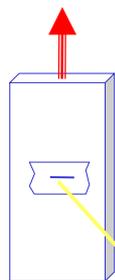


Meccanica della Frattura II

Meccanica della Frattura

Teoria di Griffith

Si consideri una lastra nella quale è presente un difetto passante



U_0 → Energia potenziale elastica della lastra integra

U_D → Energia rilasciata per la presenza del difetto

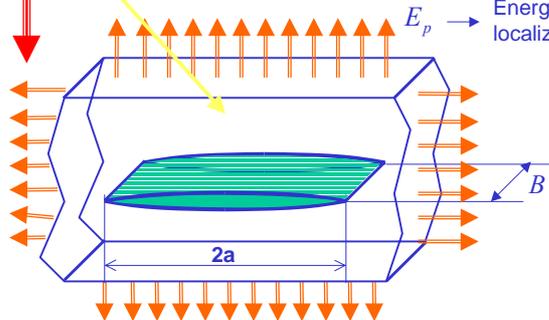
U_A → Energia acquistata per la presenza del difetto

$$U_A = E_E + E_\Gamma + E_p$$

E_E → Energia di deformazione elastica dovuta al lavoro delle forze esterne

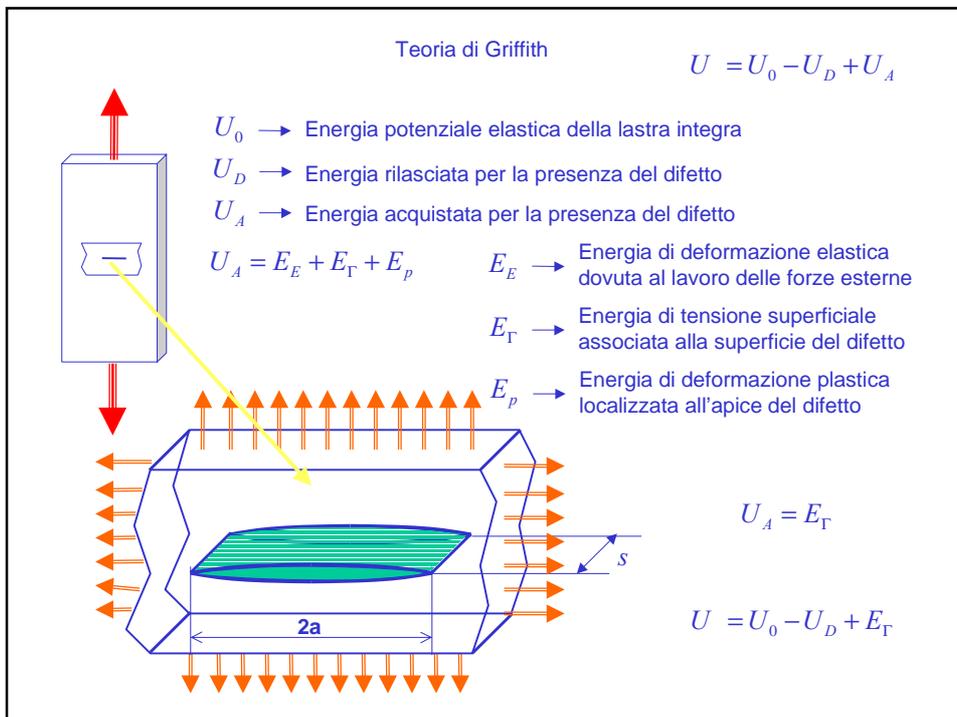
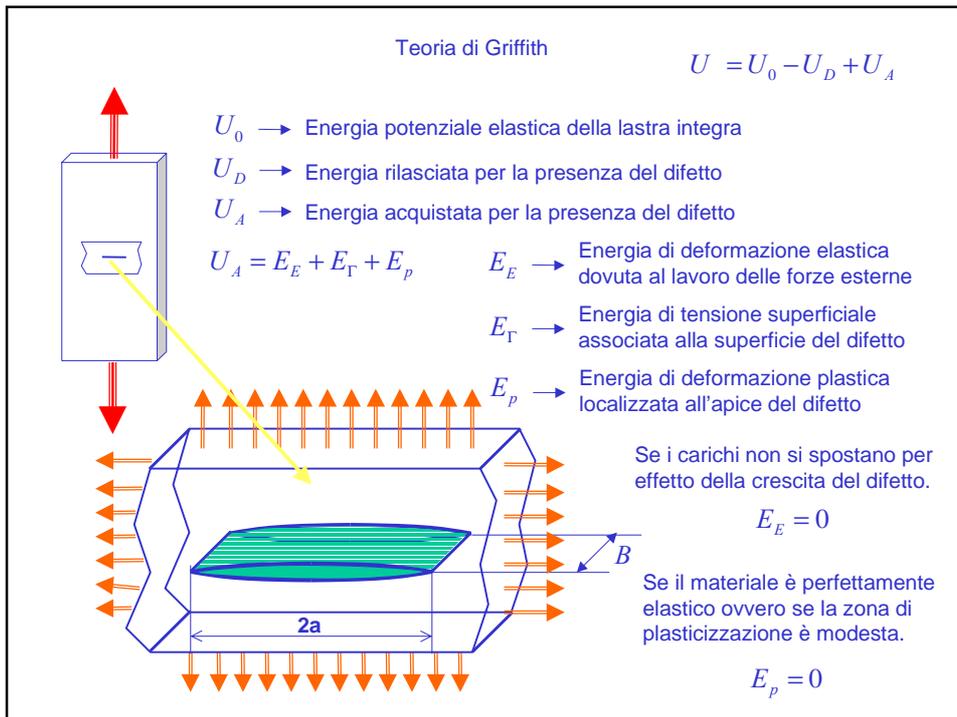
E_Γ → Energia di tensione superficiale associata alla superficie del difetto

E_p → Energia di deformazione plastica localizzata all'apice del difetto

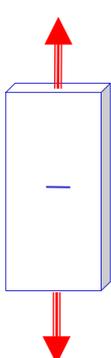


Bilancio energetico

$$U = U_0 - U_D + U_A$$



Teoria di Griffith



$$U = U_0 - U_D + E_\Gamma$$

$$U = U_0 - \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} s + 4 a s \Gamma$$

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 4 s \Gamma - \frac{2 \pi a \sigma^2}{E} s = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = -\frac{2 \pi \sigma^2}{E} s$$

$$E_\Gamma = 4 a s \Gamma$$

$$U_D = \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} s$$

$$U_D = \frac{\pi \sigma^2 a^2}{1 - \nu^2} s$$

Tensione piana
Deformazione piana

Condizioni critiche

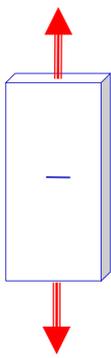
$$\frac{\pi a_{cr} \sigma_{cr}^2}{E} = 2 \Gamma$$

$$\sigma_{cr} \sqrt{\pi a_{cr}} = \sqrt{2 E \Gamma} = K_c$$

La derivata seconda è sempre negativa, dunque il punto in cui si annulla la derivata prima è un massimo

$K_c = \text{Tenacità a frattura}$
E' una costante del materiale

Teoria di Griffith



In generale il K "applicato" può essere calcolato come segue:

$$K = Y \sigma \sqrt{a} \quad a = \text{dimensione del difetto}$$

dove Y è un fattore geometrico dipendente da a e dalla geometria del componente.

K si misura in: $MPa m^{1/2}$

La condizione di resistenza diventa un confronto tra il K applicato e quello critico proprio del materiale impiegato.

Si avrà rottura (=propagazione della cricca) quando:

$$K = Y \sigma \sqrt{a} > K_c$$

Quindi, non esiste un valore limite per il carico applicato, ma è la combinazione tra la tensione (nominale) e le dimensioni del difetto che non deve raggiungere le condizioni critiche.

Teoria di Griffith

Il rateo di rilascio di energia (strain energy release rate), per unità di spessore, relativo ad un accrescimento infinitesimo da delle dimensioni del difetto, è generalmente indicato come segue:

$$G = \frac{\partial U_D}{\partial a} = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \quad (J/m^2)$$

oppure, nel caso di tensione piana: $G = \frac{(\pi a \sigma^2)(1-\nu^2)}{E}$

L'assorbimento di energia dovuto alla creazione di nuova superficie, sempre nel caso di spessore unitario, è indicato come segue:

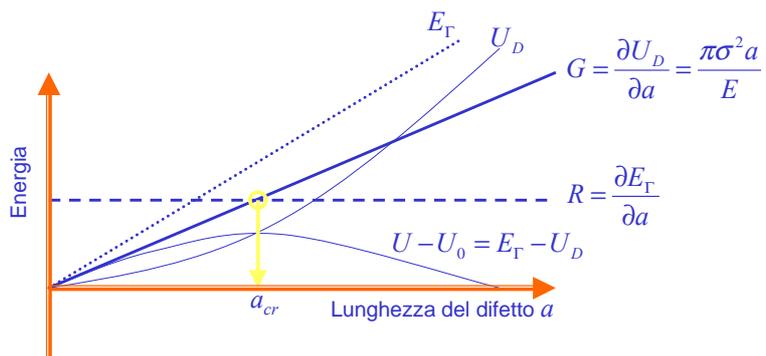
$$R = \frac{\partial E_\Gamma}{\partial a} = 2\Gamma \quad (J/m^2)$$

La condizione critica è rappresentata dall'uguaglianza $G = R$

Il difetto è stabile se $G < R$

mentre si propaga in modo instabile per $G > R$

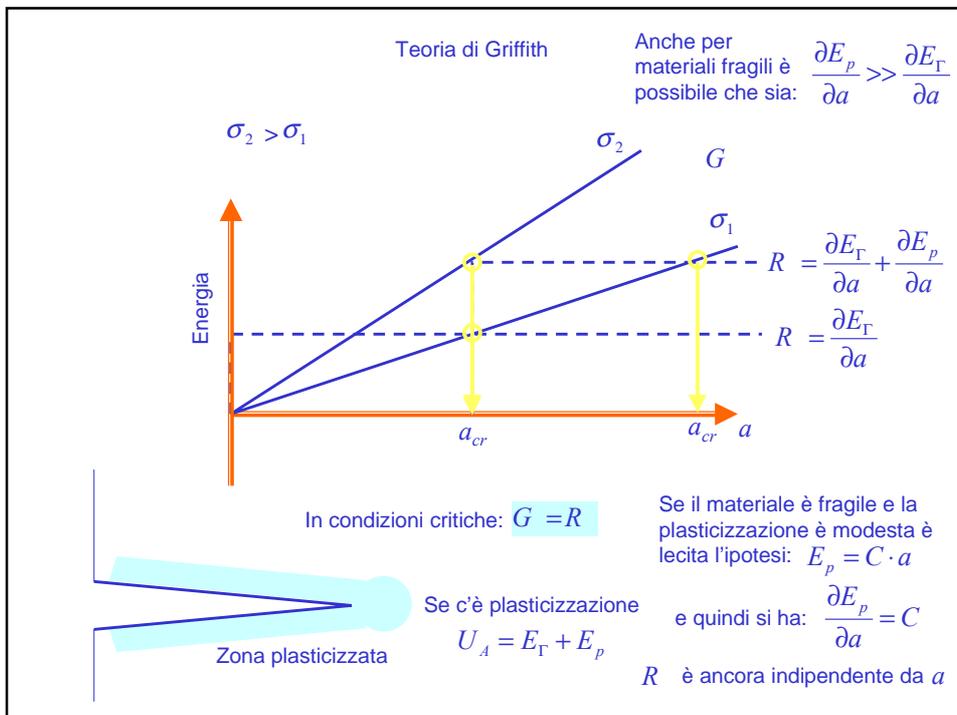
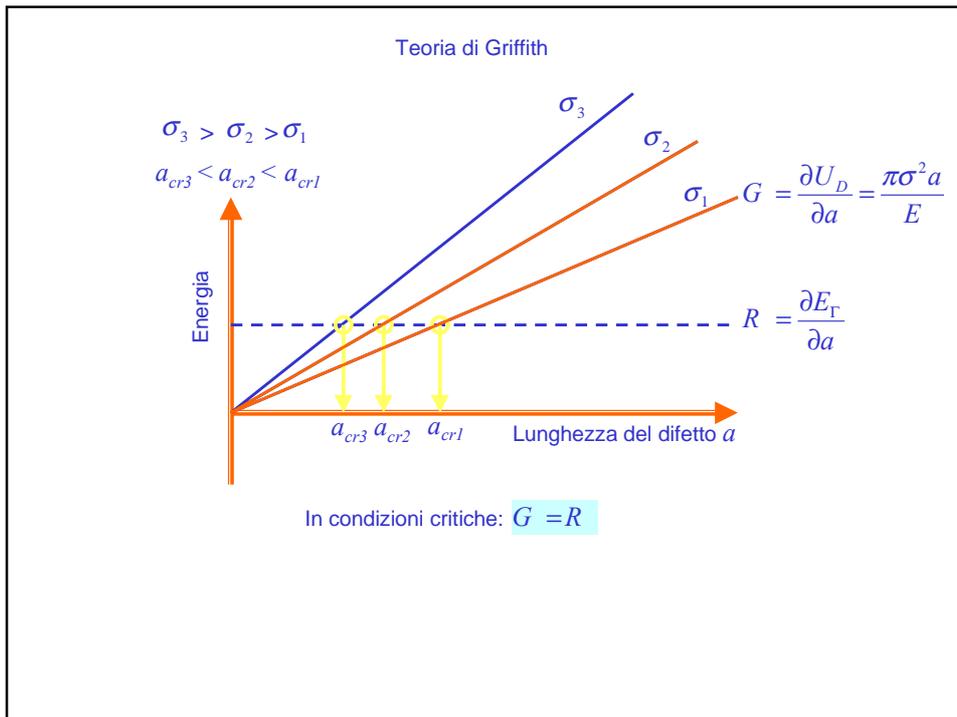
Teoria di Griffith

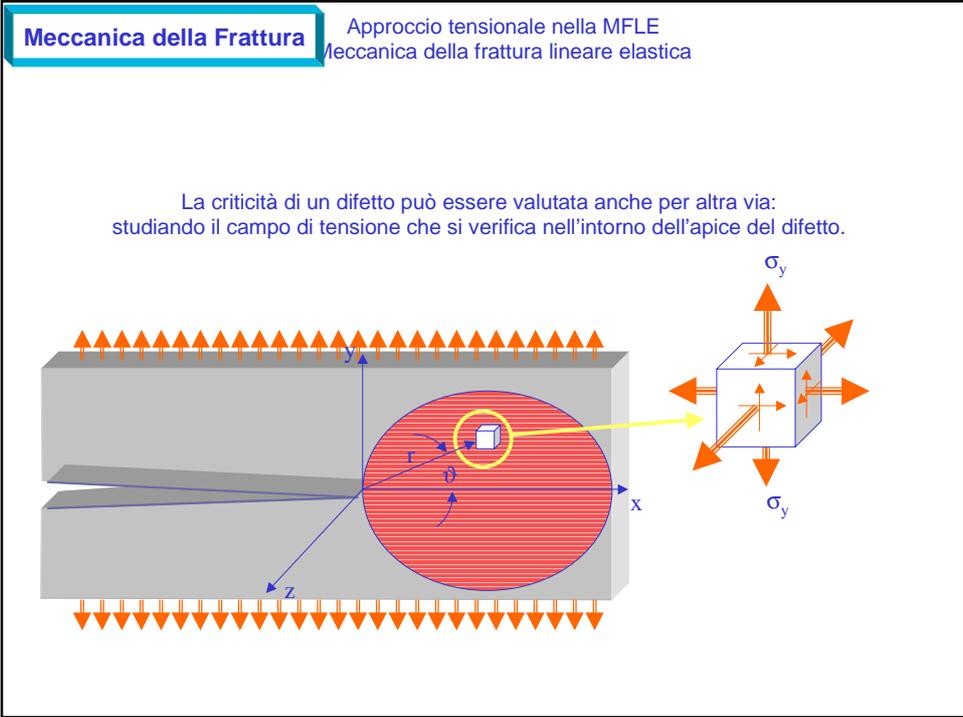
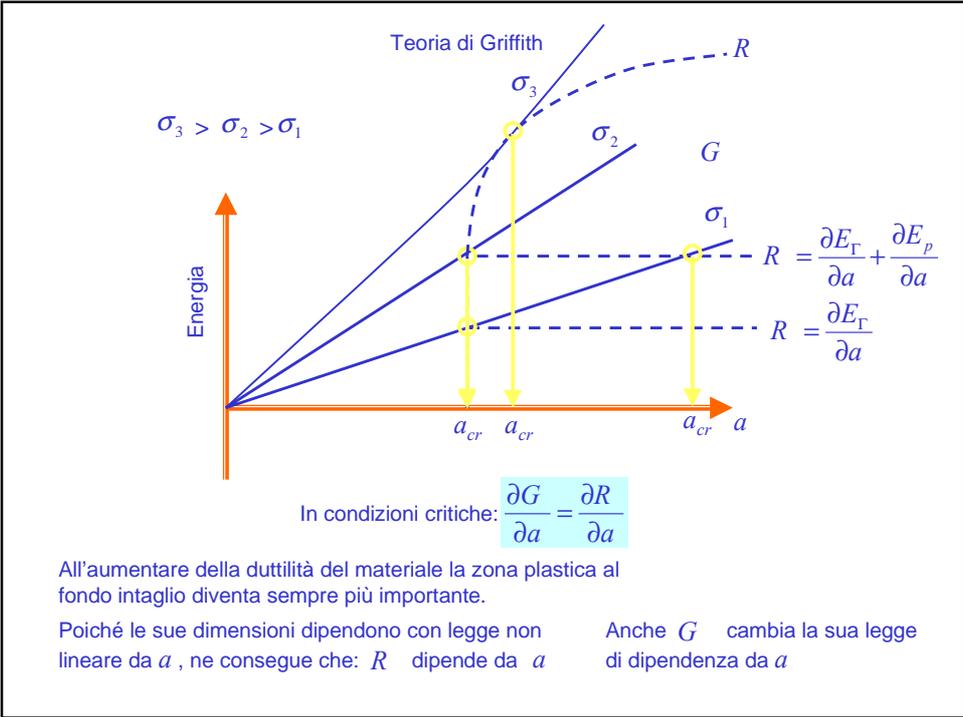


In condizioni critiche: $G = R$

$$G = \frac{(\pi a \sigma^2)(1-\nu^2)}{E} = \frac{K^2(1-\nu^2)}{E}$$

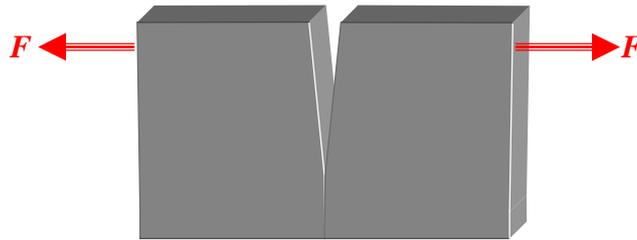
$$K = Y\sigma\sqrt{a}$$





Approccio tensionale nella MFLE
Meccanica della frattura lineare elastica

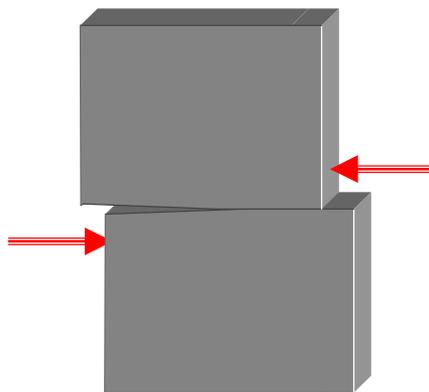
Analisi del campo di tensione che si genera all'apice di un difetto:
MODI di apertura del difetto.



Modo I
di apertura

Approccio tensionale nella MFLE
Meccanica della frattura lineare elastica

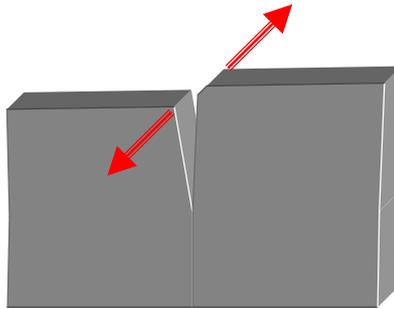
Analisi del campo di tensione che si genera all'apice di un difetto:
MODI di apertura del difetto.



Modo II
di taglio nel piano della cricca

Approccio tensionale nella MFLE
Meccanica della frattura lineare elastica

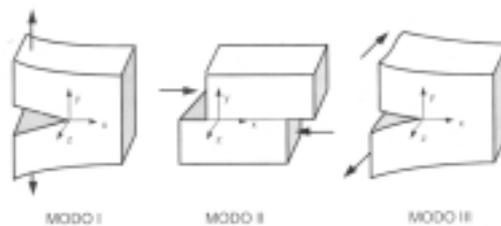
Analisi del campo di tensione che si genera all'apice di un difetto:
MODI di apertura del difetto.



Modo III
di taglio fuori dal piano della cricca

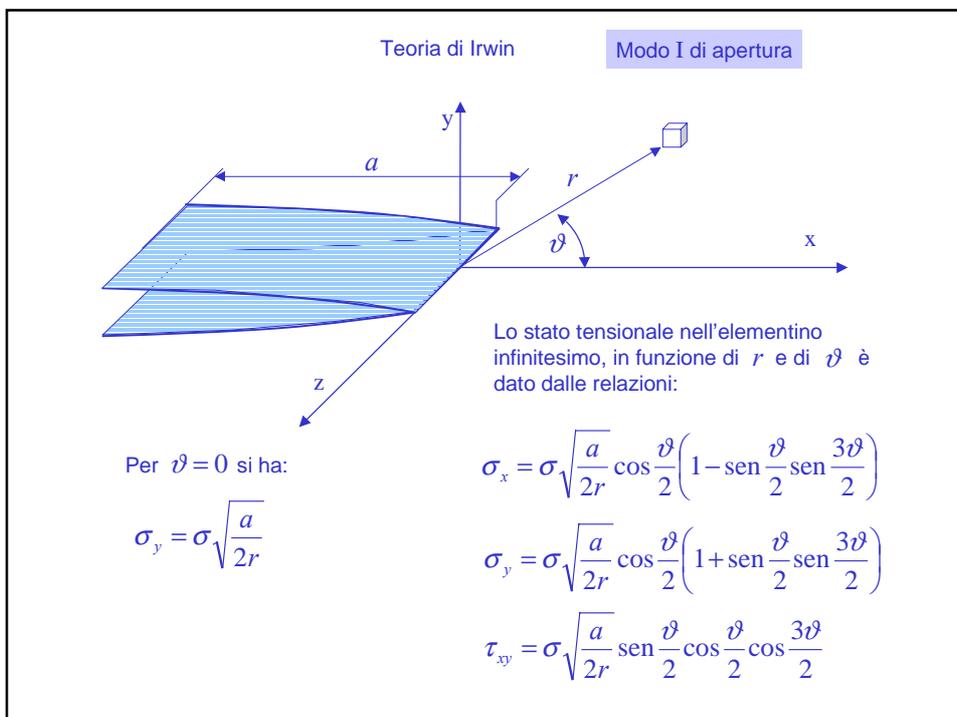
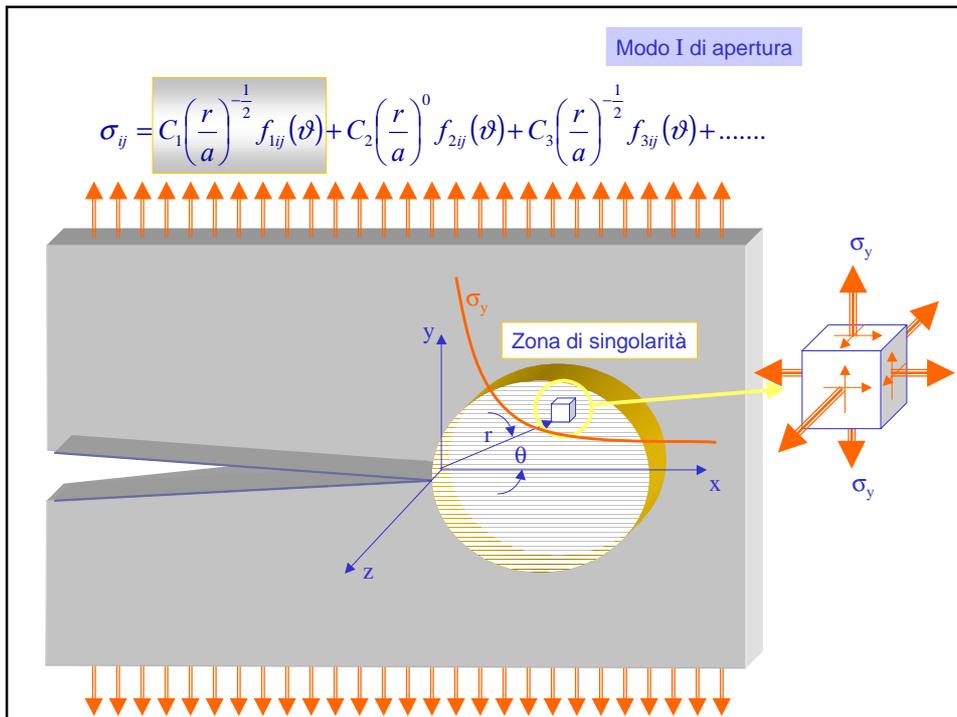
Approccio tensionale nella MFLE

MODI di apertura del difetto.



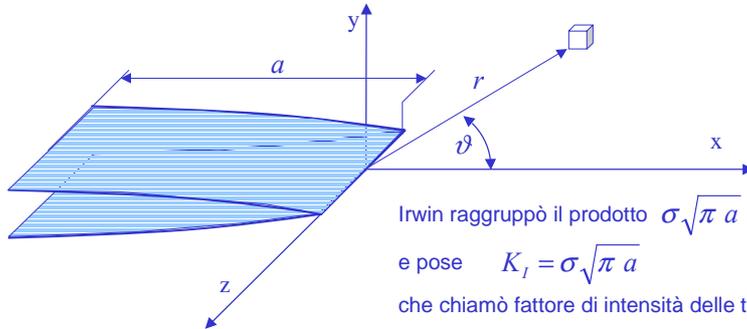
Tra i diversi modi di rottura descritti, il modo **I** è il più interessante per chi progetta strutture.
Rappresenta, infatti, la forma di apertura più comune che si osserva nella realtà
che è anche la più critica, poiché richiede la minore tensione nominale per innescare la frattura.

Qualunque caso reale può essere ricondotto ad uno dei tre modi
oppure ad una loro combinazione.



Teoria di Irwin

Modo I di apertura



Irwin raggruppò il prodotto $\sigma\sqrt{\pi a}$ e pose $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ che chiamò fattore di intensità delle tensioni.

Le relazioni precedenti possono quindi essere riscritte come segue:

In generale possono essere scritte nella forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\vartheta)$$

Per $\vartheta = 0$ la componente σ_y vale:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

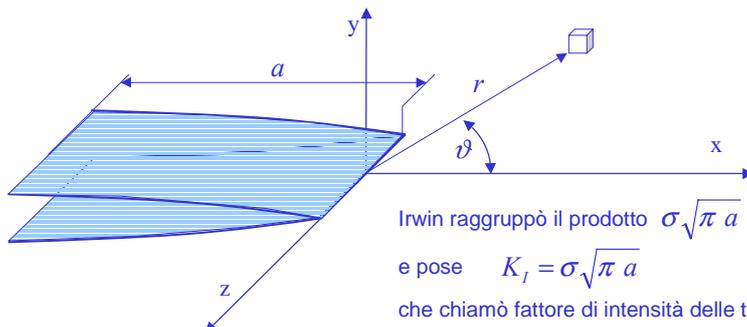
$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\vartheta}{2} \left(1 + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{3\vartheta}{2}$$

Teoria di Irwin

Modo I di apertura



Irwin raggruppò il prodotto $\sigma\sqrt{\pi a}$ e pose $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ che chiamò fattore di intensità delle tensioni.

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}$$

dove con σ si intende la tensione nominale

In generale il valore del fattore di intensità della tensione può essere espresso nella forma:

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$$

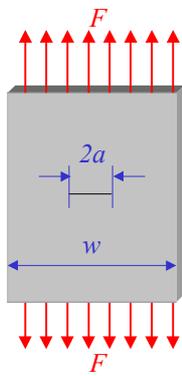
dove Y è un fattore di forma dipendente dalla geometria del difetto.

Nel caso particolare di un difetto passante, di lunghezza $2a$, in una piastra le cui dimensioni possano essere considerate infinite rispetto ad a il fattore Y vale:

$$Y = \sqrt{\pi}$$

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad \text{espressione di validità generale}$$

Cricca passante centrale



per $w \gg a$ $Y = \sqrt{\pi}$ $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$

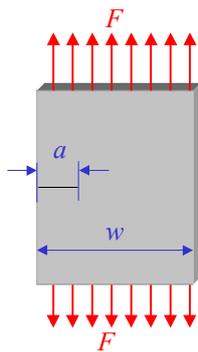
per $w > a$

Fedderson $Y = \sqrt{\pi} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{w}}$ $K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\sec \frac{\pi a}{w}}$

Irwin $Y = \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{w}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{w}}$ $K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\frac{w}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{w}}$

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad \text{espressione di validità generale}$$

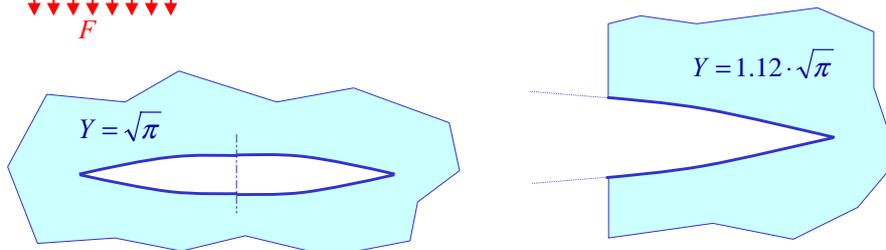
Cricca passante al bordo



per $w \gg a$ $Y = 1.12 \cdot \sqrt{\pi}$ $K_I = 1.12 \cdot \sigma\sqrt{\pi a}$

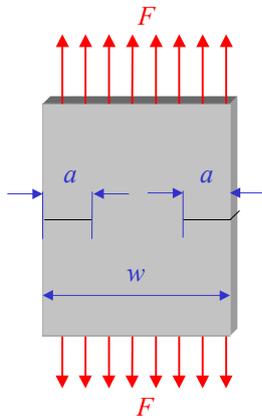
per $w > a$

$$Y = 1.12 \cdot \sqrt{\pi} - 0.41 \frac{a}{w} + 18.7 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85 \left(\frac{a}{w}\right)^4$$



$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad \text{espressione di validità generale}$$

Cricca passante ad entrambi i bordi



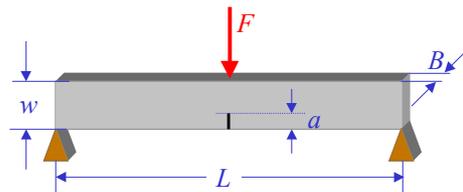
per $w \gg a$ $Y = 1.12 \cdot \sqrt{\pi}$

per $w > a$

$$Y = 1.12 \cdot \sqrt{\pi} + 0.76 \frac{a}{w} - 8.48 \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 27.36 \left(\frac{a}{w}\right)^3$$

$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad \text{espressione di validità generale}$$

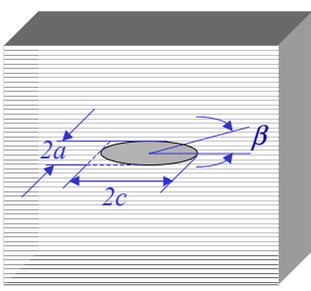
Trave appoggiata con cricca passante in corrispondenza del centro del bordo teso.



$$K_I = \frac{PL}{B\sqrt{w}} \cdot \left[29.6 \left(\frac{a}{w}\right)^{1/2} - 185.5 \left(\frac{a}{w}\right)^{3/2} + 655.7 \left(\frac{a}{w}\right)^{5/2} - 1017.0 \left(\frac{a}{w}\right)^{7/2} + 63.9 \left(\frac{a}{w}\right)^{9/2} \right]$$

$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$ espressione di validità generale

Cricca ellittica interna



Vista dall'alto

Se il rapporto a/c è piccolo si può utilizzare una espressione approssimata:

$$K_I = \sigma\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\Phi} \cdot \sqrt{(\sin \beta)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 (\cos \beta)^2}$$

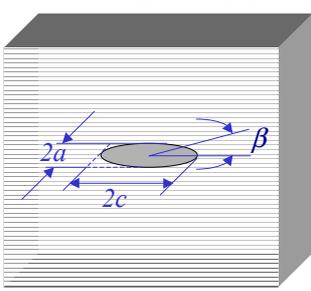
$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} (\sin \beta)^2} d\beta$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{c^2 - a^2}{c^2} - \frac{3}{64} \left(\frac{c^2 - a^2}{c^2}\right)^2 - \dots \right]$$

$$\Phi = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi a^2}{8 c^2}$$

$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$ espressione di validità generale

Cricca ellittica interna



Vista dall'alto

Se il rapporto a/c è piccolo si può utilizzare una espressione approssimata:

$$K_I = \sigma\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\Phi} \cdot \sqrt{(\sin \beta)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 (\cos \beta)^2}$$

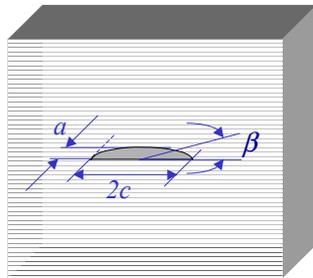
Il valore del K_I è massimo per $\beta = \pi/2$:

$$K_I = \sigma\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\Phi}$$

$$\Phi = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi a^2}{8 c^2}$$

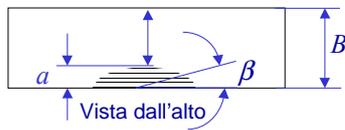
$$K_I = Y\sigma\sqrt{a} \quad \text{espressione di validità generale}$$

Più frequente è il caso della
cricca semiellittica superficiale



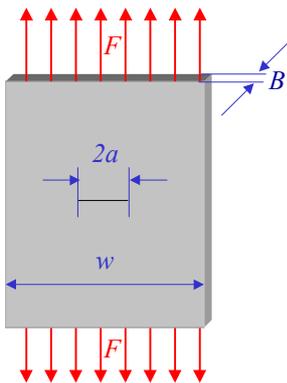
Anche in questo caso il valore del
 K_I è massimo per $\beta = \pi/2$:

$$K_I = 1.12 \frac{\sqrt{\pi}}{\Phi} \sigma \sqrt{a}$$



$$\Phi \approx \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi a^2}{8 c^2}$$

Esercizio 1



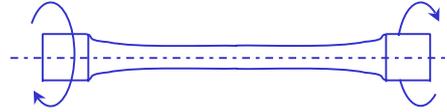
Si immagini di sottoporre una
piastra che presenta una cricca
centrale passante ad un carico di
trazione F fino a provocarne la
rottura.

Si determini la tenacità del
materiale sapendo che:

$$\begin{aligned} F &= 800 \text{ kN} \\ w &= 760 \text{ mm} \\ 2a &= 102 \text{ mm} \\ B &= 5.0 \text{ mm} \end{aligned}$$

Esercizio 2

La barra di torsione rappresentata in figura è sollecitata staticamente da un momento torcente M_t .



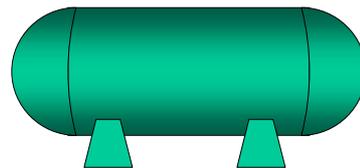
La tecnica di ispezione per il rilevamento di cricche superficiali non ci permette di evidenziare difetti con lunghezza inferiore a 4 mm e profondità inferiore a 2.5 mm.

Si determini con quale dei seguenti materiali si ottiene il miglior rapporto peso/prestazioni.

	σ_s (MPa)	K_{Ic} (MPa \sqrt{m})
acciaio al carbonio:	240	210
acciaio 4340:	1400	85
acciaio maraging 300:	1900	57

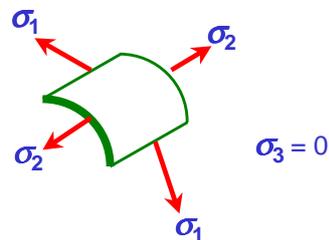
Esercizio 3

Un serbatoio a parete sottile è stato progettato per lavorare a 200 bar con un coefficiente di sicurezza $X=4$.



Si determini:

- lo spessore del mantello sapendo che il diametro esterno D_e è di 300 mm,
- le dimensioni minime del difetto che deve essere rilevabile per avere lo stesso margine di sicurezza rispetto al cedimento per frattura.



Materiale:

- $\sigma_s = 1200$ (MPa)
- $K_{Ic} = 50$ (MPa \sqrt{m})