risolviendo rispetto a P si ottiene il valore del carico massimo sopportabile dalla sezione B a vita infinita:

$$P = \frac{1/1.5}{\frac{40520}{0.9 \cdot 0.87 \cdot 580 \cdot 10^6} + \frac{34931}{1050 \cdot 10^6}} \Rightarrow P = 5443 \text{ N}$$

Sezione C:

$$\begin{cases} \sigma_m^C = 0 \\ \sigma_a^C = \frac{M_f^C}{W_f^C} = \frac{0.02P}{\frac{\pi \cdot 0.015^3}{32}} = 60361P \text{ Pa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_m^C = \frac{M_t}{W_t^C} = \frac{0.04P}{\frac{\pi \cdot 0.015^3}{16}} = 60361P \text{ Pa} \\ \tau_a^C = 0 \end{cases}$$

Ripetendo la procedura seguita in precedenza e ricordando che nella sezione C non sono presenti intagli e che il coefficiente b_1 questa volta deve essere valutato per un diametro di 15 mm , si otterrà:

$$\begin{aligned} \sigma_{m \text{ eq}}^C &= \tau_m^C = 60361P \text{ Pa} \\ \sigma_{a \text{ eq}}^C &= \sigma_a^C = 60361P \text{ Pa} \end{aligned}$$

Segue che il valore del carico massimo P sopportabile dalla sezione C a vita infinita è:

$$P = \frac{1/1.5}{\frac{60361}{0.94 \cdot 0.87 \cdot 580 \cdot 10^6} + \frac{60361}{1050 \cdot 10^6}} \Rightarrow P = 3610 \text{ N}$$

Sezione C':

La sezione C' (sezione intermedia tra B e C in corrispondenza del cambio di diametro) pur essendo sicuramente meno sollecitata della sezione C, richiede la verifica a fatica per la presenza dell'intaglio:

Per la verifica di C' è necessario calcolare il momento flettente che sollecita quella sezione. Una semplificazione lecita, perché a favore di sicurezza, è quella di porre $M_f^{C'} = M_f^C$. Altrimenti, volendo essere più accurati, $M_f^{C'}$ potrà essere calcolato come segue:

$$M_f^{C'} = \sqrt{(\overline{C'D} P - \overline{C'C} R_{CY})^2 + (\overline{C'C} R_{CZ})^2} = \sqrt{(0.029 - 0.009 \cdot 1.42)^2 + (0.009 \cdot 0.43)^2} P = 0.0167P \text{ Nm}$$

$$\begin{cases} \sigma_m^{C'} = 0 \\ \sigma_a^{C'} = \frac{M_f^{C'}}{W_f^{C'}} = \frac{0.0167P}{\frac{\pi \cdot 0.015^3}{32}} = 50327P \quad Pa \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_m^{C'} = \frac{M_t}{W_t^{C'}} = \frac{0.04P}{\frac{\pi \cdot 0.015^3}{16}} = 60361P \quad Pa \\ \tau_a^{C'} = 0 \end{cases}$$

Ripetendo la procedura seguita in precedenza e ricordando che nella sezione C' è presente un intaglio, si otterrà:

$$\begin{aligned} \sigma_{m\,eq}^{C'} &= \tau_m^{C'} = 60361P \quad Pa \\ \sigma_{a\,eq}^{C'} &= k_e \sigma_a^{C'} = 2.19 \cdot 50327P = 110216P \quad Pa \end{aligned}$$

in cui k_e è stato ricavato come:

$$k_e = q(k_t - 1) + 1 = 0.7(2.7 - 1) + 1 = 2.19$$

essendo: $k_t=2.7$ e $q=0.7$

Sostituendo, come in precedenza, nell'equazione della retta di Goodman i valori equivalenti della sollecitazione:

$$\frac{\sigma_{a\,eq}^{C'}}{b_1 b_2 \sigma_N} + \frac{\sigma_{m\,eq}^{C'}}{\sigma_R} = \frac{1}{X}$$

si ottiene una espressione in cui la sola incognita è P :

$$\frac{110216P}{0.94 \cdot 0.87 \cdot 580 \cdot 10^6} + \frac{60361P}{1050 \cdot 10^6} = \frac{1}{1.5}$$

Risolvendo rispetto a P si ricava il valore del carico massimo sopportabile dalla sezione C' a vita infinita:

$$P = \frac{1/1.5}{\frac{110216}{0.94 \cdot 0.87 \cdot 580 \cdot 10^6} + \frac{60361}{1050 \cdot 10^6}} \Rightarrow P = 2300 \quad N$$

Dal confronto dei valori del carico massimo per le tre sezioni B, C e C' risulta più critico per la vita a fatica dell'albero lo stato di sollecitazione della sezione C'. Quindi il carico massimo a fatica per il verricello è: **$P = 2300 \text{ N}$**

Si noti che gli effetti dell'intaglio presente nella sezione C' potrebbero essere fortemente attenuati adottando un raggio di raccordo maggiore. Infatti, mentre il cambio di diametro con raggio di raccordo molto ridotto a sinistra della ruota dentata è giustificato dalla necessità di creare uno spallamento per il cuscinetto, l'intaglio in C' non ha una motivazione funzionale.

Si può verificare che, portando il raggio di raccordo in C' da 0.25 ad almeno 7.5 mm , il carico massimo a fatica per il verricello è quello relativo alla sezione C pari a 3610 N .

Scelta cuscinetti

Sezione A :

Nella sezione A, l'albero ha un diametro di 12 mm quindi il cuscinetto va scelto con uguale diametro interno. Inoltre, l'ingombro assiale che si vuole rispettare è di 8 mm. Se si esegue prima la verifica statica, si nota che tra i cuscinetti rigidi radiali ad una corona di sfere non ve n'è alcuno adatto in quanto $P_A^{Statico} = \sqrt{(0.57 \cdot 5000)^2 + (0.78 \cdot 5000)^2} N = 4830 N$ mentre il massimo coefficiente di carico statico per i cuscinetti con $d = 12 mm$ è $C_0 = 4150 N$. Non sono disponibili cuscinetti a rulli per alberi di 12 mm ma esistono modelli con un maggior numero di sfere.

In realtà, nel caso in esame, non si hanno eccessivi problemi di silenziosità e vibrazioni (il verricello in questione è un meccanismo progettato per essere manovrato manualmente e quindi per lavorare a bassa velocità).

Si può assumere $C_{0,min} = 0.5 P_A^{Statico} = 2415 N$ (tabella 9 a pagina 49 dell'ultima edizione del catalogo SKF dei cuscinetti volventi). Il cuscinetto verificato staticamente è il 12×32×10 (appellativo SKF 6201) con $C_0 = 3100 N$. Riguardo la verifica a fatica:

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P_A^{Fatica}} \right)^3 \quad \text{dove } P_A^{Fatica} = \sqrt{(0.57 \cdot 2300)^2 + (0.78 \cdot 2300)^2} = 2222 \quad N .$$
$$\Downarrow$$
$$C = \sqrt[3]{10} \cdot 2222 N = 4787 N$$

Il cuscinetto scelto ha $C = 6890 N$ perciò si può utilizzare il **12×32×10**.

Sezione C :

Il cuscinetto deve avere un diametro interno di 15 mm ed è preferibile che abbia un ingombro assiale di 8 mm. Il carico statico da sopportare è:

$$P_C^{Statico} = \sqrt{(0.43 \cdot 5000)^2 + (1.42 \cdot 5000)^2} = 7418 N$$

I cuscinetti rigidi radiali ad una corona di sfere con diametro interno di 15 mm non sostengono carichi statici superiori ai 5400 N. Come nel caso precedente, si può assumere $C_{0,min} = 0.5 P_C^{Statico} = 3709 N$ in quanto non ci sono problemi legati a vibrazioni e rumorosità. Può essere scelto il cuscinetto 15×35×11. Riguardo la verifica a fatica :

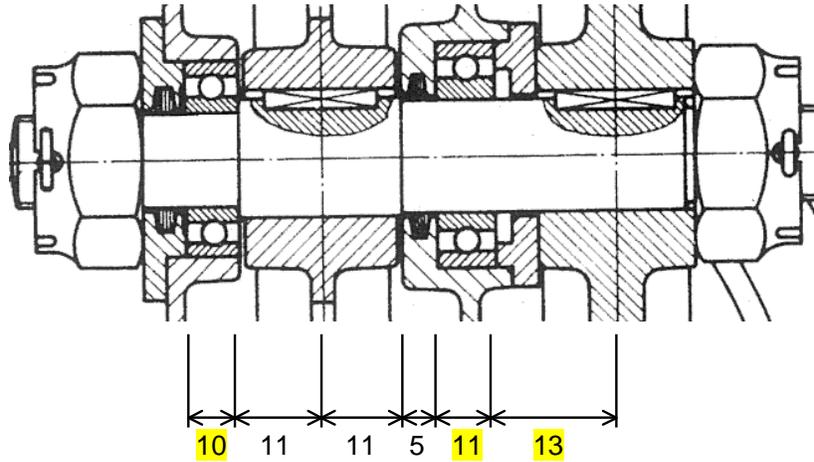
$$L_{10} = \left(\frac{C}{P_C^{Fatica}} \right)^3 \quad \text{dove } P_C^{Fatica} = \sqrt{(0.43 \cdot 2300)^2 + (1.42 \cdot 2300)^2} = 3412 \quad N$$
$$\Downarrow$$
$$C = \sqrt[3]{10} \cdot 3412 = 7351 \quad N .$$

Il cuscinetto che soddisfa le richieste è il **15×35×11** (SKF 6202).

Un'altra scelta possibile è quella di utilizzare un cuscinetto a rulli cilindrici ad una corona come il 15×35×11 (SKF NU 202 EC) che risponde a tutte le specifiche.

E' da considerare che entrambe le scelte di cuscinetti comportano uno spostamento dei vincoli di appoggio e quindi una variazione della configurazione dei carichi. E' opportuno calcolare di nuovo le sollecitazioni e verificare che la progettazione sia corretta.

Calcolo di verifica



Per le reazioni vincolari in A e C si ottiene:

$$\begin{cases} -R_{AZ} + F_C - R_{CZ} = 0 \\ F_C \overline{AB} - R_{CZ} \overline{AC} = 0 \\ -R_{AY} + F_R + R_{CY} - P = 0 \\ F_R \overline{AB} + R_{CY} \overline{AC} - P \overline{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AZ} = 0.57P \\ R_{AY} = 0.70P \\ R_{CZ} = 0.43P \\ R_{CY} = 1.34P \end{cases}$$

Il momento torcente nelle sezioni B e C rimane lo stesso mentre i rispettivi momenti flettenti sono:

$$M_f^B = \overline{AB} \sqrt{R_{AY}^2 + R_{AZ}^2} = 0.016 \sqrt{0.70^2 + 0.57^2} P = 0.014P \quad Nm$$

$$M_f^C = \overline{CD} P = 0.018P \quad Nm$$

E' chiaro che la situazione di carico nella sezione C è ora meno pericolosa, quindi, i carichi statici e a fatica calcolati in precedenza sono ancora validi come limiti di esercizio.