Criteri di resistenza II

Criteri direttamente basati sullo stato di tensione

- ➔Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier)
- ➔Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest)
- ➔Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr)
- ➔Massima tensione tangenziale ottaedrale (Rôs Eichinger)

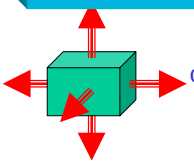
Criteri basati sullo stato di deformazione

- ➔Massima deformazione normale (Poncelet-de St. Venant-Grashof)

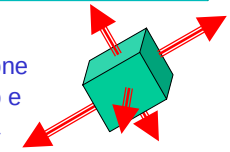
Criteri basati sulla energia di deformazione

- ➔Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig)
- ➔Massima energia di distorsione (Huber-Von Mises-Hencky)

Deduzione della tensione equivalente dai criteri di resistenza



I due stati di tensione possono essere confrontanti sulla base del valore della funzione scalare f che stabilisce il criterio di confronto e che prende il nome di criterio di resistenza



$$F = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad \longleftrightarrow \quad F' = f(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$$

In particolare se f è applicato allo stato di tensione assiale che si ha nella prova di trazione, si può scrivere che:

σ_1

$$F'' = f(\sigma_1'', 0, 0) = f_{ass}(\sigma_1'')$$

Per cui si ha lo stesso grado di pericolosità tra i primo e il terzo caso quando:

$$F'' = F \quad \Rightarrow \quad f_{ass}(\sigma_1'') = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

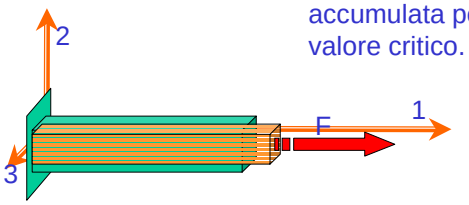
da cui segue che il valore della tensione monoassiale (σ_e) che genera uno stato di tensione equivalente a quello definito da σ_1, σ_2 e σ_3 può essere ricavata come:

$$\sigma_e = \sigma_1'' = f_{ass}^{-1}\left[f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right]$$

Criteri di resistenza

Massima energia di deformazione (Beltrami)

Il materiale subisce danno quando l'energia accumulata per deformazione raggiunge un valore critico.



In campo elastico, per la trazione semplice, l'energia di deformazione per unità di volume vale :

$$U_1 = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1$$

Nel caso triassiale si avrà quindi:

$$U_{tot} = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right)$$

Criteri di resistenza

Massima energia di deformazione (Beltrami)

Avendosi dallo studio della relazione tensione-deformazione in campo elastico che:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \qquad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Si potrà scrivere l'energia di deformazione totale come:

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\left\{\sigma_1 \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \sigma_3 \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]$$

Nel caso in cui solo σ_1 sia diversa da zero si avrà:

$$U_{ass}(\sigma_1) = U_{tot}(\sigma_1, 0, 0) = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)] = \frac{1}{2E}\sigma_1^2$$

Si può, quindi, ricavare l'espressione della tensione equivalente dalla formula:

$$\sigma_e = \sigma_1 = U_{ass}^{-1}[U_{tot}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$$

Criteri di resistenza

Massima energia di deformazione (Beltrami)

Quindi:

$$\sigma_e = \sigma_1 = U_{ass}^{-1}[U_{tot}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)] = \sqrt{2E\left\{\frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]\right\}} =$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)}$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} > \sigma_L$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = \sqrt{2(1+\nu)}\tau_{xy}$$

torsione + trazione:

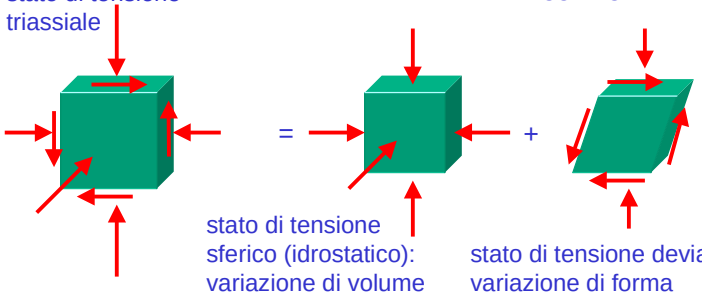
$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2}$$

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (Von Mises)

Il materiale subisce danno quando l'energia di distorsione accumulata raggiunge un valore critico.

stato di tensione triassiale



stato di tensione sferico (idrostatico): variazione di volume

stato di tensione deviatorico: variazione di forma

Stato di tensione triassiale:

$$\sigma_1 = S + \sigma_1^d$$
$$\sigma_2 = S + \sigma_2^d$$
$$\sigma_3 = S + \sigma_3^d$$

Componente idrostatica:

$$S = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Componenti deviatoriche:

$$\sigma_1^d = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}$$
$$\sigma_2^d = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}$$
$$\sigma_3^d = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (Von Mises)

Per uno stato di tensione triassiale l'energia totale di deformazione *(vedi criterio di Beltrami)* vale:

$$U_{tot} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right]$$

La parte dovuta alla componente sferica dello stato di tensione varrà:

$$U_{sf} = \frac{1}{2E}\left[S^2 + S^2 + S^2 - 2\nu(S^2 + S^2 + S^2)\right] = \frac{3(1-2\nu)}{2E}S^2$$

Ricordando l'espressione di S si ottiene:

$$U_{sf} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}S^2 = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2$$

Quindi, per differenza si ottiene l'energia di distorsione:

$$U_{dist} = U_{tot} - U_{sf}$$

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (Von Mises)

$$U_{dist} = U_{tot} - U_{sf} =$$

$$= \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + \sigma_1^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right] - \frac{3(1-2\nu)}{2E}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2$$

Che può essere scritta nella forma:

(la stessa espressione poteva essere ricavata introducendo le componenti deviatoriche dello stato di tensione nell'espressione dell'energia di deformazione)

$$U_{dist} = \frac{(1+\nu)}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]$$

Nel caso in cui solo σ_1 sia diversa da zero si avrà:

$$U_{ass\,dist}(\sigma_1) = U_{dist}(\sigma_1, 0, 0) = \frac{(1+\nu)}{6E}\left[(\sigma_1)^2 + (\sigma_1)^2\right] = \frac{(1+\nu)}{3E}\sigma_1^2$$

Si può, quindi, ricavare l'espressione della tensione equivalente dalla formula:

$$\sigma_e = \sigma_1 = U_{ass\,dist}^{-1}\left[U_{dist}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right]$$

Criteri di resistenza

Massima energia di distorsione (Von Mises)

Quindi:

$$\sigma_e = \sigma_1 = U_{ass\,dist}^{-1}\left[U_{dist}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right] = \sqrt{\frac{3E}{1+\nu}\left\{\frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} > \sigma_L$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = \sqrt{3}\,\tau_{xy}$$

torsione + trazione:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

Criteri di resistenza Massima deformazione normale (de St. Venant)

Il materiale subisce danno quando la massima deformazione principale raggiunge un valore critico.

Nel caso triassiale la massima deformazione normale vale:

$$\varepsilon_{max} = \max\left(\left|\varepsilon_{1,2,3}\right|\right) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \\ -\varepsilon_3 = -\frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \end{cases}$$

Nel caso monoassiale si avrà invece:

$$\varepsilon_{ass\,max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1$$

Si può, quindi, ricavare l'espressione della tensione equivalente dalla formula:

$$\sigma_e = \sigma_1 = \varepsilon_{ass\,max}^{-1}\left[\varepsilon_{max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right]$$

Criteri di resistenza Massima deformazione normale (de St. Venant)

Quindi:

$$\sigma_e = \sigma_1 = \varepsilon_{ass\,max}^{-1}\left[\varepsilon_{max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right] =$$

$$= \begin{cases} E\left\{\frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]\right\} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ E\left\{-\frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]\right\} = -\sigma_3 + \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases}$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\sigma_e = \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ -\sigma_3 + \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \end{matrix} \right\} > \sigma_L$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = (1+\nu)\tau_{xy}$$

torsione + trazione:

$$\sigma_e = \frac{1-\nu}{2}\sigma_x + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Criteri di resistenza — Massima tensione tangenziale (Tresca)

Il materiale subisce danno quando la massima tensione tangenziale raggiunge un valore critico.

Nel caso generale di stato di tensione triassiale il valore della tensione tangenziale massima vale:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Quando la sollecitazione è monoassiale e solo σ_1 è diversa da zero si avrà:

$$\tau_{a\,max}(\sigma_1) = \tau_{max}(\sigma_1, 0, 0) = \frac{\sigma_1}{2}$$

Si può, quindi, ricavare l'espressione della tensione equivalente dalla relazione:

$$\sigma_e = \sigma_1 = \tau_{a\,max}^{-1}\left[\tau_{max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right]$$

Criteri di resistenza — Massima tensione tangenziale (Tresca)

Ne segue che:

$$\sigma_e = \tau_{a\,max}^{-1}\left[\tau_{max}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\right] = 2\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) =$$

$$= \sigma_1 - \sigma_3$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_L$$

Casi particolari:

torsione pura:

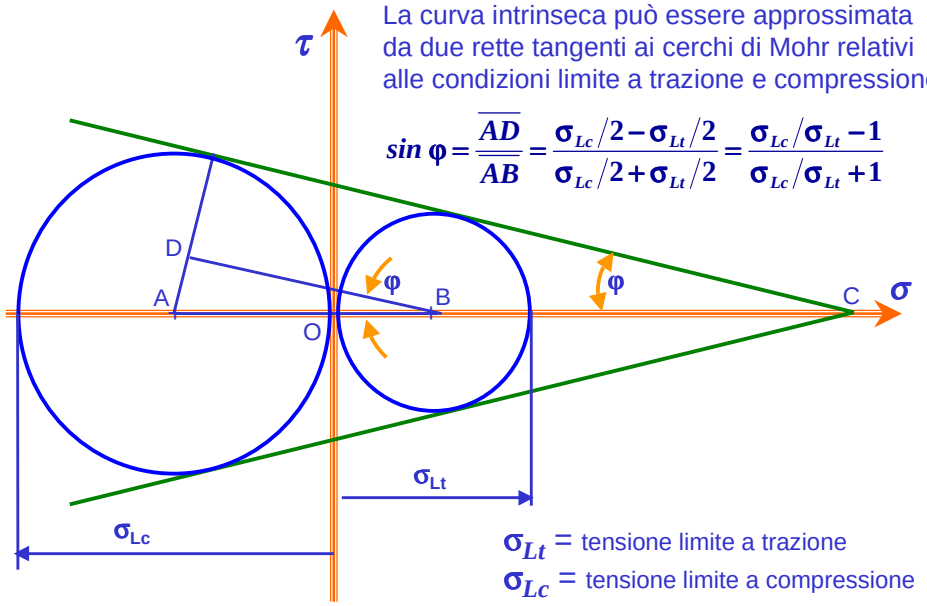
$$\sigma_e = 2\tau_{xy}$$

torsione + trazione:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)



La curva intrinseca può essere approssimata da due rette tangenti ai cerchi di Mohr relativi alle condizioni limite a trazione e compressione

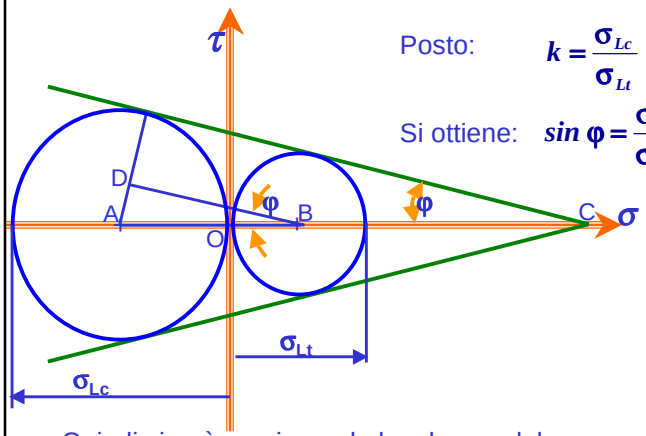
$$\sin\varphi = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sigma_{Lc}/2 - \sigma_{Lt}/2}{\sigma_{Lc}/2 + \sigma_{Lt}/2} = \frac{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} - 1}{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} + 1}$$

σ_{Lt} = tensione limite a trazione

σ_{Lc} = tensione limite a compressione

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)



Posto: $k = \dfrac{\sigma_{Lc}}{\sigma_{Lt}}$

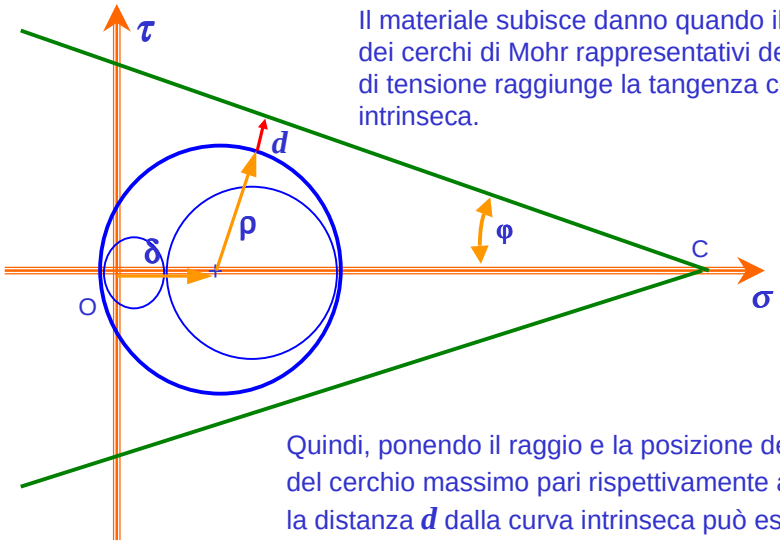
Si ottiene: $\sin\varphi = \dfrac{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} - 1}{\sigma_{Lc}/\sigma_{Lt} + 1} = \dfrac{k-1}{k+1}$

Quindi si può esprimere la lunghezza del segmento OC in funzione di k e σ_{Lt}:

$$\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \frac{\sigma_{Lt}}{2} + \frac{\frac{\sigma_{Lt}}{2}}{\sin\varphi} = \frac{\sigma_{Lt}}{2}\left(1 + 1\Big/\frac{k-1}{k+1}\right) = \sigma_{Lt}\frac{k}{k-1}$$

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)



Il materiale subisce danno quando il maggiore dei cerchi di Mohr rappresentativi del suo stato di tensione raggiunge la tangenza con la curva intrinseca.

Quindi, ponendo il raggio e la posizione del centro del cerchio massimo pari rispettivamente a ρ e δ, la distanza d dalla curva intrinseca può essere espressa come:

$$d = \left(\overline{OC} - \delta\right) sin\,\varphi - \rho$$

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Ricordando le espressioni di OC, sinφ, ρ e δ,

$$\overline{OC} = \sigma_{Lt}\frac{k}{k-1}, \qquad sin\,\varphi = \frac{k-1}{k+1}, \qquad \rho = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \qquad \delta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

l'espressione di d per uno stato di tensione triassiale diventa:

$$d = \left(\overline{OC} - \delta\right) sin\,\varphi - \rho = \left(\sigma_{Lt}\frac{k}{k-1} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\frac{k-1}{k+1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[k\left(\sigma_{Lt} - \sigma_1\right) + \sigma_3\right]$$

Per una stato di tensione monoassiale, l'espressione precedente diventa:

$$d_a\left(\sigma_1\right) = d\left(\sigma_1, 0, 0\right) = \frac{k}{k+1}\left(\sigma_{Lt} - \sigma_1\right)$$

Si può, quindi, ricavare il valore della tensione equivalente dalla relazione:

$$\sigma_e = \sigma_1 = d_a^{-1}\left[d\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)\right]$$

Criteri di resistenza

Curva di resistenza intrinseca (Mohr)

Ne segue che:

$$\sigma_e = \sigma_1 = d_a^{-1}\left[d(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\right] = \sigma_{Lt} - \frac{k+1}{k}\left\{\frac{1}{k+1}\left[k(\sigma_{Lt}-\sigma_1)+\sigma_3\right]\right\} =$$

$$= \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k}$$

Si avrà perciò rottura quando:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \frac{\sigma_3}{k} > \sigma_L$$

Casi particolari:

torsione pura:

$$\sigma_e = \frac{k+1}{k}\tau_{xy}$$

torsione + trazione:

$$\sigma_e = \frac{k-1}{2k}\sigma_x + \frac{k+1}{2k}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Criteri di resistenza

Massima tensione normale (Rankine)

Il materiale subisce danno quando la massima tensione principale raggiunge un valore critico.

Sia nel caso triassiale che in quello monoassiale la massima tensione normale vale:

$$\sigma_{\max\, traz} = \sigma_1$$

$$\sigma_{\max\, comp} = \sigma_3$$

Ne segue direttamente che si ha rottura se:

$$\sigma_e = \begin{cases} \sigma_1 > \sigma_{Lt} \\ \sigma_3 < \sigma_{Lc} \end{cases}$$

σ_{Lt} = tensione limite a trazione

σ_{Lc} = tensione limite a compressione

Criteri di resistenza

Confronto tra le varie teorie sulla base del rapporto caratteristico σ_L/τ_L

- ➔Massima tensione normale (Rankine-Lamé-Navier) 1
- ➔Massima tensione tangenziale (Tresca-Guest) 2
- ➔Curva della resistenza intrinseca (Coulomb-Mohr) 1.25÷2
- ➔Massima deformazione normale (Poncelet-de St. Venant-Grashof) 1.25
- ➔Massima energia di deformazione (Beltrami-Huber-Haig) 1.61
- ➔Massima energia di distorsione (Huber-Von Mises-Hencky) 1.73

Valori sperimentali di σ_L/τ_L

- Materiali fragili = 1 ÷ 1.25
- Materiali duttili = 1.75 ÷ 1.80