Equazioni alle derivate parziali

prof. Daniele Andreucci

Esercizi di esame e di controllo

20080921˙esercizi˙edp 20080921 17.17

1. (ex): esercizi d'esame; (hw): esercizi di controllo.

2. La numerazione delle formule è relativa al singolo esercizio.

210. Edp del I ordine: metodo delle caratteristiche

1. [2003 (hw)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &u_x + u_y = 1\,, \\ &u(s^2, s) = \cos s\,, \qquad -\infty < s < \alpha\,, \end{aligned}$$

trovando il valore massimo di α che permette l'esistenza di una soluzione con derivate continue.

2. [16/4/2003 (ex)I] Si consideri la equazione del primo ordine

$$u_x + \cos x\, u_y = u\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

a) Se ne determinino le caratteristiche al suolo.
b) Si risolva l'equazione scritta come e.d.o. sulle caratteristiche.
c) Si dia una condizione su $\alpha > 0$ perché tutta la retta $y = \alpha x$ sia accettabile come curva che porta il dato in un problema di Cauchy per l'equazione data. Si interpreti geometricamente la condizione ottenuta.

3. [16/4/2003 (ex)II] Si consideri la equazione del primo ordine

$$u_x + \frac{1}{1 + x^2}\, u_y = 3u\,, \qquad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

a) Se ne determinino le caratteristiche al suolo.
b) Si risolva l'equazione scritta come e.d.o. sulle caratteristiche.
c) Si dia una condizione su $\alpha > 0$ perché tutta la retta $y = \alpha x$ sia accettabile come curva che porta il dato in un problema di Cauchy per l'equazione data. Si interpreti geometricamente la condizione ottenuta.

4. [30/6/2003 (ex)I] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + xyu_y &= 0\,, \\ u(0, y) &= y\,, \qquad y \in \boldsymbol{R}\,. \end{aligned}$$

5. [30/6/2003 (ex)II] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + xyu_y &= 0\,, \\ u(0, y) &= y^2\,, \qquad y \in \boldsymbol{R}\,. \end{aligned}$$

6. [23/9/2003 (ex)I] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + \frac{1}{2y} u_y &= u + 1 \,, \\ u(1, y) &= 3 \,, \qquad\qquad y > 0 \,, \end{aligned}$$

definita in un opportuno aperto del piano, contenuto in $\{y > 0\}$.

7. [23/9/2003 (ex)II] Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} u_x + u_y &= -u + 1 \,, \\ u(x, 0) &= \pi \,, \qquad\qquad x > 0 \,, \end{aligned}$$

definita in un opportuno aperto del piano, contenuto in $\{x > 0\}$.

8. [20/1/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} (2x + y) u_x - x u_y &= e^u \,, \\ u(s, 1 - s) &= s - 1 \,, \qquad -\infty < s < \infty \,. \end{aligned}$$

9. [20/1/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} (y + 1) u_x + y u_y &= 0 \,, \\ u(s, 1) &= e^s \,, \qquad -\infty < s < \infty \,. \end{aligned}$$

10. [20/1/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} x u_x + 2y u_y &= y \,, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) &= 1 \,, \qquad 0 < \theta < \pi \,. \end{aligned}$$

11. [31/3/2004 (ex)I] Risolvere

$$\begin{aligned} x u_x + x^2 u_y &= 1 \,, \\ u(s, s) &= 2s \,, \qquad 0 < s < 1 \,. \end{aligned}$$

12. [31/3/2004 (ex)II] Risolvere

$$\begin{aligned} y^2 u_x + y u_y &= 3 \,, \\ u(s, s) &= s \,, \qquad 0 < s < 1 \,. \end{aligned}$$

13. [28/6/2004 (ex)I] Risolvere il seguente problema, determinando anche l'insieme di definizione massimale della soluzione:

$$\begin{cases} xu_x + 4yu_y = u^2\,, & \\ u(x,1) = x\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

14. [28/6/2004 (ex)II] Risolvere il seguente problema, determinando anche l'insieme di definizione massimale della soluzione:

$$\begin{cases} 4xu_x + yu_y = u^2\,, & \\ u(-1,y) = y\,, & y > 0\,. \end{cases}$$

15. [4/2/2005 (hw)I] Risolvere

$$\begin{cases} (x+y)u_x + (x-y)u_y = u + 2\,, & \\ u(s,0) = 0\,, & s > 0\,. \end{cases}$$

16. [4/2/2005 (hw)I] Risolvere

$$\begin{cases} xyu_x + xyu_y = 0\,, & \\ u(-1,s) = s^2\,, & s > 0\,. \end{cases}$$

(*Sugg.* Osservare bene l'equazione prima di iniziare i calcoli ...)

17. [4/2/2005 (hw)I] Risolvere

$$\begin{cases} yu_x + (2x+y)u_y = \dfrac{1}{u}\,, & \\ u(0,s^2) = s^2\,, & s > 0\,. \end{cases}$$

18. [23/6/2005 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + xu_y &= \frac{1}{u}\,, \\ u(0,s) &= s^2\,, \qquad 0 < s < 2\,, \end{aligned}$$

e trovare il più grande aperto ove è possibile definire la soluzione, dimostrando che esso giace in un semipiano della forma $\{x > x_0\}$, con $0 > x_0 > -\infty$.

19. [23/6/2005 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} yu_x - u_y &= -\frac{1}{u}\,, \\ u(s,0) &= -s^2\,, \qquad -1 < s < 0\,, \end{aligned}$$

e trovare il più grande aperto ove è possibile definire la soluzione, dimostrando che esso giace in un semipiano della forma $\{y > y_0\}$, con $0 > y_0 > -\infty$.

20. [16/9/2005 (ex)I] Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_x + xu_y = 0\,, \\ u(0,y) = \dfrac{1}{y}\,, \qquad y > 0\,. \end{cases}$$

21. [16/9/2005 (ex)II] Risolvere il problema

$$\begin{cases} yu_x + u_y = 0\,, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{x+1}\,, \qquad x > 0\,. \end{cases}$$

22. [15/12/2005 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_x + u_y &= e^u\,, \\ u(x,0) &= x - 1\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

e il più grande aperto ove u è definita.

23. [6/2/2006 (hw)I] Risolvere

$$\begin{cases} e^y u_x + xe^{-y} u_y = x\,, \\ u(s, \ln 2s) = s\,, \qquad 1 < s < \infty\,. \end{cases}$$

24. [7/4/2006 (ex)I] Risolvere

$$\begin{aligned} 2u_x + (6 + 2\cos x)u_y &= 0\,, \\ u(0,s) &= s^2\,, \qquad 0 < s < 3\,. \end{aligned}$$

Trovare

$$\sup_{\Omega} u\,,$$

ove Ω è l'aperto massimale di definizione della soluzione u.

25. [7/4/2006 (ex)II] Risolvere

$$
\begin{aligned}
(9+3\sin y)u_x - 3u_y &= 0\,, \\
u(s,0) &= s^3\,, \qquad 0 < s < 2\,.
\end{aligned}
$$

Trovare

$$\sup_{\Omega} u\,,$$

ove Ω è l'aperto massimale di definizione della soluzione u.

26. [20/4/2006 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
u_x + xu_y &= e^{2u}\,, \\
u(s,s^2) &= s\,, \qquad 0 < s < 1\,,
\end{aligned}
$$

determinando anche l'aperto massimale di definizione della soluzione.

27. [20/4/2006 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
yu_x - u_y &= -e^{u}\,, \\
u(s^2,s) &= s^2\,, \qquad -1 < s < 0\,,
\end{aligned}
$$

determinando anche l'aperto massimale di definizione della soluzione.

28. [6/7/2006 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
xu_x - 2(1-y)u_y &= xu\,, \\
u(s,0) &= s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,.
\end{aligned}
$$

Determinare anche l'aperto massimale di definizione della soluzione.

29. [6/7/2006 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
2(1-x)u_x - yu_y &= yu\,, \\
u(0,s) &= -s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,.
\end{aligned}
$$

Determinare anche l'aperto massimale di definizione della soluzione.

30. [20/9/2006 (ex)I] Risolvere

$$
\begin{aligned}
xu_x + u_y &= u(1-u)\,, \\
u(s,0) &= \frac{1}{2}\,, \qquad -\infty < s < \infty\,.
\end{aligned}
$$

31. [15/12/2006 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} 2xu_x - u_y &= -u^2 \,, \\ u(s, \ln s) &= 1 \,, \qquad 0 < s < \infty \,, \end{aligned}$$

specificando l'aperto massimale di definizione Ω della soluzione.
Si dimostri anche che, in Ω, u non cambia mai segno.

32. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} yu_x + (x - 2y)u_y &= y \,, \\ u(s, 0) &= s \,, \qquad 0 < s < \infty \,. \end{aligned}$$

[*Sugg.*: al momento di tornare alle variabili (x, y) non sarà necessario risolvere del tutto il sistema.]

33. [2/4/2007 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} (y - 2x)u_x + xu_y &= x \,, \\ u(0, s) &= s \,, \qquad 0 < s < \infty \,. \end{aligned}$$

[*Sugg.*: al momento di tornare alle variabili (x, y) non sarà necessario risolvere del tutto il sistema.]

34. [12/7/2007 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x - yu_y &= e^u \,, \\ u(s, s) &= s \,, \qquad s > 0 \,, \end{aligned}$$

specificandone l'aperto massimale di definizione Ω e dimostrando che

$$\Omega \subset \{(x, y) \mid 0 < x < ye^2\} \,.$$

35. [12/7/2007 (ex)II] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x - yu_y &= e^{-u} \,, \\ u(s, s) &= -s \,, \qquad s > 0 \,, \end{aligned}$$

specificandone l'aperto massimale di definizione Ω e dimostrando che

$$\Omega \subset \{(x, y) \mid x > ye^{-2} > 0\} \,.$$

36. [20/9/2007 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} xu_x + 2yu_y &= xu\,, \\ u(1,s) &= f(s)\,, \qquad -1 < s < 1\,, \end{aligned}$$

ove $f \in C^1((-1,1))$, specificandone l'aperto massimale di definizione, e trovando la condizione necessaria e sufficiente su f perché u sia limitata su Ω.

37. [14/12/2007 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + \cos x u_y &= 2\,, \\ u(s,\cos s) &= s\,, \qquad -\frac{\pi}{4} < s < \frac{3}{4}\pi\,. \end{aligned}$$

Si dimostri che il dominio massimale Ω di u è contenuto in una striscia

$$-\infty < -y_0 < y < y_0 < \infty\,.$$

38. [28/3/2008 (ex)I] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} x(1-x)u_x + u_y &= y\,, \\ u(a,s) &= s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,, \end{aligned}$$

ove $0 < a < 1$. Determinare l'aperto massimale Ω di esistenza della soluzione u.

39. [28/3/2008 (ex)II] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} -u_x + y(1-y)u_y &= -x\,, \\ u(s,a) &= -s\,, \qquad -\infty < s < \infty\,, \end{aligned}$$

ove $0 < a < 1$. Determinare l'aperto massimale Ω di esistenza della soluzione u.

40. [14/7/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} x^2u_x + (x-1)u_y &= x\,, \\ u(s,s) &= s - s^{-1}\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

41. [14/7/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} (1-y)u_x + y^2u_y &= y\,, \\ u(-s,s) &= s - s^{-1}\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

42. [16/9/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} \sin y u_x + 2u_y &= \sqrt{u}\,, \\ u(s,0) &= s\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

43. [16/9/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} 2u_x + \frac{1}{3}\sin x u_y &= \sqrt{u}\,, \\ u(0,s) &= 3s\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

250. Edp del I ordine: trasformazioni di coordinate

1. [3/2/2003 (hw)I] Risolvere il problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= x^2 + y^2\,, \\ u(x,y) &= x\,, \qquad \text{su } x^2 + y^2 = 1\,, \end{aligned}$$

e mostrare che la soluzione non è $C^1(\boldsymbol{R}^2)$.

2. [3/2/2003 (hw)I] Risolvere il problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= 2xy\,, \\ u(x,y) &= 1\,, \qquad \text{su } x^2 + y^2 = 1\,, \end{aligned}$$

e mostrare che la soluzione non è $C^1(\boldsymbol{R}^2)$.

3. [3/2/2003 (hw)I] Risolvere il problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= 2xy\,, \\ u(x,y) &= xy\,, \qquad \text{su } x^2 + y^2 = 1\,, \end{aligned}$$

e mostrare che la soluzione è $C^1(\boldsymbol{R}^2)$.

4. [16/4/2003 (ex)I] Calcolare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= -u\sqrt{x^2 + y^2}\,, \\ u(x,y) &= \pi\,, \qquad x^2 + y^2 = 4\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che è continua in $\boldsymbol{R}^2$, ma non di classe $C^1(\boldsymbol{R}^2)$. (*Sugg.* Considerare la particolare geometria del problema.)

5. [16/4/2003 (ex)II] Calcolare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} &xu_x + yu_y = -u\,, \\ &u(x,y) = \pi\,, \qquad x^2+y^2 = 4\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che non è continua in $\boldsymbol{R}^2$. (*Sugg.* Considerare la particolare geometria del problema.)

6. [20/1/2004 (hw)I] Trovare la soluzione definita nel semipiano $x > 0$ di

$$\begin{aligned} &yu_x - xu_y = x + 1\,, \\ &u(\sqrt{s}, 0) = s\,, \qquad s > 0\,. \end{aligned}$$

7. [14/4/2004 (ex)I] Trovare una condizione sulla funzione f affinché il seguente problema sia risolubile

$$\begin{aligned} &xu_x + yu_y = f(x,y)\sqrt{x^2+y^2}\,, && 1 < x^2+y^2 < 4\,, \\ &u(x,y) = x\,, && x^2+y^2 = 1\,, \\ &u(x,y) = y\,, && x^2+y^2 = 4\,. \end{aligned}$$

8. [14/4/2004 (ex)II] Trovare una condizione sulla funzione f affinché il seguente problema sia risolubile

$$\begin{aligned} &xu_x + yu_y = f(x,y)\sqrt{x^2+y^2}\,, && 4 < x^2+y^2 < 9\,, \\ &u(x,y) = y\,, && x^2+y^2 = 4\,, \\ &u(x,y) = x\,, && x^2+y^2 = 9\,. \end{aligned}$$

9. [15/9/2004 (ex)I] Calcolare la soluzione di

$$\begin{aligned} &xu_x + yu_y = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, \\ &u(x,y) = y^2\,, \qquad x^2+y^2 = 4\,, x > 0\,, \end{aligned}$$

e trovarne l'aperto massimale di definizione. Esprimere la soluzione sia in coordinate polari che in coordinate cartesiane.

10. [15/9/2004 (ex)I] Risolvere

$$
\begin{aligned}
yu_x - xu_y &= 3x\,, \\
u(x,x) &= \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad x>0\,.
\end{aligned}
$$

11. [15/9/2004 (ex)II] Calcolare la soluzione di

$$
\begin{aligned}
xu_x + yu_y &= x\,, \\
u(x,y) &= y^2\,, \qquad x=1\,,
\end{aligned}
$$

e trovarne l'aperto massimale di definizione. Esprimere la soluzione sia in coordinate polari che in coordinate cartesiane.

12. [15/9/2004 (ex)II] Risolvere

$$
\begin{aligned}
yu_x - xu_y &= 2y\,, \\
u(y,y) &= x^2+y^2\,, \qquad y<0\,.
\end{aligned}
$$

13. [4/2/2005 (hw)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$
(x,y)\cdot\nabla u(x,y) + D^2u(x,y)(x,y)\cdot(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,,
$$

definite in $\boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Qui $D^2u(x,y)$ indica la matrice hessiana:

$$
D^2u(x,y) = \begin{pmatrix} u_{xx}(x,y) & u_{xy}(x,y) \\ u_{xy}(x,y) & u_{yy}(x,y) \end{pmatrix}\,,
$$

e quindi $D^2u(x,y)(x,y)\cdot(x,y)$ la forma quadratica

$$
x^2u_{xx}(x,y) + 2xyu_{xy}(x,y) + y^2u_{yy}(x,y)\,.
$$

(*Sugg.* Passare a coordinate polari, è ovvio).

14. [1/4/2005 (ex)I] Risolvere

$$
\begin{cases}
xu_x + yu_y = 1\,, \\
u(\cos\varphi,\sin\varphi) = \varphi^2\,, \qquad -\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}
\end{cases}
$$

(esprimere la soluzione sia in coordinate polari che cartesiane).

15. [1/4/2005 (ex)II] Risolvere

$$
\begin{cases}
-yu_x + xu_y = 1\,, \\
u(x,0) = x\,, \qquad 0<x<1
\end{cases}
$$

(esprimere la soluzione sia in coordinate polari che cartesiane).

16. [14/4/2005 (ex)I] Si determini $a \in \boldsymbol{R}$ in modo che il problema

$$
\begin{aligned}
xu_x + yu_y &= a\frac{y}{x}\,, && \text{in } \Omega,\\
u(x,y) &= 0\,, && x^2+y^2 = 1\,, 0<y<x\,,\\
u(x,y) &= \frac{y}{x}\,, && x^2+y^2 = 4\,, 0<y<x\,,
\end{aligned}
$$

abbia soluzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$, ove

$$
\Omega = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\,, 0<y<x\}\,.
$$

17. [14/4/2005 (ex)II] Si determini $a \in \boldsymbol{R}$ in modo che il problema

$$
\begin{aligned}
-yu_x + xu_y &= a(x^2+y^2)\,, && \text{in } \Omega,\\
u(x,0) &= 0\,, && 1<x<2\,,\\
u(x,x) &= 2x^2\,, && \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \sqrt{2}\,,
\end{aligned}
$$

abbia soluzione $u \in C^1(\overline{\Omega})$, ove

$$
\Omega = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\,, 0<y<x\}\,.
$$

18. [23/6/2005 (ex)I] Dimostrare che ogni soluzione di

$$
\frac{xu_x + yu_y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -yu_x + xu_y\,,
$$

in $\Omega = \{(x,y) \mid x > 0\}$ si può scrivere come

$$
u(x,y) = f\Big(\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big)\,,
$$

per una funzione $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ opportuna.

19. [23/6/2005 (ex)II] Dimostrare che ogni soluzione di

$$
xu_x + yu_y = (yu_x - xu_y)\sqrt{x^2+y^2}\,,
$$

in $\Omega = \{(x,y) \mid x > 0\}$ si può scrivere come

$$
u(x,y) = f\Big(\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big)\,,
$$

per una funzione $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ opportuna.

20. [16/9/2005 (ex)I] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= (2\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad && x^2+y^2 > 1\,, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) &= u_0(\theta)\,, && 0 \le \theta \le \pi\,, \end{aligned}$$

ove u_0 è una qualunque funzione in $C([0,\pi])$, soddisfa

$$\lim_{r\to\infty} u(r\cos\theta, r\sin\theta) = u_0(\theta)\,,$$

per ogni fissato $\theta \in [0,\pi]$.

21. [16/9/2005 (ex)II] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= \sqrt{x^2+y^2}\,e^{1-\sqrt{x^2+y^2}}\,, \qquad && x^2+y^2 > 1\,, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) &= u_0(\theta)\,, && 0 \le \theta \le \pi\,, \end{aligned}$$

ove u_0 è una qualunque funzione in $C([0,\pi])$, soddisfa

$$\lim_{r\to\infty} u(r\cos\theta, r\sin\theta) = u_0(\theta) + 1\,,$$

per ogni fissato $\theta \in [0,\pi]$.

22. [15/12/2005 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni di

$$xu_x + yu_y = u + 1\,, \qquad x^2 + y^2 > 0\,.$$

23. [6/2/2006 (hw)I] Trovare una soluzione in un aperto Ω che includa la curva

$$\gamma = \{(s\cos s, s\sin s) \mid 2\pi < s < 6\pi\}$$

che porta il dato, del problema

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= 2u\,, \\ u(s\cos s, s\sin s) &= s\,, \qquad 2\pi < s < 6\pi\,. \end{aligned}$$

24. [7/4/2006 (ex)I] Risolvere

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= x + y\,, \\ u(2, s) &= 1\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

esprimendo la soluzione sia in coordinate cartesiane che polari. Specificare l'aperto massimale di definizione della soluzione.

25. [7/4/2006 (ex)II] Risolvere

$$
\begin{aligned}
xu_x + yu_y &= y - x \,, \\
u(s, -1) &= 0 \,, \qquad\qquad s \in \boldsymbol{R} \,,
\end{aligned}
$$

esprimendo la soluzione sia in coordinate cartesiane che polari. Specificare l'aperto massimale di definizione della soluzione.

26. [20/4/2006 (ex)I] Si considerino tutte le soluzioni di

$$
\begin{aligned}
xu_x + yu_y &= f(\sqrt{x^2 + y^2}) \,, \\
u(\cos\varphi, \sin\varphi) &= u_0(\varphi) \,, \qquad\qquad 0 < \varphi < \pi \,.
\end{aligned}
$$

È possibile scegliere $f \in C^0((0, \infty))$ indipendente da u_0 in modo che valga una sola delle due condizioni

$$
\text{A)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = 0 \,, \qquad \text{B)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = +\infty \,,
$$

per tutti gli $u_0 \in C^1([0, \pi])$.
Dire quale delle due condizioni A) e B) è possibile soddisfare, dando un esempio esplicito di f.

27. [20/4/2006 (ex)II] Si considerino tutte le soluzioni di

$$
\begin{aligned}
xu_x + yu_y &= \sqrt{x^2 + y^2} f(\sqrt{x^2 + y^2}) u \,, \\
u(\cos\varphi, \sin\varphi) &= u_0(\varphi) \,, \qquad\qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \,.
\end{aligned}
$$

È possibile scegliere $f \in C^0((0, \infty))$ indipendente da u_0 in modo che valga una sola delle due condizioni

$$
\text{A)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = +\infty \,, \qquad \text{B)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x, y) = 0 \,,
$$

per tutti gli $u_0 \in C^1([-\pi/2, \pi/2])$.
Dire quale delle due condizioni A) e B) è possibile soddisfare, dando un esempio esplicito di f.

28. [6/7/2006 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$
\begin{aligned}
-yu_x + xu_y &= \sin x \,, \\
u(s, 0) &= s \,, \qquad\qquad s > 0 \,.
\end{aligned}
$$

Rappresentare la soluzione sia in coordinate cartesiane che polari nel semipiano $x > 0$.

29. [6/7/2006 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= e^y \,, \\ u(s,0) &= s^2 \,, \qquad s > 0 \,. \end{aligned}$$

Rappresentare la soluzione sia in coordinate cartesiane che polari nel semipiano $x > 0$.

30. [2/4/2007 (ex)I] Trovare tutte le possibili costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$, tali che esista una soluzione $u \in C^1(\boldsymbol{R}^2)$ di

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= ax^2 - by^2 \,, \\ u(s,0) &= 0 \,, \qquad\qquad 0 < s < \infty \,, \end{aligned}$$

e determinare la funzione u.

31. [2/4/2007 (ex)II] Trovare tutte le possibili costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$, tali che esista una soluzione $u \in C^1(\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ di

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= ay - bx^2 \,, \\ u(s,0) &= 0 \,, \qquad\qquad 0 < s < \infty \,, \end{aligned}$$

e determinare la funzione u.

32. [2/4/2007 (ex)I] Trovare tutte le possibili costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$, tali che esista una soluzione $u \in C^1(\boldsymbol{R}^2)$ di

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= a + bx \,, \\ u(s,0) &= 0 \,, \qquad\qquad 0 < s < \infty \,, \end{aligned}$$

e determinare la funzione u.

33. [18/4/2007 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u + 1 \,, \\ u(s,1) &= 0 \,, \qquad\qquad -\infty < s < \infty \,, \end{aligned}$$

esprimendola sia in coordinate polari che cartesiane.

34. [18/4/2007 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u + 2 \,, \\ u(3,s) &= 0 \,, \qquad\qquad -\infty < s < \infty \,, \end{aligned}$$

esprimendola sia in coordinate polari che cartesiane.

35. [12/7/2007 (ex)I] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &xu_x + yu_y = 2u\,, \\ &u(s, 1-s) = s\,, \qquad 0 < s < 1\,. \end{aligned}$$

36. [12/7/2007 (ex)II] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &xu_x + yu_y = u\,, \\ &u(s, 2-s) = s\,, \qquad 0 < s < 2\,. \end{aligned}$$

37. [28/3/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} -yu_x + xu_y &= y\cos x\,, \\ u(s,s) &= 4\,, \qquad 0 < s < \infty\,, \end{aligned}$$

esprimendola sia in coordinate cartesiane che polari.

38. [28/3/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= x\sin y\,, \\ u(s,s) &= 1\,, \qquad 0 < s < \infty\,, \end{aligned}$$

esprimendola sia in coordinate cartesiane che polari.

39. [18/4/2008 (ex)I] Determinare la soluzione $u(x,y)$ del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} (x-1)u_x + (y-1)u_y &= u^2\,, \\ u\big(s, 1-\sqrt{1-(s-1)^2}\big) &= 1\,, \qquad 0 < s < 2\,. \end{aligned}$$

Determinare anche il dominio massimale Ω di definizione della soluzione.

40. [18/4/2008 (ex)II] Determinare la soluzione $u(x,y)$ del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} (x-2)u_x + (y-2)u_y &= u\,, \\ u\big(s, 2-\sqrt{4-(s-2)^2}\big) &= 1\,, \qquad 0 < s < 4\,. \end{aligned}$$

Determinare anche il dominio massimale Ω di definizione della soluzione.

41. [16/9/2008 (ex)I] Scrivere la soluzione del seguente problema:

$$\begin{aligned} (x-1)u_x + (y-2)u_y &= \alpha\,, \\ u(3,s) &= \beta s\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ sono costanti.
Inoltre si trovino i valori di α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ che rendono la soluzione estendibile a tutto il piano come funzione di classe C^1.

42. [16/9/2008 (ex)II] Scrivere la soluzione del seguente problema:

$$
\begin{aligned}
(x+1)u_x + (y-1)u_y &= \alpha\,, \\
u(1,s) &= \beta s\,, \qquad s \in \boldsymbol{R}\,,
\end{aligned}
$$

ove α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ sono costanti.
Inoltre si trovino i valori di α, $\beta \in \boldsymbol{R}$ che rendono la soluzione estendibile a tutto il piano come funzione di classe C^1.

290. Edp del I ordine: modelli

1. [3/2/2003 (hw)I] Si consideri una popolazione di batteri; indichiamo con $n(x,t)$ la densità di batteri rispetto all'età x al tempo t. Cioè, per $0 \le x_1 < x_2$, $t \ge 0$,

$$
\int_{x_1}^{x_2} n(x,t)\,\mathrm{d}x
$$

è il numero di batteri con età compresa tra x_1 e x_2, nell'istante t. Assumiamo

- non nascono nuovi batteri;
- i batteri che hanno età x muoiono con un tasso proporzionale alla loro età x e al loro numero n; sia $\alpha > 0$ la costante di proporzionalità.

1) Dimostrare che n verifica

$$
n_t + n_x = -\alpha x n\,.
$$

[*Sugg.:* $n(x,t+h) - n(x-h,t) = \dots$.]
2) Che dimensioni fisiche hanno n e α?
3) Supponiamo che per $t = 0$, $n(x,0) = c$, $a < x < b$, ove a, b, c sono costanti positive; determinare il numero totale di batteri $N(t)$ dopo un tempo t.
4) È possibile, nel modello matematico qui introdotto, considerare una popolazione di batteri che abbiano tutti la stessa età?

300. Equazione delle onde

1. [6/2/2004 (hw)I] Risolvere

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && -ct < x < ct\,, 0 < t\,,\\
u(-ct,t) &= a(t)\,, && 0 < t\,,\\
u(ct,t) &= b(t)\,, && 0 < t\,.
\end{aligned}
$$

Dare condizioni su a e b perché la soluzione sia $C^2(\overline{Q})$, $Q = \{(x,t) \mid -ct < x < ct\,, 0 < t\}$.

2. [6/2/2004 (hw)I] Risolvere

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && -ct < x < ct\,, 0 < t\,,\\
u_t(-ct,t) &= a(t)\,, && 0 < t\,,\\
u(ct,t) &= b(t)\,, && 0 < t\,.
\end{aligned}
$$

Dare condizioni su a e b perché la soluzione sia $C^2(\overline{Q})$, $Q = \{(x,t) \mid -ct < x < ct\,, 0 < t\}$.

3. [15/9/2004 (ex)I] Scegliere α in modo che il seguente problema abbia soluzioni in $C^1(\overline{\Omega})$, ove $\Omega = \{0 < x < ct, t > 0\}$, e determinarle:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\
u(0,t) &= 0\,, && t \geq 0\,,\\
u_t(ct,t) &= \cos t - \alpha\,, && t \geq 0\,.
\end{aligned}
$$

4. [15/9/2004 (ex)II] Scegliere α in modo che il seguente problema abbia soluzioni in $C^1(\overline{\Omega})$, ove $\Omega = \{0 < x < ct, t > 0\}$, e determinarle:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\
u(0,t) &= 0\,, && t \geq 0\,,\\
u_t(ct,t) &= e^t - \alpha\,, && t \geq 0\,.
\end{aligned}
$$

5. [6/2/2006 (hw)I] Discutere l'unicità di soluzioni $u \in C^2(\overline{\Omega})$ del problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && \text{in } \Omega = \{(x,t) \mid 0 < x < vt\,, t > 0\},\\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(vt,t) &= 0\,, && t > 0\,.
\end{aligned}
$$

Qui $c > 0$, $v \geq c$ sono parametri assegnati.
(Si noti che $u \equiv 0$ è una soluzione. Si tratta di accertare se esistono altre soluzioni.)

6. [18/4/2007 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > ct\,, t > 0\,,\\ u(ct,t) &= t\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && x > 0\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che è unica.

7. [18/4/2007 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > ct\,, t > 0\,,\\ u(ct,t) &= 2t\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && x > 0\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che è unica.

8. [16/9/2008 (ex)I] Si dimostri che se $u \in C^2(\overline{Q})$ soddisfa

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && (x,t) \in Q\,,\\ u_x(ct,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_t(-ct,t) &= 0\,, && t < 0\,, \end{aligned}$$

allora u è costante in Q, ove

$$Q = \{(x,t) \mid -\infty < t < \infty\,, c|t| < x < \infty\}\,.$$

9. [16/9/2008 (ex)II] Si dimostri che se $u \in C^2(\overline{Q})$ soddisfa

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && (x,t) \in Q\,,\\ u_t(ct,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(-ct,t) &= 0\,, && t < 0\,, \end{aligned}$$

allora u è costante in Q, ove

$$Q = \{(x,t) \mid -\infty < t < \infty\,, c|t| < x < \infty\}\,.$$

310. Formula di D'Alembert

1. [30/1/2003 (hw)I] Consideriamo la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & x &\in \boldsymbol{R},\ t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & x &\in \boldsymbol{R}\,,\\ u_t(x,0) &= u_1(x)\,, & x &\in \boldsymbol{R}\,. \end{aligned}$$

Assumiamo che $u_0 \equiv 0$. Dimostrare che, se u_1 è integrabile in $\boldsymbol{R}$, allora esiste, per ogni fissato x,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U_\infty\,,$$

ove la costante U_∞ è indipendente da x.

2. [30/1/2003 (hw)I] a) Dare un esempio di dati u_0, u_1, ciascuno non identicamente nullo, tali che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & x &\in \boldsymbol{R},\ t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & x &\in \boldsymbol{R}\,,\\ u_t(x,0) &= u_1(x)\,, & x &\in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

soddisfi

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } x \text{ fissato.}$$

b) Dare un esempio di dati u_0, u_1, ciascuno non identicamente nullo, tali che la soluzione del problema precedente soddisfi

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } t > 0 \text{ fissato.}$$

3. [30/1/2003 (hw)I] Problema dell'impulso concentrato
Consideriamo la soluzione $u_{\varepsilon,\sigma}$ del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & x &\in \boldsymbol{R},\ t > 0\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & x &\in \boldsymbol{R}\,,\\ u_t(x,0) &= u_1(x)\,, & x &\in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

con i dati $u_0 \equiv 0$ e $u_1(x) = f_{\varepsilon,\sigma}(x)$, ove

$$f_{\varepsilon,\sigma}(x) = \frac{1}{2\varepsilon^\sigma}\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x)\,, \qquad \varepsilon > 0\,.$$

Qui $\sigma > 0$ è fissato. Si scriva la soluzione e se ne calcoli il limite per $\varepsilon \to 0$, per i vari valori di σ. Si colleghino i vari comportamenti al valore di

$$\ell_\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\boldsymbol{R}} f_{\varepsilon,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si discuta in particolare il caso in cui $\ell_\sigma \in (0, \infty)$.

4. [28/6/2004 (ex)I] Determinare $\lambda_0 > 0$ in modo che per ogni $\lambda \in (0, \lambda_0)$ valga

$$|u(x,t) - 1 - t| \le \frac{1}{10}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,, 0 < t < 1\,,$$

ove

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < t\,,\\ u(x,0) &= 1 + \lambda \sin x\,, && -\infty < x < \infty\,,\\ u_t(x,0) &= 1\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

5. [28/6/2004 (ex)II] Determinare $\lambda_0 > 0$ in modo che per ogni $\lambda \in (0, \lambda_0)$ valga

$$|u(x,t) - 2 - 2t| \le \frac{1}{10}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,, 0 < t < 2\,,$$

ove

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < t\,,\\ u(x,0) &= 2 + \lambda e^{-x^2}\,, && -\infty < x < \infty\,,\\ u_t(x,0) &= 2\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

6. [16/9/2005 (ex)I] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= x\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,,\\ u_t(x,0) &= \sin x\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

7. [16/9/2005 (ex)II] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= -\cos x\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ u(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && -\infty < x < \infty\,,\\ u_t(x,0) &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

320. Formula di D'Alembert per problemi al contorno

1. [30/1/2003 (hw)I] Scrivere la soluzione del problema per la corda semi-infinita

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & x > 0,\ t > 0\,,\\
u(x,0) &= \sin x\,, & & x \geq 0\,,\\
u_t(x,0) &= 0\,, & & x > 0\,,\\
u(0,t) &= t\,, & & t \geq 0\,.
\end{aligned}
$$

[*Sugg.:* passare all'incognita $v = u - t$.]

2. [1/4/2003 (ex)I] Calcolare, mediante la formula di D'Alembert, la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, & & 0 < t < \infty\,,\\
u_x(\pi,t) &= 0\,, & & 0 < t < \infty\,,\\
u(x,0) &= \sin x\,, & & 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= \cos(2x)\,, & & 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

Calcolare esplicitamente l'integrale che appare nella formula di D'Alembert.

3. [23/9/2003 (ex)I] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & x > 0\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u(x,0) &= \sin x^2\,, & & x > 0\,,\\
u_t(x,0) &= \sin x\,, & & x > 0\,.
\end{aligned}
$$

4. [23/9/2003 (ex)II] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & x < 0\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\
u(x,0) &= x^2 \operatorname{arctg} x\,, & & x < 0\,,\\
u_t(x,0) &= \cos x\,, & & x < 0\,.
\end{aligned}
$$

5. [6/2/2004 (hw)I] Risolvere

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\ 0 < t\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
u_x(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
u(x,0) &= \sin\frac{x}{4}\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= \sin\frac{x}{2}\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

6. [14/4/2004 (ex)I] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u_x(1,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= 1\,, && 0 < x < 1\,,\\
u_t(x,0) &= 1 - x\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}
$$

7. [14/4/2004 (ex)II] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(1,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= 1\,, && 0 < x < 1\,,\\
u_t(x,0) &= \sin(\pi x)\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}
$$

8. [1/4/2005 (ex)I] Risolvere con la formula di D'Alembert il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x\,, 0 < t\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
u(x,0) &= x\,, && 0 < x\,,\\
u_t(x,0) &= x^2\,, && 0 < x\,.
\end{aligned}
$$

9. [1/4/2005 (ex)II] Risolvere con la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x\,, 0 < t\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= x^3\,, && 0 < x\,, \\ u_t(x,0) &= x^4\,, && 0 < x\,. \end{aligned}$$

10. [14/4/2005 (ex)I] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \cos(x^2)\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= \sin(x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

11. [14/4/2005 (ex)II] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \cos(x)\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= \sin(x^2)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

12. [15/12/2005 (ex)I] Scrivere mediante la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos x\,, && 0 < x < 1\,, \\ u_t(x,0) &= \sin^2 x\,, && 0 < x < 1\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(1,t) &= 0\,, && t > 0\,. \end{aligned}$$

13. [20/4/2006 (ex)I] Risolvere, usando la formula di D'Alembert,

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= x^3\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= \sin(x+1)\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

14. [20/4/2006 (ex)II] Risolvere, usando la formula di D'Alembert,

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= \cos(2+x)\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= x^4\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

15. [6/7/2006 (ex)I] Determinare una condizione su $\varepsilon > 0$ che garantisca che

$$|u(1,1) - v(1,1)| < \frac{1}{100}\,,$$

ove u e v risolvono

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0\,, && x > 0\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, & v_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= \cos x^2\,, & v(x,0) &= \cos(x^2+\varepsilon)\,, && x > 0\,,\\
u_t(x,0) &= 0\,, & v_t(x,0) &= 0\,, && x > 0\,.
\end{aligned}$$

16. [6/7/2006 (ex)II] Determinare una condizione su $\varepsilon > 0$ che garantisca che

$$|u(1,1) - v(1,1)| < \frac{1}{100}\,,$$

ove u e v risolvono

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0\,, && x > 0\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, & v_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= \sin x^4\,, & v(x,0) &= \sin(x^4+\varepsilon)\,, && x > 0\,,\\
u_t(x,0) &= 0\,, & v_t(x,0) &= 0\,, && x > 0\,.
\end{aligned}$$

17. [20/9/2006 (ex)I] Risolvere, usando la formula di D'Alembert, il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 1 < x\,, 0 < t\,, \\ u_x(1,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= x\,, && 1 < x\,, \\ u_t(x,0) &= \cos(x^2)\,, && 1 < x\,. \end{aligned}$$

18. [15/12/2006 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

usando la formula di D'Alembert.

19. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > 0\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 1\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= x\,, && x > 0\,, \\ u_t(x,0) &= x && x > 0\,. \end{aligned}$$

20. [2/4/2007 (ex)II] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > 0\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 2\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 2x\,, && x > 0\,, \\ u_t(x,0) &= x && x > 0\,. \end{aligned}$$

21. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere mediante la formula di D'Alembert il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x > 0\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= x\,, && x > 0\,, \\ u_t(x,0) &= x && x > 0\,. \end{aligned}$$

22. [20/9/2007 (ex)I] Scrivere mediante l'opportuna formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && x < -1\,, t > 0\,, \\ u_x(-1,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= x\,, && x < -1\,, \\ u_t(x,0) &= x \sin x\,, && x < -1\,. \end{aligned}$$

23. [28/3/2008 (ex)I] Trovare con la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos\frac{x}{2}\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

24. [28/3/2008 (ex)II] Trovare con la formula di D'Alembert la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x\Big(\frac{\pi}{2},t\Big) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos\frac{x}{2}\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \\ u_t(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

420. Applicazioni del principio di max a prb per eq. del calore

1. [16/9/2005 (ex)I] Dimostrare che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ u(1,t) &= 1\,, & & t > 0\,, \\ u(x,0) &= x\,, & & 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t) - 1|\, t^{100} = 0\,.$$

2. [16/9/2005 (ex)II] Dimostrare che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < 2\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ u(2,t) &= 3\,, & & t > 0\,, \\ u(x,0) &= \frac{3}{2}x\,, & & 0 < x < 2\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t) - 3|\, t^{100} = 0\,.$$

3. [15/12/2005 (ex)I] Determinare il massimo nel rettangolo $x \in [0,\pi]$, $t \in [0,T]$ della soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, 0 < t < T\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, & & 0 < t < T\,, \\ u(0,t) &= 0\,, & & 0 < t < T\,, \\ u(x,0) &= \cos x - 1\,, & & 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

4. [7/4/2006 (ex)I] Determinare il massimo su $Q_T = [0,2] \times [0,T]$ della soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= -1\,, & & 0 < x < 2\,, 0 < t < T\,, \\ u(0,t) &= -t\,, & & 0 < t < T\,, \\ u_x(2,t) &= 0\,, & & 0 < t < T\,, \\ u(x,0) &= x\,, & & 0 < x < 2\,. \end{aligned}$$

5. [7/4/2006 (ex)II] Determinare il minimo su $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ della soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 2\,, & & 0 < x < 1\,, 0 < t < T\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, & & 0 < t < T\,,\\ u(1,t) &= 3 + t\,, & & 0 < t < T\,,\\ u(x,0) &= 3x\,, & & 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

6. [20/4/2006 (ex)I] La soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\ u(1,t) &= 2\,, & & t > 0\,,\\ u(x,0) &= \frac{8}{\pi}\operatorname{arctg} x\,, & & 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

soddisfa per due opportune costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = ax + b\,, \qquad 0 < x < 1\,.$$

Determinare a e b, e dimostrare questa relazione di limite.

7. [20/4/2006 (ex)II] La soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < 2\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 1\,, & & t > 0\,,\\ u(2,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\ u(x,0) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\,, & & 0 < x < 2\,, \end{aligned}$$

soddisfa per due opportune costanti a, $b \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = ax + b\,, \qquad 0 < x < 2\,.$$

Determinare a e b, e dimostrare questa relazione di limite.

8. [6/7/2006 (ex)I] Sia u la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & & 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\ u(\pi,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\ u(x,0) &= (\pi - x)^2\,, & & 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

9. [6/7/2006 (ex)II] Sia u la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= -xe^x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

10. [20/9/2006 (ex)I] Sia u la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 1\,, && t > 0\,,\\ u\Big(\frac{\pi}{2},t\Big) &= 2\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= \cos x + \frac{4x}{\pi}\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1 + \frac{2x}{\pi}\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

11. [20/9/2007 (ex)I] Si considerino le soluzioni dei due problemi

$$\begin{aligned} u_{1t} - u_{1xx} &= 0\,, & u_{2t} - u_{2xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\ u_{1x}(0,t) &= 0\,, & u_{2x}(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_{1x}(L,t) &= 0\,, & u_2(L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_1(x,0) &= u_0(x)\,, & u_2(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

ove $u_0 \in C([0,L])$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, $u_0(0) = u_0(L) = 0$.
Dimostrare che vale una delle due disuguaglianze:

$$u_1(x,t) \geq u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } 0 < x < L,\ t > 0,$$

oppure
$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } 0 < x < L,\ t > 0.$$

12. [14/12/2007 (ex)I] Trovare la condizione necessaria e sufficiente su $L > 0$ perché la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(L,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= L - x\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

soddisfi

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < L\,.$$

13. [28/3/2008 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= ax\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(L,t) &= b\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

ove a, b sono costanti positive.
Si dimostri che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,, \qquad 0 < x < L\,,$$

e si identifichi la funzione ω.

14. [28/3/2008 (ex)II] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= a\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= b\,, && t > 0\,, \\ u(L,t) &= b\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

ove a, b sono costanti positive.
Si dimostri che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,, \qquad 0 < x < L\,,$$

e si identifichi la funzione ω.

15. [18/4/2008 (ex)I] Dimostrare che la soluzione u del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= \alpha - u\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos x\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

ha limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,,$$

e calcolare $\omega(x)$. Qui $\alpha > 0$ è una costante.

16. [18/4/2008 (ex)II] Dimostrare che la soluzione u del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= \alpha - u\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \cos x\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

ha limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \omega(x)\,,$$

e calcolare $\omega(x)$. Qui $\alpha > 0$ è una costante.

17. [14/7/2008 (ex)I] Dimostrare che la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= a\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(L,t) &= b\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$0 \le u(x,1) \le a + b\,, \qquad 0 < x < L\,.$$

Qui a, b, L sono costanti positive.

18. [14/7/2008 (ex)II] Dimostrare che la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= at\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= b\,, && t > 0\,, \\ u(L,t) &= b\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$0 \le u(x,1) \le \frac{a}{2} + b\,, \qquad 0 < x < L\,.$$

Qui a, b, L sono costanti positive.

430. Applicazioni del principio di max a prb per eq. di Laplace

1. [1/4/2003 (ex)I] Si consideri la soluzione u del problema per l'equazione di Laplace

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < y < 1\,, \\ u(0,y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,, \\ u(1,y) &= e^y - ye\,, && 0 < y < 1\,, \\ u(x,0) &= x\,, && 0 < x < 1\,, \\ u(x,1) &= 0\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

Determinare una costante $c \in (0,1)$ tale che

$$u\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) \le c\,.$$

(*Sugg.* Usare una soprasoluzione v per il problema risolto da u.)

2. [6/7/2006 (ex)I] Dimostrare che $u \ge v$ in $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$, ove u e v risolvono rispettivamente

$$\begin{aligned} \Delta u &= -1\,, & \Delta v &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,, \\ u(0,y) &= 0\,, & v(0,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u_x(\pi,y) &= 0\,, & v(\pi,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(x,0) &= x\,, & v(x,0) &= \sin x\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u(x,\pi) &= 2x\,, & v(x,\pi) &= 2\sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

3. [6/7/2006 (ex)II] Dimostrare che $u \le v$ in $\Omega = (0,\pi) \times (0,\pi)$, ove u e v risolvono rispettivamente

$$\begin{aligned} \Delta u &= 2\,, & \Delta v &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,, \\ u(0,y) &= -y\,, & v(0,y) &= -\sin y\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(\pi,y) &= -y^2\,, & v(\pi,y) &= -(\sin y)^2\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & v(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_y(x,\pi) &= 0\,, & v(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

4. [15/12/2006 (ex)I] Trovare il massimo su $\overline{Q}$ della soluzione u di

$$\begin{aligned} \Delta u &= \pi\,, && \text{in } Q, \\ u(x,y) &= \cos x\,, && \text{su } x^2 + 2y^2 = 1, \\ u(x,y) &= \sin y\,, && \text{su } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{aligned}$$

ove

$$Q = \Big\{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 > 1\,, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\Big\}\,.$$

5. [18/4/2007 (ex)I] Trovare tutti i punti di massimo assoluto della soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 10\,, & &\text{in } \Omega = \Big\{\frac{\pi^2}{16} < x^2 + y^2 < \pi^2\Big\}, \\ u(x,y) &= \sin y\,, & &x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{16}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) &= 0\,, & &x^2 + y^2 = \pi^2\,. \end{aligned}$$

6. [18/4/2007 (ex)II] Trovare tutti i punti di minimo assoluto della soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= -1\,, & &\text{in } \Omega = \{1 < x^2 + y^2 < 4\}, \\ u(x,y) &= \cos\frac{\pi y}{8}\,, & &x^2 + y^2 = 4\,, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) &= 0\,, & &x^2 + y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

7. [12/7/2007 (ex)I] Dimostrare che la soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & &0 < x < 2\,, 0 < y < 1\,, \\ u(0,y) &= 0\,, & &0 < y < 1\,, \\ u(2,y) &= 2y\,, & &0 < y < 1\,, \\ u(x,1) &= \frac{x^2}{2}\,, & &0 < x < 2\,, \\ u_y(x,0) &= 0\,, & &0 < x < 2\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$u(1,y) < 1\,, \qquad 0 < y < 1\,.$$

8. [12/7/2007 (ex)II] Dimostrare che la soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & &0 < x < 2\,, 0 < y < 1\,, \\ u(0,y) &= 0\,, & &0 < y < 1\,, \\ u_x(2,y) &= 0\,, & &0 < y < 1\,, \\ u(x,1) &= \frac{x}{2}\,, & &0 < x < 2\,, \\ u(x,0) &= 0\,, & &0 < x < 2\,, \end{aligned}$$

soddisfa
$$u\Big(x,\frac{1}{2}\Big)<\frac{1}{2}\,,\qquad 0<x<2\,.$$

9. [18/4/2008 (ex)I] Sia u la soluzione del problema
$$\begin{aligned}\Delta\, u &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\ u(x,y) &= \operatorname{arctg}(|x|^3)\,, && \text{su } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\,,\\ \frac{\partial u}{\partial\nu}(x,y) &= 0\,, && \text{su } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4\,,\end{aligned}$$
ove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e
$$\Omega=\Big\{(x,y)\mid 1<\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<4\Big\}\,.$$
Trovare tutti i punti di massimo e di minimo di u in $\overline{\Omega}$.

10. [18/4/2008 (ex)II] Sia u la soluzione del problema
$$\begin{aligned}\Delta\, u &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\ u(x,y) &= \frac{1}{1+|y|}\,, && \text{su } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\,,\\ \frac{\partial u}{\partial\nu}(x,y) &= 0\,, && \text{su } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4\,,\end{aligned}$$
ove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e
$$\Omega=\Big\{(x,y)\mid 1<\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<4\Big\}\,.$$
Trovare tutti i punti di massimo e di minimo di u in $\overline{\Omega}$.

11. [14/7/2008 (ex)I] Si considerino le soluzioni (radiali) $u\in C^2(\{x^2+y^2\geq 1\})$ del seguente problema:
$$\begin{aligned}\Delta\, u &= \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^{-\alpha}\,, && \sqrt{x^2+y^2}>1\,,\\ \nabla\, u(x,y)\cdot\nu &= 0\,, && \sqrt{x^2+y^2}=1\,,\end{aligned}$$
ove ν è la normale a $\sqrt{x^2+y^2}=1$, e $\alpha>0$ è assegnata ad arbitrio.
Si dimostri che
$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}u(x,y)=\infty\,.$$

12. [14/7/2008 (ex)II] Si considerino le soluzioni (radiali) $u \in C^2(\{x^2+y^2 \geq 1\})$ del seguente problema:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}, \qquad & \sqrt{x^2+y^2} > 2, \\ \nabla u(x,y) \cdot \nu &= 0, \qquad & \sqrt{x^2+y^2} = 2, \end{aligned}$$

ove ν è la normale a $\sqrt{x^2+y^2} = 2$, e $\alpha < 0$ è assegnata ad arbitrio.
Si dimostri che

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} u(x,y) = \infty .$$

470. Semplici problemi al contorno per l'equazione del calore

1. [17/2/2003 (hw)I] a) Dimostrare, usando il principio del massimo, che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \cos(xt), \qquad & 0 < x < 10, 0 < t \\ u(x,0) &= 0, \qquad & 0 \leq x \leq 10, \\ u(0,t) &= 0, \qquad & 0 \leq t, \\ u(10,t) &= 0, \qquad & 0 \leq t, \end{aligned}$$

soddisfa $|u(x,t)| \leq t$.
b) Mostrare anche che la soluzione non può essere di classe $C^{2,1}$ fino sulla frontiera parabolica.

2. [17/2/2003 (hw)I] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad & 0 < x < L, 0 < t \\ u(x,0) &= x, \qquad & 0 < x < L, \\ u(0,t) &= 0, \qquad & 0 < t, \\ u(L,t) &= M, \qquad & 0 < t, \end{aligned}$$

con $M > L$, soddisfa $0 \leq u_x(0,t) \leq M/L$ (si supponga che u sia di classe C^1 fino su $x = 0$).

3. [17/2/2003 (hw)I] Una piastra a pareti piane e parallele $x = 0$, $x = L$, è all'istante iniziale $t = 0$ a temperatura $u(x,0) = c(L-x)$, per $0 \leq x \leq L$. Possiamo assumere simmetria piana.
La parete $x = 0$ è adiabatica, quella $x = L$ è mantenuta a temperatura nulla.
Trovare una stima per $u(x,t)$ per tempi grandi, e dare dei valori di L per cui il valore di $u(0,t)$ cala almeno del 50% nell'intervallo di tempo $(0,1)$.

4. [16/4/2003 (ex)I] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\,, 0 < t < \infty\,, \\ u\Big(-\frac{\pi}{4}, t\Big) &= 1\,, & 0 < t\,, \\ u\Big(\frac{\pi}{4}, t\Big) &= 1\,, & 0 < t\,, \\ u(x,0) &= e^{|x| - \frac{\pi}{4}}\,, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\,, \end{aligned}$$

allora per ogni $x \in (-\pi/4, \pi/4)$ fissato

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1\,.$$

5. [16/4/2003 (ex)II] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= 3\,, & 0 < t\,, \\ u\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 3\,, & 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 3 - x\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \end{aligned}$$

allora per ogni $x \in (0, \pi/2)$ fissato

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 3\,.$$

6. [30/6/2003 (ex)I] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= e^{-\frac{t}{2}}\,, & 0 < t < \infty\,, \\ u(\pi,t) &= e^{-\frac{t}{2}}\,, & 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= 1 + \sin x\,, & 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

allora per ogni $x \in (0, \pi)$ fissato

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,.$$

7. [30/6/2003 (ex)II] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= 2e^{-\frac{t}{3}}\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(\pi,t) &= 2e^{-\frac{t}{3}}\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= 2 + \sin x\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

allora per ogni $x \in (0,\pi)$ fissato

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,.$$

8. [23/9/2003 (ex)I] Dimostrare che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 5\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u_x(5,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= 25 - (x-5)^2\,, && 0 < x < 5\,, \end{aligned}$$

soddisfa per ogni $x \in (0,5)$, $\alpha > 0$ fissati

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)t^\alpha = 0\,.$$

9. [23/9/2003 (ex)II] Dimostrare che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && -\frac{\pi}{2} < x < 0\,, 0 < t < \infty\,, \\ u\Big(-\frac{\pi}{2},t\Big) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= \frac{\pi^2}{4} - x^2\,, && -\frac{\pi}{2} < x < 0\,, \end{aligned}$$

soddisfa per ogni $x \in (-\pi/2,0)$, $\alpha > 0$ fissati

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)t^\alpha = 0\,.$$

10. [31/3/2004 (ex)I] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(1,t) &= \pi\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \pi x\,, && 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{0<x<1} |u(x,t) - \pi| = 0\,.$$

11. [31/3/2004 (ex)II] Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 5\,, && t > 0\,,\\ u_x(1,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= x^2 + 5\,, && 0 < x < 1\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{0<x<1} |u(x,t) - 5| = 0\,.$$

12. [14/4/2004 (ex)I] Consideriamo le soluzioni u_1 e u_2 di

$$\begin{aligned} u_{1t} - u_{1xx} &= 4u\,, & u_{2t} - u_{2xx} &= 3u\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u_1(0,t) &= 0\,, & u_{2x}(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_1(\pi,t) &= 0\,, & u_{2x}(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_1(x,0) &= \sin x\,, & u_2(x,0) &= \cos x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni fissato $0 < x < \pi$ esiste un t_x tale che

$$u_1(x,t) > u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } t > t_x.$$

13. [14/4/2004 (ex)II] Consideriamo le soluzioni u_1 e u_2 di

$$\begin{aligned} u_{1t} - u_{1xx} &= 5u\,, & u_{2t} - u_{2xx} &= \frac{u}{2}\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,\\ u_{1x}(0,t) &= 0\,, & u_2(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_1\Big(\frac{\pi}{2},t\Big) &= 0\,, & u_{2x}\Big(\frac{\pi}{2},t\Big) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_1(x,0) &= \cos x\,, & u_2(x,0) &= \sin x\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Dimostrare che per ogni fissato $0 < x < \pi/2$ esiste un t_x tale che

$$u_1(x,t) > u_2(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } t > t_x.$$

14. [14/4/2005 (ex)I] Trovare il limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,,$$

ove u risolve il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(1,t) &= 1\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

[Suggerimento: ridursi a un problema con dati omogenei al contorno.]

15. [14/4/2005 (ex)II] Trovare il limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,,$$

ove u risolve il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 2\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= \pi\,, && 0 < t\,, \\ u(2,t) &= \frac{\pi}{2}\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \pi\Big(1 - \frac{x^3}{16}\Big)\,, && 0 < x < 2\,. \end{aligned}$$

[Suggerimento: ridursi a un problema con dati omogenei al contorno.]

16. [18/4/2007 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

- Dimostrare che la soluzione è limitata su $(0,\pi)\times(0,\infty)$, per ogni scelta del dato $u_0 \in C([0,\pi])$.
- Trovare un dato $u_0 \in C([0,\pi])$, con $u_0 \not\equiv 0$, tale che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

17. [18/4/2007 (ex)II] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 2u\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Trovare

1. un esempio di dato iniziale $u_0 \in C([0, \pi])$ per cui la soluzione diviene illimitata per $t \to \infty$;

2. un esempio di dato iniziale $u_0 \in C([0, \pi])$, $u_0 \not\equiv 0$, per cui la soluzione rimane limitata su $(0, \pi) \times (0, \infty)$.

480. Semplici problemi al contorno per l'equazione di Laplace

1. [4/3/2003 (hw)I] Considerare la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < 1\,, \\ u(0, y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,, \\ u(x, 1) &= 4\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u(\pi, y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,, \\ u(x, 0) &= \sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Determinare una stima inferiore per $u(\pi/2, 1/2)$.

2. [1/4/2003 (ex)I] Calcolare la soluzione del problema per l'equazione di Laplace nella corona circolare

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 1 < x^2 + y^2 < 4\,, \\ u(x, y) &= 1\,, && x^2 + y^2 = 1\,, \\ u(x, y) &= 3\,, && x^2 + y^2 = 4\,. \end{aligned}$$

(*Sugg.* Considerare la particolare geometria del dominio e dei dati.)

3. [23/9/2003 (ex)I] Posto

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}\,,$$

dimostrare che il problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && \text{in } A, \\ u(x, y) &= 7\,, && \text{su } \partial A, \end{aligned}$$

ha un'unica soluzione radiale limitata su tutto A, e trovare tale soluzione.

4. [23/9/2003 (ex)I] Determinare il valore massimo assunto sul cerchio chiuso $\overline{B}$, ove

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}\,,$$

dalla soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } B, \\ u &= f(x,y)\,, && \text{su } \partial B, \end{aligned}$$

ove f è la funzione che in coordinate polari si rappresenta come

$$f = r(1 + |\sin\varphi|)^2\,,$$

e trovare tutti i punti di $\overline{B}$ ove tale massimo è raggiunto.

5. [23/9/2003 (ex)II] Posto

$$B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 4\}\,,$$

dimostrare che il problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && \text{in } B, \\ u(x,y) &= -3\,, && \text{su } \partial B, \end{aligned}$$

ha un'unica soluzione radiale limitata su tutto B, e trovare tale soluzione.

6. [23/9/2003 (ex)II] Determinare il valore minimo assunto sul cerchio chiuso $\overline{A}$, ove

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}\,,$$

dalla soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } A, \\ u &= f(x,y)\,, && \text{su } \partial A, \end{aligned}$$

ove f è la funzione che in coordinate polari si rappresenta come

$$f = \rho^2(1 - |\sin\varphi|)^2\,,$$

e trovare tutti i punti di $\overline{A}$ ove tale massimo è raggiunto.

7. [31/3/2004 (ex)I] Sia u la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega = \{1/4 < x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= x\,, && \text{su } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 1\,, && \text{su } x^2 + y^2 = 1/4. \end{aligned}$$

Trovare tutti i punti di $\overline{\Omega}$ ove u assume il suo massimo e il suo minimo assoluti.

8. [31/3/2004 (ex)II] Sia u la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, & &\text{in } \Omega = \{1/4 < x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= -\frac{1}{2}\,, & &\text{su } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= y\,, & &\text{su } x^2 + y^2 = 1/4. \end{aligned}$$

Trovare tutti i punti di $\overline{\Omega}$ ove u assume il suo massimo e il suo minimo assoluti.

9. [14/4/2004 (ex)I] Consideriamo la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, & &\text{in } \Omega = A \setminus \overline{B}, \\ u(x,y) &= x^2 + y^2\,, & &\text{su } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ove

$$A = \Big\{(x,y) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} < 1\Big\}\,, \qquad B = \Big\{(x,y) \mid 4x^2 + y^2 < 1\Big\}\,.$$

Dimostrare che u assume tutti i suoi valori sul segmento

$$L = \Big\{(x,0) \mid \frac{1}{2} \le x \le 4\Big\} \subset \overline{\Omega}\,.$$

10. [14/4/2004 (ex)II] Consideriamo la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, & &\text{in } \Omega = A \setminus \overline{B}, \\ u(x,y) &= x^2 + y^2\,, & &\text{su } \partial\Omega, \end{aligned}$$

ove

$$A = \Big\{(x,y) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} < 1\Big\}\,, \qquad B = \Big\{(x,y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1\Big\}\,.$$

Dimostrare che u assume tutti i suoi valori sul segmento

$$L = \{(0,y) \mid 2 \le y \le 5\} \subset \overline{\Omega}\,.$$

11. [15/9/2004 (ex)I] Trovare tutti i punti di minimo della soluzione $u \in C^2(\overline{A})$ di

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= -1\,, & &\text{in } A = \{x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= x^2\,, & &x^2 + y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

12. [15/9/2004 (ex)II] Trovare tutti i punti di massimo della soluzione $u \in C^2(\overline{A})$ di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1\,, && \text{in } A = \{x^2+y^2<1\},\\ u(x,y) &= y^2\,, && x^2+y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

13. [1/4/2005 (ex)I] Sia

$$\Omega = \Big[(0,2)\times(-1,1)\Big] \cup \Big[(-2,0]\times\Big(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\Big)\Big]\,.$$

Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\ u(x,-1) &= x\,, && 0<x<2\,,\\ u(x,1) &= x\,, && 0<x<2\,,\\ u(2,y) &= 2\,, && -1<y<1\,,\\ u(x,y) &= 0\,, && \text{su } \partial\Omega\cap\{x\le 0\}, \end{aligned}$$

soddisfa

$$u(x,y) > x\,, \qquad \text{in } \Omega.$$

14. [1/4/2005 (ex)II] Sia

$$\Omega = \Big[\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\times(-1,0]\Big] \cup \Big[(-1,1)\times(0,2)\Big]\,.$$

Dimostrare che la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega,\\ u(-1,y) &= -y\,, && 0<y<2\,,\\ u(1,y) &= -y\,, && 0<y<2\,,\\ u(x,2) &= -2\,, && -1<x<1\,,\\ u(x,y) &= 0\,, && \text{su } \partial\Omega\cap\{y\le 0\}, \end{aligned}$$

soddisfa

$$u(x,y) < -y\,, \qquad \text{in } \Omega.$$

15. [23/6/2005 (ex)I] Sia u la soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega = \{(x,y) \mid 4 < x^2 + y^2 < 9\}, \\ u &= x^2y^2\,, && \text{su } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dimostrare che u assume tutti i suoi valori nel sottoinsieme di $\overline{\Omega}$ dato da

$$\overline{\Omega} \cap \{(x,y) \mid y \geq x \geq 0\}\,.$$

16. [23/6/2005 (ex)II] Sia u la soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega = \{(x,y) \mid 1 < |x| + |y| < 2\}, \\ u &= |xy|\,, && \text{su } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dimostrare che u assume tutti i suoi valori nel sottoinsieme di $\overline{\Omega}$ dato da

$$\overline{\Omega} \cap \{(x,y) \mid x \geq y \geq 0\}\,.$$

17. [15/12/2005 (ex)I] Trovare l'unica soluzione radiale del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && x^2 + y^2 > 1\,, \\ u(x,y) &= 1\,, && x^2 + y^2 = 1\,, \\ \lim_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y) &= 1\,. \end{aligned}$$

18. [20/9/2007 (ex)I] Trovare la soluzione radiale

$$u(x,y) = v\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\,,$$

del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && 1 < x^2 + y^2 < 4\,, \\ u(x,y) &= 1\,, && x^2 + y^2 = 1\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 1\,, && x^2 + y^2 = 4\,. \end{aligned}$$

19. [14/12/2007 (ex)I] Trovare tutte le soluzioni radiali

$$u(x,y) = v\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\,,$$

del problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\,, && 1 < x^2+y^2\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0\,, && x^2+y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

520. Formula di rappresentazione eq. del calore

1. [17/2/2003 (hw)I] Trovare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \infty\,, \\ u(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && 0 \le x\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \end{aligned}$$

come restrizione a $x \ge 0$ di un opportuna soluzione al problema di Cauchy su $\boldsymbol{R}$.

2. [17/2/2003 (hw)I] Trovare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \infty\,, \\ u(x,0) &= \cos x\,, && 0 \le x\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \end{aligned}$$

come restrizione a $x \ge 0$ di un opportuna soluzione al problema di Cauchy su $\boldsymbol{R}$.

3. [17/2/2003 (hw)I] Dimostrare che la soluzione u del problema di Cauchy corrispondente al dato iniziale $u_0(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$ soddisfa

$$u(x,t) \ge \frac{1}{e\sqrt{\pi t}}\,, \qquad -1 \le x \le 1\,, 1 \le t\,.$$

4. [1/4/2003 (ex)I] Dimostrare che se u è la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

ove

$$u_0(x) = 1 - \chi_{(0,1)}(x) = \begin{cases} 1\,, & x \notin (0,1)\,, \\ 0\,, & x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

allora per ogni $x \in \boldsymbol{R}$ fissato

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1\,.$$

5. [30/6/2003 (ex)I] Consideriamo le tre funzioni u_1, u_2, u_3 soluzioni limitate di

$$\begin{aligned} u_{1t} - u_{1xx} &= 0\,, && x \in \boldsymbol{R}\,, 0 < t < \infty\,, \\ u_1(x,0) &= \chi_{(0,+\infty)}(x)\operatorname{arctg} x\,, && x \in \boldsymbol{R}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2t} - u_{2xx} &= 0\,, && x \ge 0\,, t \ge 0\,, \\ u_2(0,t) &= 0\,, && t \ge 0\,, \\ u_2(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && x \ge 0\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{3t} - u_{3xx} &= 0\,, && x \ge 0\,, t \ge 0\,, \\ u_{3x}(0,t) &= 0\,, && t \ge 0\,, \\ u_3(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, && x \ge 0\,. \end{aligned}$$

Mostrare che

$$u_2(x,t) < u_1(x,t) < u_3(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } x > 0,\ t > 0.$$

6. [30/6/2003 (ex)II] Consideriamo le tre funzioni u_1, u_2, u_3 soluzioni limitate di

$$\begin{aligned} u_{1t} - u_{1xx} &= 0\,, && x \in \boldsymbol{R}\,, 0 < t < \infty\,, \\ u_1(x,0) &= \chi_{(0,+\infty)}(x)\frac{1}{x^2+1}\,, && x \in \boldsymbol{R}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2t} - u_{2xx} &= 0\,, && x \ge 0\,, t \ge 0\,, \\ u_2(0,t) &= 0\,, && t \ge 0\,, \\ u_2(x,0) &= \frac{1}{x^2+1}\,, && x \ge 0\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{3t} - u_{3xx} &= 0\,, && x \ge 0\,, t \ge 0\,, \\ u_{3x}(0,t) &= 0\,, && t \ge 0\,, \\ u_3(x,0) &= \frac{1}{x^2+1}\,, && x \ge 0\,. \end{aligned}$$

Mostrare che

$$u_2(x,t) < u_1(x,t) < u_3(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } x > 0,\ t > 0.$$

7. [28/6/2004 (ex)I] Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & -\infty < x < \infty\,, \quad t > 0\,,\\ u(x,0) &= \chi_{(0,\infty)}(x)\,, & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

8. [28/6/2004 (ex)II] Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & -\infty < x < \infty\,, \quad t > 0\,,\\ u(x,0) &= -2\chi_{(-\infty,0)}(x)\,, & -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = -1\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

9. [15/9/2004 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < \infty\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, & t > 0\,,\\ u(x,0) &= \frac{x}{1+x^2}\cos x\,, & 0 < x < \infty\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che è limitata su $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

10. [15/9/2004 (ex)II] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & 0 < x < \infty\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, & t > 0\,,\\ u(x,0) &= \frac{x}{1+x^2}\sin x\,, & 0 < x < \infty\,, \end{aligned}$$

e dimostrare che è limitata su $(0,\infty)\times(0,\infty)$.

11. [1/4/2005 (ex)I] Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} & u_t - u_{xx} = 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < t\,, \\ & u(x,0) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,, \end{cases} && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa per ogni $t > 0$ fissato

$$\lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 1\,.$$

12. [1/4/2005 (ex)II] Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} & u_t - u_{xx} = 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < t\,, \\ & u(x,0) = \begin{cases} 0\,, & x > 0\,, \\ 1\,, & x < 0\,, \end{cases} && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa per ogni $t > 0$ fissato

$$\lim_{x \to -\infty} u(x,t) = 1\,.$$

13. [23/6/2005 (ex)I] Risolvere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \sin(x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

14. [23/6/2005 (ex)II] Risolvere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \cos(x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

15. [7/4/2006 (ex)I] Sia u l'unica soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & &-\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= \frac{2|x|}{(1+x^2)^2}\,, & &-\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

Determinare un tempo t_0 tale che per ogni $t \geq t_0$

$$u(x,t) < \frac{1}{10}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

[Si noti che $\max u(x,0) > u(1,0) = 1/2 > 1/10$, quindi dovrà essere $t_0 > 0$.]

16. [7/4/2006 (ex)II] Sia u l'unica soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & &-\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= \frac{2e^{2|x|}}{(1+e^{2|x|})^2}\,, & &-\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

Determinare un tempo t_0 tale che per ogni $t \geq t_0$

$$u(x,t) < \frac{1}{10}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

[Si noti che $\max u(x,0) \geq u(0,0) = 1/2 > 1/10$, quindi dovrà essere $t_0 > 0$.]

17. [2/4/2007 (ex)I] Sia u_0 una funzione continua e limitata su $\boldsymbol{R}$, periodica con periodo $a > 0$.
Si dimostri che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & &-\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & &-\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

è periodica in x con periodo a, ossia

$$u(x+a,t) = u(x,t)\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R},\ t > 0.$$

18. [2/4/2007 (ex)II] Sia u_0 una funzione continua e limitata su $\boldsymbol{R}$, con un unico punto x_0 di massimo assoluto su $\boldsymbol{R}$, tale cioè che

$$u_0(x_0) > u_0(x)\,, \qquad \text{per ogni } x \neq x_0.$$

Si dimostri che la soluzione u di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, & &-\infty < x < \infty\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & &-\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa la disuguaglianza stretta

$$u(x,t) < u_0(x_0)\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R},\ t > 0.$$

19. [18/4/2007 (ex)I] Scrivere, usando la formula di rappresentazione dell'equazione del calore nel semipiano, la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\ u_x(1,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,,\\ u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

20. [12/7/2007 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= e^x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

21. [12/7/2007 (ex)II] Scrivere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

22. [14/12/2007 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione per il problema di Cauchy per l'equazione del calore la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= x\sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

23. [16/9/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0 & & 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 - x\,, & & 0 < x < 1\,, \\ u(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ u_x(1,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \end{aligned}$$

mediante l'opportuna formula di rappresentazione.

24. [16/9/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0 & & 0 < x < 1\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 - x^2\,, & & 0 < x < 1\,, \\ u(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \\ u_x(1,t) &= 0\,, & & t > 0\,, \end{aligned}$$

mediante l'opportuna formula di rappresentazione.

530. Formula di rappresentazione eq. di Laplace nel semipiano

1. [16/4/2003 (ex)I] Calcolare, mediante formule di rappresentazione, la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, & & 0 < x < \infty\,, 0 < y < \infty\,, \\ u_x(0,y) &= 0\,, & & 0 < y < \infty\,, \\ u(x,0) &= \operatorname{arctg} x\,, & & 0 < x < \infty\,. \end{aligned}$$

2. [16/4/2003 (ex)II] Calcolare, mediante formule di rappresentazione, la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, & & 0 < x < \infty\,, 0 < y < \infty\,, \\ u(0,y) &= 0\,, & & 0 < y < \infty\,, \\ u(x,0) &= \frac{1}{1+x^2}\,, & & 0 < x < \infty\,. \end{aligned}$$

3. [30/6/2003 (ex)I] Sia u la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, & & x \in \boldsymbol{R}\,, y > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & & x \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

ove si assume che u_0 sia una funzione continua e limitata in $\boldsymbol{R}$, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)| \, \mathrm{d}x < \infty \, .$$

Dimostrare che allora vale per ogni $x \in \boldsymbol{R}$ fissato:

$$\int_{1}^{\infty} u(x,y)^2 \, \mathrm{d}y < \infty \, .$$

4. [30/6/2003 (ex)II] Sia u la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \, , & \quad & x \in \boldsymbol{R} \, , y > 0 \, , \\ u(x,0) &= u_0(x) \, , & & x \in \boldsymbol{R} \, , \end{aligned}$$

ove si assume che u_0 sia una funzione continua e limitata in $\boldsymbol{R}$, con

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)| \, \mathrm{d}x < \infty \, .$$

Dimostrare che allora vale per ogni $x \in \boldsymbol{R}$ fissato:

$$\int_{2}^{\infty} u(x,y)^4 \, \mathrm{d}y < \infty \, .$$

5. [8/3/2004 (hw)I] Trovare la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \, , & \quad & 0 < x < 1 \, , \, y > 0 \, , \\ u(0,y) &= 0 \, , & & y > 0 \, , \\ u_x(1,y) &= 0 \, , & & y > 0 \, , \\ u(x,0) &= x \, , & & 0 < x < 1 \, . \end{aligned}$$

6. [8/3/2004 (hw)I] Trovare la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 \, , & \quad & 0 < x < 1 \, , \, y > 0 \, , \\ u(0,y) &= 0 \, , & & y > 0 \, , \\ u_x(1,y) &= 0 \, , & & y > 0 \, , \\ u(x,0) &= 0 \, , & & 0 < x < 1 \, . \end{aligned}$$

(*Sugg.*: cambiare l'incognita per ridursi a un problema per l'equazione di Laplace).

7. [31/3/2004 (ex)I] Trovare mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & x > 0\,, y > 0\,, \\ u(0, y) &= 0\,, & & y > 0\,, \\ u(x, 0) &= e^{-x^3}\,, & & x > 0\,. \end{aligned}$$

8. [31/3/2004 (ex)II] Trovare mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & x > 0\,, y > 0\,, \\ u_x(0, y) &= 0\,, & & y > 0\,, \\ u(x, 0) &= -\frac{1}{1+x^3}\,, & & x > 0\,. \end{aligned}$$

9. [14/4/2004 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & x > 0\,, y < 0\,, \\ u_y(x, 0) &= 0\,, & & x > 0\,, \\ u(0, y) &= \cos(y^2)\,, & & y < 0\,. \end{aligned}$$

10. [14/4/2004 (ex)II] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, & & x > 0\,, y < 0\,, \\ u(x, 0) &= 0\,, & & x > 0\,, \\ u(0, y) &= \sin(y^2)\,, & & y < 0\,. \end{aligned}$$

11. [14/4/2005 (ex)I] Sia $u_0 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ una funzione continua e limitata non crescente, cioè tale che

$$u_0(x_2) \le u_0(x_1)\,, \qquad \text{per ogni } x_1,\, x_2 \in \boldsymbol{R},\, x_2 \ge x_1.$$

Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < y\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$u(x_2, y) \le u(x_1, y)\,, \qquad \text{per ogni } x_1,\, x_2 \in \boldsymbol{R},\, x_2 \ge x_1 \text{ e } y > 0.$$

12. [14/4/2005 (ex)II] Sia $u_0 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ una funzione continua e limitata non decrescente, cioè tale che

$$u_0(x_2) \ge u_0(x_1)\,, \qquad \text{per ogni } x_1,\, x_2 \in \boldsymbol{R},\, x_2 \ge x_1.$$

Dimostrare che la soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < y\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$u(x_2, y) \ge u(x_1, y)\,, \qquad \text{per ogni } x_1,\, x_2 \in \boldsymbol{R},\, x_2 \ge x_1 \text{ e } y > 0.$$

13. [16/9/2005 (ex)I] Risolvere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni dell'equazione di Laplace nel semipiano il problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && x > 1\,, y > 0\,, \\ u_x(1, y) &= 0\,, && y > 0\,, \\ u(x, 0) &= e^{1-x}\,, && x > 1\,. \end{aligned}$$

14. [16/9/2005 (ex)II] Risolvere mediante la formula di rappresentazione di soluzioni dell'equazione di Laplace nel semipiano il problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && x > 0\,, y > 1\,, \\ u_y(x, 1) &= 0\,, && x > 0\,, \\ u(0, y) &= \frac{1}{y}\,, && y > 1\,. \end{aligned}$$

15. [7/4/2006 (ex)I] Risolvere, mediante la formula di rappresentazione per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && x > 0\,, y < 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && x > 0\,, \\ u(0,y) &= e^y\,, && y < 0\,. \end{aligned}$$

16. [7/4/2006 (ex)II] Risolvere, mediante la formula di rappresentazione per l'equazione di Laplace nel semipiano,

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && x > 0\,, y > 0\,, \\ u_x(0,y) &= 0\,, && y > 0\,, \\ u(x,0) &= \sin(x+1)\,, && x > 0\,. \end{aligned}$$

17. [20/9/2006 (ex)I] Si consideri l'unica soluzione limitata di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && x \in \boldsymbol{R}\,, y > 0\,, \\ u(x,0) &= \chi_I(x)\,, && x \in \boldsymbol{R}\,, \end{aligned}$$

ove

$$I = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [2n, 2n+1)\,.$$

Supponendo noto che esiste una costante $c \in \boldsymbol{R}$ (indipendente da x) tale che

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) = c\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R},$$

si determini tale c. [Sugg.: usare l'invarianza dell'equazione di Laplace per traslazioni, e il teorema di unicità.]

18. [18/4/2007 (ex)I] Scrivere, usando la formula di rappresentazione dell'equazione di Laplace nel semipiano, la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && 0 < x < 1\,, y > 0\,, \\ u(0,y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,, \\ u_x(1,y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,, \\ u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

19. [18/4/2007 (ex)II] Scrivere, usando la formula di rappresentazione dell'equazione di Laplace nel semipiano, la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < 2\,, y > 0\,,\\
u_x(0, y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,,\\
u(2, y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,,\\
u(x, 0) &= x^3\,, && 0 < x < 2\,.
\end{aligned}
$$

20. [14/7/2008 (ex)I] Trovare la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0 && -\infty < x < 0\,, -\infty < y < 0\,,\\
u(x, 0) &= e^x\,, && -\infty < x < 0\,,\\
u_x(0, y) &= 0\,, && -\infty < y < 0\,,
\end{aligned}
$$

mediante l'opportuna formula di rappresentazione.

21. [14/7/2008 (ex)II] Trovare la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0 && -\infty < x < 0\,, -\infty < y < 0\,,\\
u(x, 0) &= 0\,, && -\infty < x < 0\,,\\
u(0, y) &= e^y\,, && -\infty < y < 0\,,
\end{aligned}
$$

mediante l'opportuna formula di rappresentazione.

535. Formula di rappresentazione eq. di Laplace nel cerchio

1. [8/3/2004 (hw)I] Si usi la formula di Poisson per dimostrare che la soluzione u di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && \text{in } B = \{x^2 + y^2 < 4\},\\
u(x, y) &= \chi_{\{x>0, y>0\}}(x, y)\,, && \text{su } \partial B,
\end{aligned}
$$

soddisfa

$$
u(1, 1) > u(-1, -1)\,.
$$

2. [28/6/2004 (ex)I] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && x^2 + y^2 < 1\,,\\
u(x, y) &= \max(x^2 - y^2, 0)\,, && x^2 + y^2 = 1\,.
\end{aligned}
$$

3. [28/6/2004 (ex)II] Scrivere mediante la formula di rappresentazione la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 , & x^2+y^2 &< 1 , \\ u(x,y) &= \min(xy,0) , & x^2+y^2 &= 1 . \end{aligned}$$

600. Teoria di Fourier

1. [8/3/2004 (hw)I] Siano f e g due funzioni in $L^2((-\pi,\pi))$, e siano a_n, b_n i coefficienti di Fourier di f, rispettivamente α_n, β_n quelli di g. Dimostrare che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\alpha_n , \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\alpha_n , \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\beta_n ,$$

sono convergenti.

2. [23/6/2005 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\beta_n ,$$

ove i b_n e i β_n sono i coefficienti di Fourier definiti da

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) &= \pi - x , & &\text{in } L^2(0,\pi), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) &= \left|\frac{\pi}{2} - x\right| , & &\text{in } L^2(0,\pi). \end{aligned}$$

3. [23/6/2005 (ex)II] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\beta_n ,$$

ove i b_n e i β_n sono i coefficienti di Fourier definiti da

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) &= |\pi - 2x| , & &\text{in } L^2(0,\pi), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) &= x , & &\text{in } L^2(0,\pi). \end{aligned}$$

4. [20/4/2006 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \,,$$

ove i numeri reali α_n sono determinati dall'uguaglianza

$$f(x) = \left| x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right| = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi)).$$

5. [20/4/2006 (ex)II] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \,,$$

ove i numeri reali α_n sono determinati dall'uguaglianza

$$f(x) = \left| 2x - \frac{\pi}{4} \right| = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi)).$$

6. [15/12/2006 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n \,,$$

ove

$$f(x) = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) \,, \qquad 0 < x < \pi \,,$$

$$g(x) = x^{20} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) \,, \qquad 0 < x < \pi \,.$$

7. [2/4/2007 (ex)I] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \,,$$

ove la successione α_n è definita da

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi)),$$

e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

8. [2/4/2007 (ex)II] Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2\,,$$

ove la successione α_n è definita da

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi)),$$

e

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[8]{x}}\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

9. [18/4/2008 (ex)I] Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n\,,$$

ove i coefficienti α_n e β_n sono definiti da

$$f(x) = \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos\big((2n+1)x\big)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi/2)),$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos\big((2n+1)x\big)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi/2)).$$

10. [18/4/2008 (ex)II] Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n\,,$$

ove i coefficienti α_n e β_n sono definiti da

$$f(x) = x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin\big((2n+1)x\big)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi/2)),$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sin\big((2n+1)x\big)\,, \qquad \text{in } L^2((0,\pi/2)).$$

605. Calcolo di serie di Fourier

1. [16/4/2003 (ex)I] Calcolare i coefficienti della serie di coseni

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| , \qquad 0 < x < \pi .$$

Calcolare la somma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 .$$

2. [16/4/2003 (ex)II] Calcolare i coefficienti della serie di seni

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| , \qquad 0 < x < \pi .$$

Calcolare la somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 .$$

3. [1/4/2003 (ex)I] Calcolare la serie di Fourier di

$$f(x) = 2|\sin x| , \qquad -\pi < x < \pi .$$

4. [8/3/2004 (hw)I] Calcolare la serie di Fourier di

$$f(x) = \pi - |x| + \cos x , \qquad -\pi < x < \pi .$$

5. [31/3/2004 (ex)I] Una delle due funzioni seguenti *non* si può sviluppare in serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$. Dire quale è, e perché. Trovare quindi lo sviluppo dell'altra.

$$1) \quad f(x) = \frac{x}{8} + e^{-|x|} ; \qquad 2) \quad g(x) = (x + \pi)^{-1/2} .$$

6. [31/3/2004 (ex)II] Una delle due funzioni seguenti *non* si può sviluppare in serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$. Dire quale è, e perché. Trovare quindi lo sviluppo dell'altra.

$$1) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi - x}} ; \qquad 2) \quad g(x) = e^{|x|} + x .$$

7. [28/6/2004 (ex)I] Una sola delle seguenti funzioni f, g, h, definite in $(0, \pi)$, ha un'espansione in serie di seni su $(0, \pi)$ tale che i suoi coefficienti β_n soddisfino

$$|\beta_n| \le \frac{\text{costante}}{n^2}\,, \qquad n \ge 1\,;$$

Dire quale è, come la si identifica, e calcolarne i coefficienti:

$$f(x) = (\pi - x)^2\,, \qquad g(x) = x(\pi - x)\,, \qquad h(x) = x\,.$$

8. [28/6/2004 (ex)II] Una sola delle seguenti funzioni f, g, h, definite in $(0, \pi)$, ha un'espansione in serie di seni su $(0, \pi)$ tale che i suoi coefficienti β_n soddisfino

$$|\beta_n| \le \frac{\text{costante}}{n^2}\,, \qquad n \ge 1\,;$$

Dire quale è, come la si identifica, e calcolarne i coefficienti:

$$f(x) = |\pi - x|\,, \qquad g(x) = \left| x - \frac{\pi}{2} \right|\,, \qquad h(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|\,.$$

9. [1/4/2005 (ex)I] Calcolare lo sviluppo

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,,$$

ove

$$f(x) = \pi - |x| + \chi_{(0,1)}(x)\,, \qquad -\pi < x < \pi\,.$$

10. [1/4/2005 (ex)II] Calcolare lo sviluppo

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,,$$

ove

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{2} & 0 < x < \pi\,, \\ x + \dfrac{\pi}{2} + \chi_{(-1,0)}(x)\,, & -\pi < x < 0\,. \end{cases}$$

11. [14/4/2005 (ex)I] Sia

$$f(x) = \min(1, \pi - x)\,, \qquad 0 < x < \pi\,.$$

Si determini quale tra i due sviluppi

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \,, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) \,,$$

ha i coefficienti che vanno a zero più rapidamente per $n \to \infty$.

12. [14/4/2005 (ex)II] Sia

$$f(x) = x(\pi - x)^2 \,, \qquad 0 < x < \pi \,.$$

Si determini quale tra i due sviluppi

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \,, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx) \,,$$

ha i coefficienti che vanno a zero più rapidamente per $n \to \infty$.

13. [20/9/2006 (ex)I] Determinare lo sviluppo in serie di Fourier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sin(2n+1)x \,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2} \,,$$

ove

$$f(x) = \begin{cases} x \,, & 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \,, \\ 1 \,, & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \,. \end{cases}$$

14. [12/7/2007 (ex)I] Sia

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \,, \qquad 0 < x < \pi \,.$$

Uno solo tra i due sviluppi in serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin nx \,, \qquad f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \,, \qquad 0 < x < \pi \,,$$

ha i coefficienti di ordine $O(n^{-2})$ per $n \to \infty$.
Spiegare quale è, e calcolarne tutti i coefficienti.

15. [12/7/2007 (ex)II] Sia

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 - \frac{\pi^2}{4} \,, \qquad 0 < x < \pi \,.$$

Uno solo tra i due sviluppi in serie

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin nx\,,\qquad f(x)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx\,,\qquad 0<x<\pi\,,$$

ha i coefficienti di ordine $O(n^{-3})$ per $n\to\infty$.
Spiegare quale è, e calcolarne tutti i coefficienti.

16. [20/9/2007 (ex)I] Calcolare i coefficienti dello sviluppo di

$$f(x)=\sin 2x+\cos 5x\,,\qquad 0<x<\pi\,.$$

nel sistema ortonormale completo in $L^2((0,\pi))$

$$\mathcal{C}=\Big\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos x\,,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 2x\,,\dots\Big\}\,.$$

17. [14/12/2007 (ex)I] Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier (di seni e coseni) di

$$f(x)=\begin{cases} x+\pi\,, & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\,,\\ x\,, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\,,\\ x-\pi\,, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\,.\end{cases}$$

18. [28/3/2008 (ex)I] Data la funzione

$$f(x)=x^2(\pi-x)\,,\qquad 0<x<\pi\,,$$

solo uno dei due sviluppi

$$f(x)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(nx)\,,\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(nx)\,,$$

soddisfa la maggiorazione

$$|\text{coefficiente } n\text{-esimo}|\le\frac{\text{costante}}{n^3}\,.$$

Dire quale è e determinarne i coefficienti.

19. [28/3/2008 (ex)II] Data la funzione

$$f(x)=x^2\Big(x-\frac{\pi}{2}\Big)\,,\qquad 0<x<\pi\,,$$

solo uno dei due sviluppi

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx)\,, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx)\,,$$

soddisfa la maggiorazione

$$|\text{coefficiente } n\text{-esimo}| \leq \frac{\text{costante}}{n^2}\,.$$

Dire quale è e determinarne i coefficienti.

20. [16/9/2008 (ex)I] Si considerino gli sviluppi in serie

$$f(x) = x(3\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos(nx)\,,$$

in $L^2((0,\pi))$.
Determinare quale dei due sviluppi ha i coefficienti che tendono a zero con maggiore rapidità per $n \to \infty$, e calcolare questi coefficienti.

21. [16/9/2008 (ex)II] Si considerino gli sviluppi in serie

$$f(x) = 3x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos(nx)\,,$$

in $L^2((0,\pi))$.
Determinare quale dei due sviluppi ha i coefficienti che tendono a zero con maggiore rapidità per $n \to \infty$, e calcolare questi coefficienti.

610. Fourier equazione delle onde

1. [4/3/2003 (hw)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(L,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 1\,, && 0 < x < L\,,\\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

2. [19/3/2003 (hw)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= t^2\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

3. [16/4/2003 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 2\,, && 0 < t\,, \\ u(\pi,t) &= \cos t\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Si assuma $c^2 > 1$.

4. [16/4/2003 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= \cosh t\,, && 0 < t\,, \\ u(\pi,t) &= 4\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

5. [17/3/2004 (hw)I] Risolvere

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= e^x\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 1\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

e dire quale è la classe di regolarità della soluzione.

6. [14/4/2004 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= x t^2 \,, && 0 < x < \pi \,, 0 < t \,, \\ u_x(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u(\pi,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, \\ u_t(x,0) &= \sin x \,, && 0 < x < \pi \,. \end{aligned}$$

7. [14/4/2004 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= (x+1) t \,, && 0 < x < \pi \,, 0 < t \,, \\ u(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u_x(\pi,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\ u(x,0) &= \cos x \,, && 0 < x < \pi \,, \\ u_t(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,. \end{aligned}$$

8. [1/4/2005 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, 0 < t \,, \\ u(0,t) &= 0 \,, && 0 < t \,, \\ u(\pi,t) &= \pi t^2 \,, && 0 < t \,, \\ u(x,0) &= x \,, && 0 < x < \pi \,, \\ u_t(x,0) &= 1 \,, && 0 < x < \pi \,. \end{aligned}$$

9. [1/4/2005 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, 0 < t \,, \\ u_x(0,t) &= 0 \,, && 0 < t \,, \\ u_x(\pi,t) &= 2\pi t \,, && 0 < t \,, \\ u(x,0) &= 1 \,, && 0 < x < \pi \,, \\ u_t(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,. \end{aligned}$$

10. [7/4/2006 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= e^{t+x}\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\
u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u_x(1,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= e^x\,, && 0 < x < 1\,,\\
u_t(x,0) &= e^{2x}\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}$$

11. [7/4/2006 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= e^{2t+x}\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(1,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= e^x\,, && 0 < x < 1\,,\\
u_t(x,0) &= e^{2x}\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}$$

12. [20/9/2006 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
u(0,t) &= \sin(\omega t)\,, && 0 < t\,,\\
u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

Qui ω e c sono costanti positive.

13. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\
u_x(0,t) &= t\,, && 0 < t\,,\\
u_x(\pi,t) &= 1\,, && 0 < t\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= \cos 2x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

14. [2/4/2007 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u_x(0,t) &= -1\,, && 0 < t\,, \\ u_x(\pi,t) &= -t\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= \cos 2x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

15. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u_x(0,t) &= t\,, && 0 < t\,, \\ u_x(\pi,t) &= 1\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

16. [20/9/2007 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= t^2\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u_x\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \\ u_t(x,0) &= 1\,, && 0 < x < \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

17. [14/12/2007 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= \sin \omega t\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(\pi,t) &= \sin \omega t\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= \omega\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Qui $\omega > 0$ è una costante.

18. [14/7/2008 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= a \cos(\beta x) \sin^2(bt) \,, && 0 < x < \pi \,, t > 0 \,, \\
u_x(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u_x(\pi,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, \\
u_t(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,.
\end{aligned}
$$

Qui $a > 0$, $b > 0$, $\beta > 0$ sono costanti.

19. [14/7/2008 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= a \cos(\beta x) \cos^2(bt) \,, && 0 < x < \pi \,, t > 0 \,, \\
u_x(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u_x(\pi,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, \\
u_t(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,.
\end{aligned}
$$

Qui $a > 0$, $b > 0$, $\beta > 0$ sono costanti.

620. Fourier equazione del calore

1. [4/3/2003 (hw)I] Trovare la soluzione del problema

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < L \,, t > 0 \,, \\
u(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u_x(L,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u(x,0) &= \chi_{(L/2,L)}(x) \,, && 0 < x < L \,,
\end{aligned}
$$

con il metodo di Fourier.

2. [19/3/2003 (hw)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,, t > 0 \,, \\
u(0,t) &= 0 \,, && t > 0 \,, \\
u(\pi,t) &= \cos t \,, && t > 0 \,, \\
u(x,0) &= 0 \,, && 0 < x < \pi \,.
\end{aligned}
$$

3. [1/4/2003 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t < T\,,\\
u(0,t) &= e^{-t}\,, && 0 < t < T\,,\\
u(1,t) &= 0\,, && 0 < t < T\,,\\
u(x,0) &= 1 - x^2\,, && 0 < x < 1\,.
\end{aligned}
$$

4. [23/9/2003 (ex)I] Si trovi la soluzione u di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < T\,,\\
u(0,t) &= t\,, && 0 \le t \le T\,,\\
u(\pi,t) &= 1\,, && 0 \le t \le T\,,\\
u(x,0) &= \frac{x}{\pi}\,, && 0 \le x \le \pi\,,
\end{aligned}
$$

con il metodo di Fourier.

5. [23/9/2003 (ex)II] Si trovi la soluzione u di

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < T\,,\\
u(0,t) &= 1\,, && 0 \le t \le T\,,\\
u(\pi,t) &= -t\,, && 0 \le t \le T\,,\\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi}\,, && 0 \le x \le \pi\,,
\end{aligned}
$$

con il metodo di Fourier.

6. [17/3/2004 (hw)I] Risolvere

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, t > 0\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\
u(1,t) &= f(t)\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < 1\,,
\end{aligned}
$$

e dire quale è la classe di regolarità della soluzione. Qui

$$
f(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t \le 1\,,\\ t-1\,, & t > 1\,. \end{cases}
$$

7. [31/3/2004 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il seguente problema

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= xt^2\,, && 0 < x < a\,, 0 < t\,,\\
u(0,t) &= 1\,, && t > 0\,,\\
u(a,t) &= t\,, && t > 0\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < a\,.
\end{aligned}
$$

8. [31/3/2004 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il seguente problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x\,, && 0 < x < b\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 2\,, && t > 0\,,\\ u(b,t) &= t^2 + 1\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < b\,. \end{aligned}$$

9. [15/9/2004 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u_x(0,t) &= 2t\,, && 0 < t\,,\\ u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

10. [15/9/2004 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u_x(\pi,t) &= 3t\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

11. [23/6/2005 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u_x(1,t) &= t\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= x - 1\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

12. [23/6/2005 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < 1\,, 0 < t\,,\\ u_x(0,t) &= -t\,, && 0 < t\,,\\ u(1,t) &= 0\,, && 0 < t\,,\\ u(x,0) &= x\,, && 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

13. [15/12/2005 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(\pi,t) &= t\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= \sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

14. [6/7/2006 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= t^2\,, && 0 < t\,, \\ u(\pi,t) &= 2\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \sin x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

15. [6/7/2006 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 1\,, && 0 < t\,, \\ u(\pi,t) &= t^3\,, && 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \sin 2x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

16. [12/7/2007 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x + t\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(\pi,t) &= 2\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= \sin(\pi x)\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

17. [12/7/2007 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= t + \cos x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < t < \infty\,, \\ u(0,t) &= 1\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t < \infty\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

18. [18/4/2008 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= F(x,t)\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

ove, per due costanti positive λ e μ, si definisce

$$F(x,t) = \begin{cases} \lambda\,, & \mu t < x < \pi\,, t < \dfrac{\pi}{\mu}\,,\\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dedurre dall'espressione trovata il valore di

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,.$$

19. [18/4/2008 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= F(x,t)\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,,\\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \end{aligned}$$

ove, per due costanti positive λ e μ, si definisce

$$F(x,t) = \begin{cases} \mu\,, & 0 < x < \pi - \lambda t\,, t < \dfrac{\pi}{\lambda}\,,\\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dedurre dall'espressione trovata il valore di

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,.$$

630. Fourier equazione di Laplace

1. [4/3/2003 (hw)I] Trovare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < L\,, 0 < y < H\,,\\ u_x(0,y) &= 0\,, && 0 < y < H\,,\\ u_y(x,H) &= 0\,, && 0 < x < L\,,\\ u(L,y) &= 1\,, && 0 < y < H\,,\\ u(x,0) &= x\,, && 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

con il metodo di Fourier.

2. [30/6/2003 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < L\,, 0 < y < L\,,\\
u_x(0, y) &= 0\,, && 0 < y < L\,,\\
u(L, y) &= 0\,, && 0 < y < L\,,\\
u(x, 0) &= \sin^2\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)\,, && 0 < x < L\,,\\
u(x, L) &= 0\,, && 0 < x < L\,.
\end{aligned}
$$

3. [30/6/2003 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && 0 < x < L\,, 0 < y < L\,,\\
u(0, y) &= 0\,, && 0 < y < L\,,\\
u_x(L, y) &= 0\,, && 0 < y < L\,,\\
u(x, L) &= \sin^2\Big(\frac{\pi x}{L}\Big)\,, && 0 < x < L\,,\\
u(x, 0) &= 0\,, && 0 < x < L\,.
\end{aligned}
$$

4. [17/3/2004 (hw)I] Risolvere

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 1\,, && 0 < x < L\,, 0 < y < H\,,\\
u_x(0, y) &= 0\,, && 0 < y < H\,,\\
u(L, y) &= 0\,, && 0 < y < H\,,\\
u(x, 0) &= -x\,, && 0 < x < L\,,\\
u(x, H) &= x\,, && 0 < x < L\,,
\end{aligned}
$$

e dire quale è la classe di regolarità della soluzione.

5. [28/6/2004 (ex)I] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(0, y) &= y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u(x, 0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_x(\pi, y) &= 1 + y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_y(x, \pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

6. [28/6/2004 (ex)II] Calcolare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned}
\Delta u &= -x^2\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(0,y) &= 2y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_y(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 1+2y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

7. [14/4/2005 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u_x(0,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 2\pi y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_y(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u(x,\pi) &= x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

8. [14/4/2005 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier il problema

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(0,y) &= 2y\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_x(\pi,y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u_y(x,0) &= -2\pi x\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_y(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}$$

9. [16/9/2005 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier l'unica soluzione limitata in

$$\Omega = \{(x,y) \mid x > 0\,, 0 < y < \pi\}$$

del problema

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && \text{in } \Omega\,,\\
u_y(x,0) &= 0\,, && x > 0\,,\\
u_y(x,\pi) &= 0\,, && x > 0\,,\\
u(0,y) &= y\sin y\,, && 0 < y < \pi\,.
\end{aligned}$$

10. [16/9/2005 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier l'unica soluzione limitata in

$$\Omega = \{(x, y) \mid x < 0\,, 0 < y < \pi\}$$

del problema

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, && \text{in } \Omega\,, \\ u_y(x, 0) &= 0\,, && x < 0\,, \\ u_y(x, \pi) &= 0\,, && x < 0\,, \\ u(0, y) &= y\cos y\,, && 0 < y < \pi\,. \end{aligned}$$

11. [20/4/2006 (ex)I] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned} \Delta u &= x\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,, \\ u_x(0, y) &= y\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(\pi, y) &= y^2\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(x, 0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_y(x, \pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

12. [20/4/2006 (ex)II] Risolvere con il metodo di Fourier

$$\begin{aligned} \Delta u &= y + 1\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,, \\ u_x(0, y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(\pi, y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u_y(x, 0) &= x^2\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u(x, \pi) &= x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

13. [15/12/2006 (ex)I] Risolvere per serie di Fourier

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < \pi\,, \\ u(0, y) &= 0\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u_x(\pi, y) &= 1\,, && 0 < y < \pi\,, \\ u(x, 0) &= 1\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_y(x, \pi) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

14. [18/4/2007 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione limitata in $Q = (0, \pi) \times (0, \infty)$ di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && \text{in } Q,\\
u_x(0, y) &= 0\,, && 0 < y < \infty\,,\\
u_x(\pi, y) &= \sin y\,, && 0 < y < \infty\,,\\
u(x, 0) &= x - \frac{\pi}{2}\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

15. [18/4/2007 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione limitata in $Q = (-\infty, 0) \times (0, \pi)$ di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && \text{in } Q,\\
u_y(x, 0) &= 0\,, && -\infty < x < 0\,,\\
u_y(x, \pi) &= -\sin x\,, && -\infty < x < 0\,,\\
u(0, y) &= 2y - \pi\,, && 0 < y < \pi\,.
\end{aligned}
$$

16. [28/3/2008 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < 1\,,\\
u_x(0, y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
u_x(\pi, y) &= y\,, && 0 < y < 1\,,\\
u(x, 0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_y(x, 1) &= x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

17. [28/3/2008 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, 0 < y < 1\,,\\
u_x(0, y) &= y\,, && 0 < y < 1\,,\\
u_x(\pi, y) &= 0\,, && 0 < y < 1\,,\\
u_y(x, 0) &= x\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u(x, 1) &= x\,, && 0 < x < \pi\,.
\end{aligned}
$$

18. [16/9/2008 (ex)I] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x,y)\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,, -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\ u_x\Big(-\frac{\pi}{2},y\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\ u_x\Big(\frac{\pi}{2},y\Big) &= 1\,, && -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\ u\Big(x,-\frac{\pi}{2}\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,,\\ u_y\Big(x,\frac{\pi}{2}\Big) &= 1\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Qui

$$f(x,y)=\begin{cases} 1\,, & y\ge x\,,\\ 0\,, & y<x\,. \end{cases}$$

19. [16/9/2008 (ex)II] Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x,y)\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,, -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\ u_x\Big(-\frac{\pi}{2},y\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\ u_x\Big(\frac{\pi}{2},y\Big) &= 3\,, && -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\,,\\ u\Big(x,-\frac{\pi}{2}\Big) &= 0\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,,\\ u_y\Big(x,\frac{\pi}{2}\Big) &= \pi\,, && -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Qui

$$f(x,y)=\begin{cases} 1\,, & y\le x\,,\\ 0\,, & y>x\,. \end{cases}$$

810. Metodi dell'energia per equazioni iperboliche

1. [30/1/2003 (hw)I] Sia $u\in C^2(\overline{Q_T})$, $Q_T=(0,L)\times(0,T)$, soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx} &= 0\,, && 0<x<L\,, 0<t<T\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0<x<L\,,\\ u_t(x,0) &= u_1(x)\,, && 0<x<L\,,\\ u(0,t) &= 0\,, && 0<t\,,\\ u(L,t) &= 0\,, && 0<t\,. \end{aligned}$$

a) Dare condizioni necessarie su u_0, u_1 perché una tale soluzione possa esistere.
b) Dimostrare, moltiplicando l'e.d.p. per u_t e integrando ripetutamente per parti su $(0, L) \times (0, t)$, che, per ogni $t > 0$,

$$\int_0^L u_t(x,t)^2 \, \mathrm{d}x + c^2 \int_0^L u_x(x,t)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^L u_1(x)^2 \, \mathrm{d}x + c^2 \int_0^L (u_0'(x))^2 \, \mathrm{d}x \,. \tag{1}$$

c) Dedurre dalla (1) un teorema di unicità di soluzioni per il problema in questione.

2. [30/6/2003 (ex)I] Si consideri la soluzione $v \in C^2([0, L] \times [0, T])$ di

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= -v_t \,, && 0 < x < L \,, 0 < t < T \,, \\ v(0,t) &= 0 \,, && 0 \le t \le T \,, \\ v(L,t) &= 0 \,, && 0 \le t \le T \,, \\ v(x,0) &= v_0(x) \,, && 0 \le x \le L \,, \\ v_t(x,0) &= v_1(x) \,, && 0 \le x \le L \,. \end{aligned}$$

Si dimostri che l'"energia"

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L v_t(x,t)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{c^2}{2} \int_0^L v_x(x,t)^2 \, \mathrm{d}x \,,$$

è una funzione decrescente del tempo.

3. [30/6/2003 (ex)II] Si consideri la soluzione $v \in C^2([0, L] \times [0, T])$ di

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= v_t \,, && 0 < x < L \,, 0 < t < T \,, \\ v(0,t) &= 0 \,, && 0 \le t \le T \,, \\ v(L,t) &= 0 \,, && 0 \le t \le T \,, \\ v(x,0) &= v_0(x) \,, && 0 \le x \le L \,, \\ v_t(x,0) &= v_1(x) \,, && 0 \le x \le L \,. \end{aligned}$$

Si dimostri che l'"energia"

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L v_t(x,t)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{c^2}{2} \int_0^L v_x(x,t)^2 \, \mathrm{d}x \,,$$

è una funzione crescente del tempo.

820. Metodi dell'energia per l'equazione del calore

1. [15/12/2006 (ex)I] Dimostrare che

$$\int_0^\pi u(x,t)^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{3}{2}\pi\,, \qquad t \ge 0\,,$$

se u risolve

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 + \cos x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

2. [14/7/2008 (ex)I] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ Du_x(0,t) &= au(0,t)\,, && t > 0\,, \\ Du_x(L,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

ove a è una costante positiva, e $u_0 \in C^2([0,L])$, $u_0 > 0$.
Si dimostri che

$$U(t) = \int_0^L u(x,t)\,\mathrm{d}x\,, \qquad t > 0\,,$$

è decrescente in t. (Si assuma per u tutta la regolarità necessaria.)

3. [14/7/2008 (ex)II] Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0\,, && 0 < x < L\,, t > 0\,, \\ Du_x(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ Du_x(L,t) &= -au(L,t)\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

ove a è una costante positiva, e $u_0 \in C^2([0,L])$, $u_0 > 0$.
Si dimostri che

$$U(t) = \int_0^L u(x,t)\,\mathrm{d}x\,, \qquad t > 0\,,$$

è decrescente in t. (Si assuma per u tutta la regolarità necessaria.)

910. Trasformata di Fourier

1. [18/4/2007 (ex)I] Consideriamo le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 3\,, & -\pi \le x \le \pi\,, \\ 0\,, & x \notin [-\pi, \pi]\,, \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x|\,, & -1 \le x \le 1\,, \\ 0\,, & x \notin [-1, 1]\,, \end{cases}$$

Decidere quale delle due trasformate di Fourier $\mathcal{F}[f]$ e $\mathcal{F}[g]$ tende a zero più rapidamente quando $\omega \to \infty$, e calcolare tale trasformata.

960. Trasformata di Laplace per EDO

1. [11/3/2007 (hw)I] Risolvere mediante la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y' + ay &= b\,, \qquad x > 0\,, \\ y(0) &= u_0\,. \end{aligned}$$

Qui $a \neq 0$, b, u_0 sono costanti reali.

2. [11/3/2007 (hw)I] Risolvere mediante la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= 3\,, \qquad x > 0\,, \\ y(0) &= 1\,, \\ y'(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

3. [11/3/2007 (hw)I] Risolvere mediante la trasformata di Laplace il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= e^{-x}\,, \qquad x > 0\,, \\ y(0) &= 0\,, \\ y'(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

4. [2/4/2007 (ex)I] Risolvere mediante la trasformazione di Laplace il problema

$$
\begin{aligned}
y'' - 4y' - 5y &= e^{3x} \,, \\
y(0) &= 1 \,, \\
y'(0) &= -1 \,.
\end{aligned}
$$

5. [18/4/2007 (ex)I] Risolvere mediante la trasformazione di Laplace il seguente problema

$$
\begin{aligned}
y'' + 16y &= 1 + \sin 2x \,, \\
y(0) &= 0 \,, \\
y'(0) &= 3 \,.
\end{aligned}
$$

6. [12/7/2007 (ex)I] Risolvere mediante la trasformazione di Laplace il seguente problema

$$
\begin{aligned}
y'' - \pi y' &= \cos x \,, \\
y(0) &= \pi \,, \\
y'(0) &= \pi^2 \,.
\end{aligned}
$$